

## Burgers 乱流による LES models の診断

名大工 長嶋 研矢 (Kenya Nagashima)

名大工 桑原 真二 (Shinji Kuwabara)

名大工 金田 行雄 (Yukio Kaneda)

### § 1 . 序 論

流体運動を解析する場合に、Navier-Stokes 方程式を差分化して数値的に解くという手法が使われる。Reynolds 数が大きい時には自由度が非常に大きくなるため、特に 3 次元の問題では計算機の制約上十分なメッシュ数を取れないことがある。つまり広い意味での Large-Eddy Simulation に頼らねばならない。

N-S 方程式では、非線形による大きな構造から小さな構造へのエネルギーの移動があるが、LES ではメッシュで捕らえられる構造 (grid-scale 成分) から、メッシュ幅より小さい構造 (subgrid-scale 成分) への移動を人工的に加えないと、一般に解は発散する。ここでは、厳密解が比較的簡単に得られる Burgers 方程式を使って、実際に行ったモデルによる計算結果と厳密解を比べることにより、LES モデルの診断を行った。Burgers 方程式は、非線形性と粘性という N-S 方程式の特性を備え、N-S 方程式の一次元モデルと考えられる。

### § 2 . 基礎方程式

ここでは、Burgers 方程式の初期値問題を考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0$$

$$u(x+L, t) = u(x, t) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

周期は、 $L=1$  とする。また、次の  $L_0, T_0$  で長さ と 時間 を 定義する。

$$L_0 = 2 / K_{max} \quad (2)$$

$$T_0 = L_0 / U_0 \quad (3)$$

ここで  $K_{max}$  は、初期値のエネルギー・スペクトルが最大値をとる波数で、 $U_0$  は初期の単位長さ当りのエネルギーの平方根とする。

Reynolds 数を

$$Re = L_0 U_0 / \nu \Big|_{t=0} \quad (4)$$

と定義する。ここでは全て  $Re=500$  とした。

初期値は、

$$u_0(x) = \int U(x-x') a(x') dx' \quad (5)$$

とおく。 $a(x)$  は  $N(0, 1)$  の乱数で、 $U(x)$  は初期の相関である。ここでは、

$$U(k) = A k^2 \exp\left(-\frac{1}{4} k^2 \sigma^2\right) \quad (A, \sigma: \text{定数}) \quad (6)$$

とした。Fig. 1 は得られた初期値の一例である。

### § 3 . L E S と L E S 方 程 式

次のようにコンポリューション・フィルターで、物理量  $g(x)$  の grid-scale 成分  $\bar{g}(x)$  を定義する。

$$\bar{g}(x, t) = \int_{\text{space}} G(x, x') g(x', t) dx' \quad (7)$$

ここで  $G$  は、Gauss 型

$$G(z) = \left(\frac{6}{\pi \Delta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-6z^2}{\Delta^2}\right) \quad (z = x - x') \quad (8)$$

にとる。  $\Delta$  はメッシュ幅に関係している。

また subgrid-scale 成分  $g'(x)$  は次のように書ける。

$$g'(x) = g(x) - \bar{g}(x) \quad (9)$$

(6) のフィルターを方程式 (1) に使うと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \bar{u}^2 + R \right) - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u} &= 0 \\ R &= \frac{1}{2} (\bar{u}^2 - \bar{u}^2) + \bar{u} u' + \frac{1}{2} u'^2 \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。ここで非線形項から  $u'$  を含む  $R$  が現れるが、これをモデルで置き換えるわけである。

#### § 4 . L E S モデル

次の 3 種類のモデルを調べた。

◎ 方程式に陽に拡散項を加えるタイプ

① 渦粘性モデル

② 4 階数値拡散モデル

◎ 数値計算スキームをそのまま使い陰に拡散を加える

③ 3 次精度の上流差分

渦粘性モデルは、(10) の  $R$  を次のようにモデル化するものである。

$$R = -\nu_m \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} \quad (11)$$

$$\nu_m = C^2 \Delta x^2 \overline{\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right|} \quad (C: \text{定数}) \quad (12)$$

(12) の  $W$  は空間平均の幅である。ここでは、 $W=0$  (Smagorinsky モデル) と、 $W=L$  ( $L$  は空間について定数) の二つの場合を考える。

4 階数値拡散モデルは、次のような 4 階微分の項を加えるものである。

$$C \Delta x^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \bar{u} \quad (C: \text{定数}) \quad (13)$$

このモデルは低波数での拡散が弱いため一般に渦粘性モデルよりもメッシュ数を多くとる必要がある。

3 次精度の上流差分は次のタイプを使った。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = \begin{cases} \frac{u_{i+2}^2 - 2u_{i+1}^2 + 9u_i^2 - 10u_{i-1}^2 + 2u_{i-2}^2}{12 \Delta x} & (u \geq 0) \\ \frac{-2u_{i+2}^2 + 10u_{i+1}^2 - 9u_i^2 + 2u_{i-1}^2 - u_{i-2}^2}{12 \Delta x} & (u < 0) \end{cases}$$

これは次のように誤差として  $\Delta x^3$  のオーダーで 4 階の拡散が入る。

$$\sim \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{1}{8} \Delta x^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u^2$$

この拡散項には、 $|u|$  が掛かっており 4 階数値拡散モデルとは違った振舞いをする予想される。

## § 5 . 診 断 法

厳密解にフィルターをかけたものを厳密な grid-scale 成分と呼び、モデルでの計算結果がこれに近い程 LES がうまくいっている (使われたモデルが良い) と判断する。

$u_m(k)$  をモデルによる結果にフーリエ変換とし、 $u(k)$  を厳密解のそれとしたとき、次の 3 つの量を考える。

$$\textcircled{1} \quad \langle u_m(k)^2 \rangle, \quad \langle u(k)^2 \rangle$$

$$\textcircled{2} \quad \langle |u(k) - u_m(k)|^2 \rangle$$

$$\textcircled{3} \quad \langle (|u(k)| - |u_m(k)|)^2 \rangle$$

① はエネルギー・スペクトルのアンサンブル平均どうしを比べるもので、個々の realization の誤差は分かりにくい。一方 ② ③ は realization ごとの誤差を平均したものである。② は位相の誤差を含むが ③ は含まない。

## § 6 . 診 断 結 果

ここに示す診断結果は全て  $t=0.9$ ,  $R_0=500$  についてのもので、realization の数は  $N_R=10$  である。速度場 (実空間) については  $N_R=1$  である。また、モデルによる計算は、単位長さ当りのメッシュ数  $N=128$  で計算した。

2 種類の渦粘性モデルを使った結果のエネルギー・スペクトルを Fig. 2 に示す。(a) は  $W=0$ , (b) は  $W=L$  の場合で、どちらも細い破線はフィルターをかけた厳密解を表す。 $W=0$  のタイプの方が高波数の発散を良く抑えているのが分かる。このときの誤差は Fig. 3 のようになるが、 $W=0$  のタイプは低波数でも成績が良い。

Fig. 4, Fig. 5 に、 $W=0$  の渦粘性モデルと 4 階数値拡散モデルでの結果のエネルギー・スペクトルと誤差を示す。Fig. 4 で小さい様に見える渦粘性モデルの低波数の誤差は、Fig. 5 では 4 階数値拡散モデルより大きいのが分かる。つまり、平均して良く合っている個々の realization は、大きな誤差を含んでいる。但し、位相の誤差を無視した量では逆転している。また 4 階数値拡散モデルは、低波数での誤差が小さいが、この性質は、かなり少ないメッシュ数 ( $N=64$  等) でもこのこる。

3 次精度の上流差分と 4 階数値拡散モデルは、どちらも

4 階の拡散を与えるが、その振舞いは少し異なる。Fig. 6 にこれらのモデルによる結果のエネルギー・スペクトルを示す。ここで (a) は 3 次精度の上流差分での計算、(b) は 4 階数値拡散モデルでの計算結果である。(a), (b) は共に高波数成分が良く抑えられていて 4 階の拡散の効果が現れている。しかし (b) では、低波数にも厳密解とのずれが見られる。

Fig. 7 は、この時の誤差であるが、上流差分では低波数まで大きな誤差を含んでいる。2 桁以上の差になっているのは、ここで使った上流差分スキームの数値拡散が大きすぎるためでもある。よって、この誤差はスキームの選び方でもっと小さくできるが、そうすると高波数の発散を抑えにくくなる。上流差分による数値拡散は非線形項から入るため、 $u^2$  に関する 4 階微分や  $u$  の 4 階微分に  $|u|$  をかけた形になる。

Fig. 8 は 4 階数値拡散モデルと 3 次精度の上流差分によるエネルギーの数値拡散スペクトルであるが、上流差分によるものでは低波数でも大きな拡散を示している。これらのことより、3 次精度の上流差分によってとりいれられる 4 階の数値拡散には、低波数への影響が少ないという普通の 4 階の拡散の性質は期待出来ないことがわかる。

Fig. 9 は、それぞれのモデルによる計算結果の実空間の様子である。

#### < 参考文献 >

- 1) Jeng, D.T. 1969 Forced equation models for turbulence. Phys. Fluids
- 2) Love, M.D. 1980 Subgrid modelling studies with Burgers' equation. J. Fluid Mech. vol.118 341

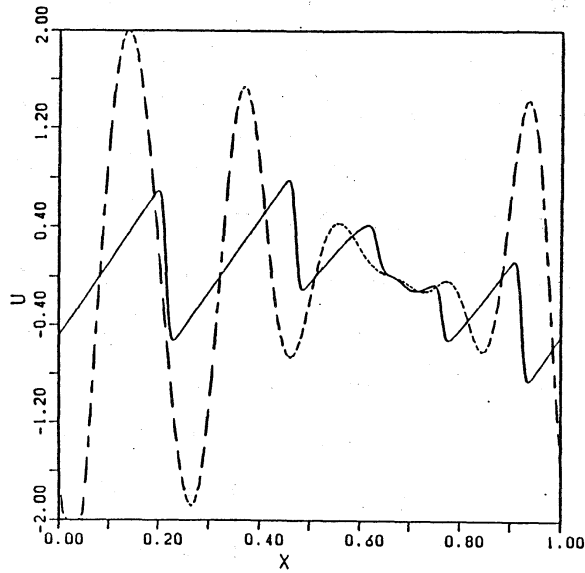
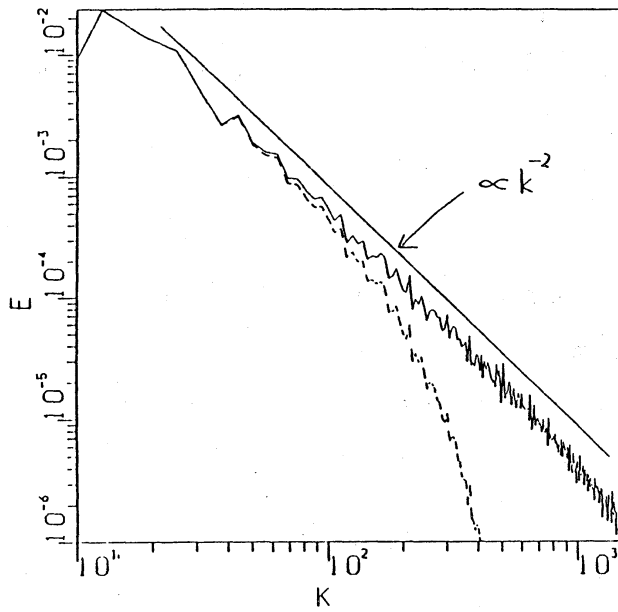


Fig. 1 速度場

--- t = 0  
 — t = 0.9



エネルギー・スペクトル

— 厳密解  
 --- grid scale 成分

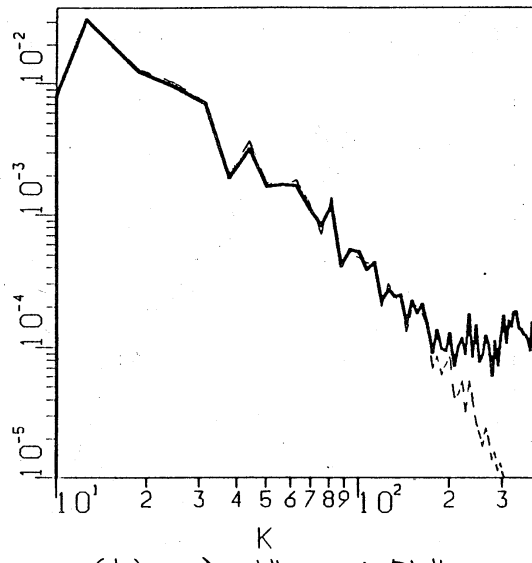
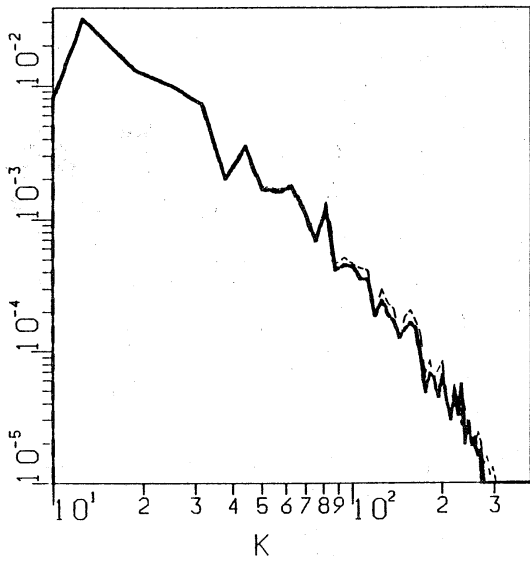


Fig. 2 (a) エネルギー-スペクトル

(b) エネルギー-スペクトル

渦粘性モデル  $w=0$

渦粘性モデル  $w=L$

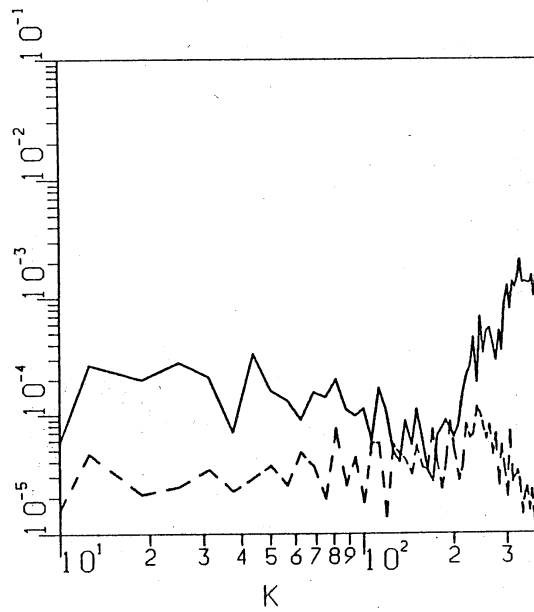
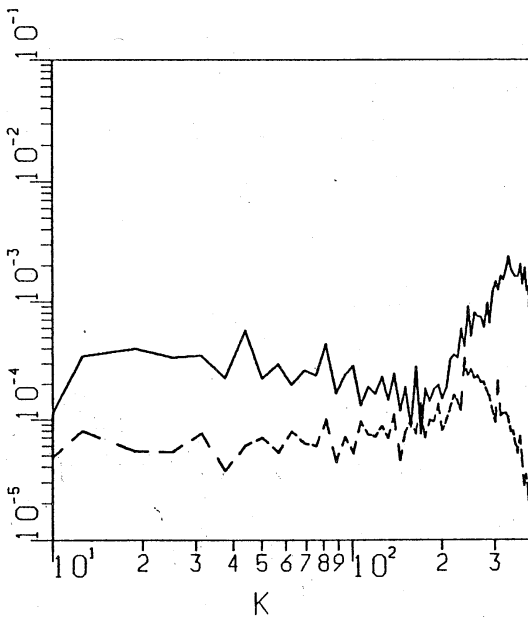


Fig. 3 (a)  $\langle |u - u_m|^2 \rangle$

(b)  $\langle (|u| - |u_m|)^2 \rangle$

—— 渦粘性モデル  $w=L$       - - - - 渦粘性モデル  $w=0$



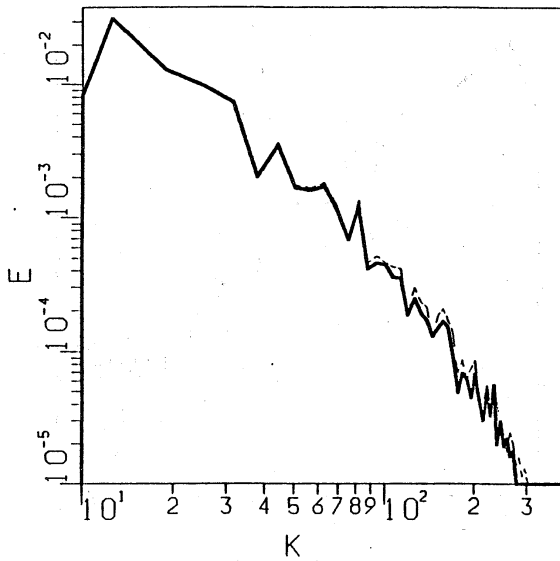
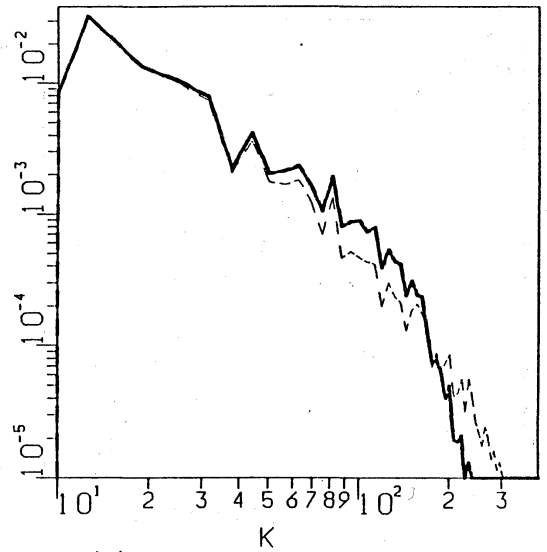


Fig. 4 (a) エネルギースペクトル  
渦粘性モデル  $w=0$



(b) エネルギースペクトル  
4階数値拡散モデル

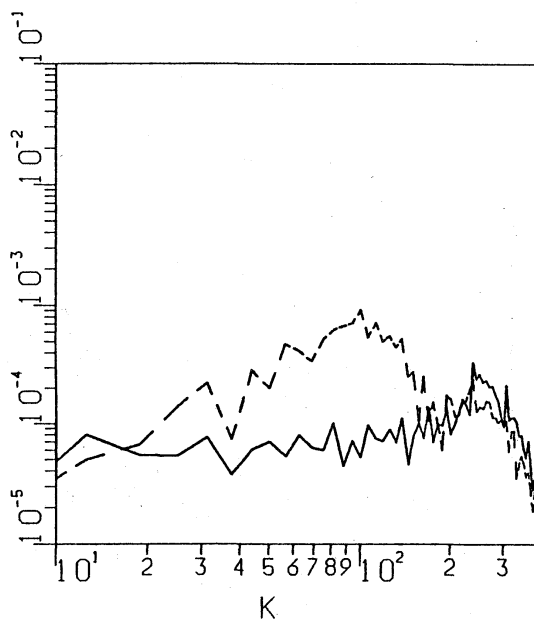
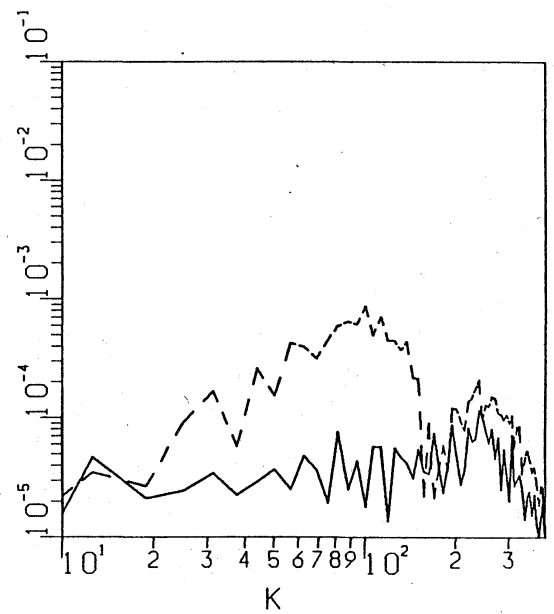


Fig. 5 (a)  $\langle |u - u_m|^2 \rangle$



(b)  $\langle (|u| - |u_m|)^2 \rangle$

— 渦粘性モデル  $w=0$     ---- 4階数値拡散モデル

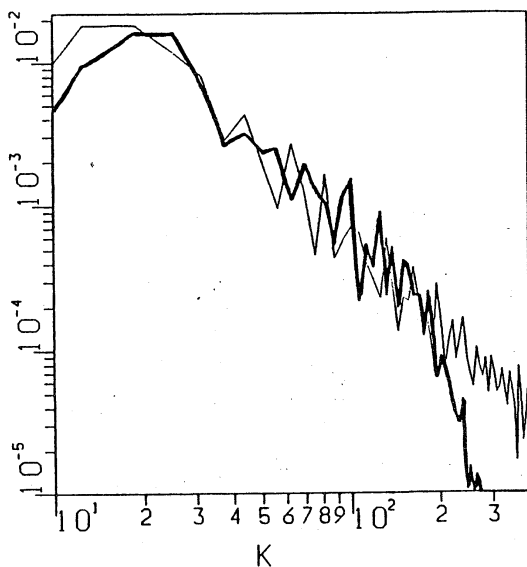
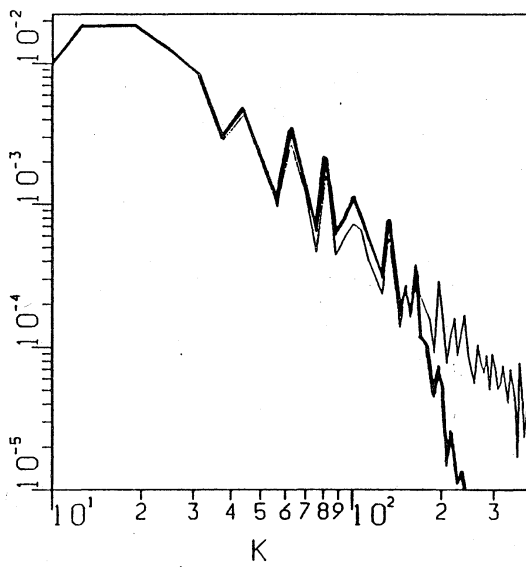


Fig. 6 (a) エネルギー・スペクトル  
3次精度の上流差分



(b) エネルギー・スペクトル  
4階数値拡散モデル

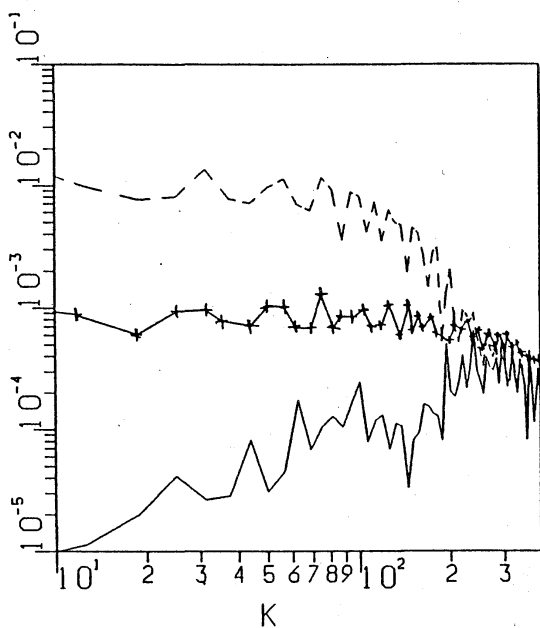
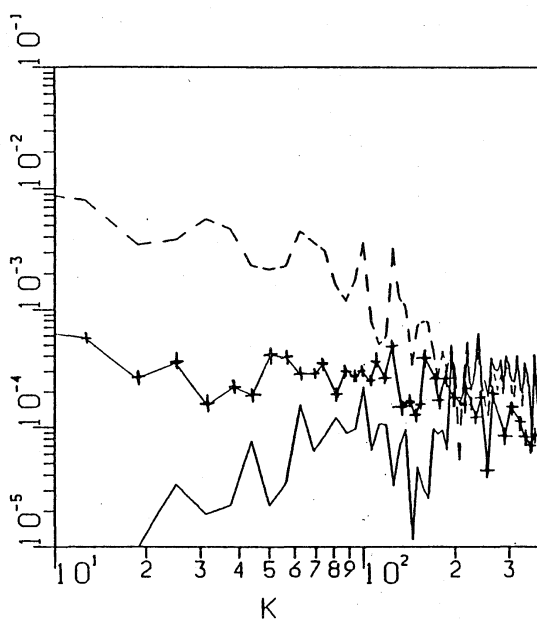


Fig. 7 (a)  $\langle |u - u_m|^2 \rangle$

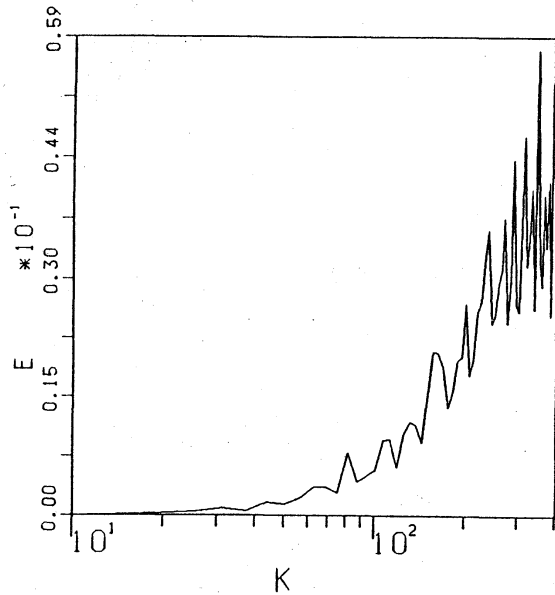


(b)  $\langle (|u| - |u_m|)^2 \rangle$

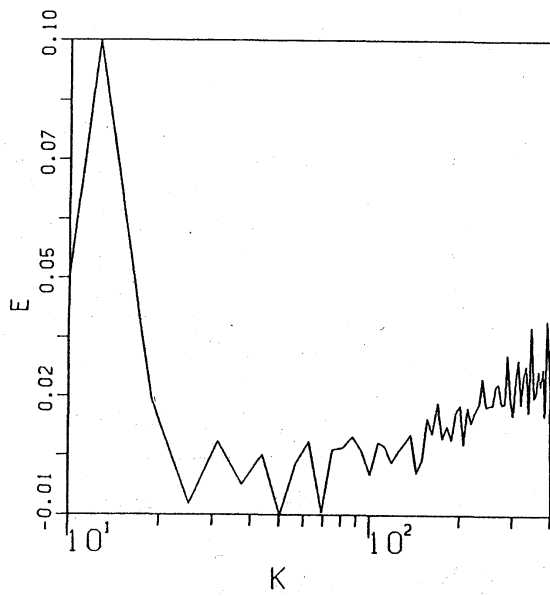
— 4階数値拡散モデル    ---- 3次精度の上流差分

+ + 3次精度の上流差分 N=4096

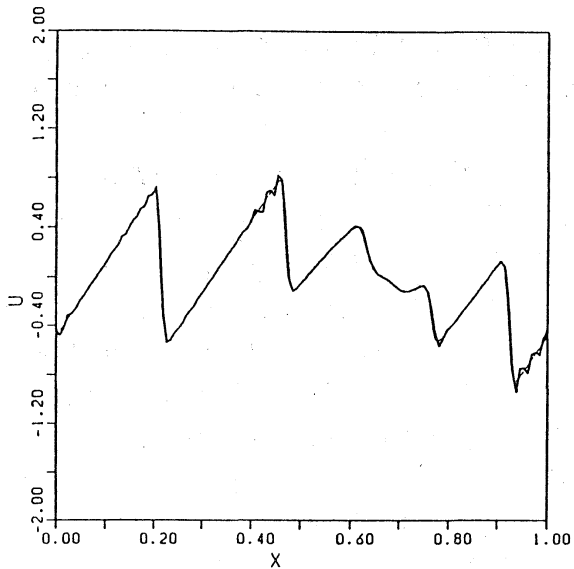
Fig. 8



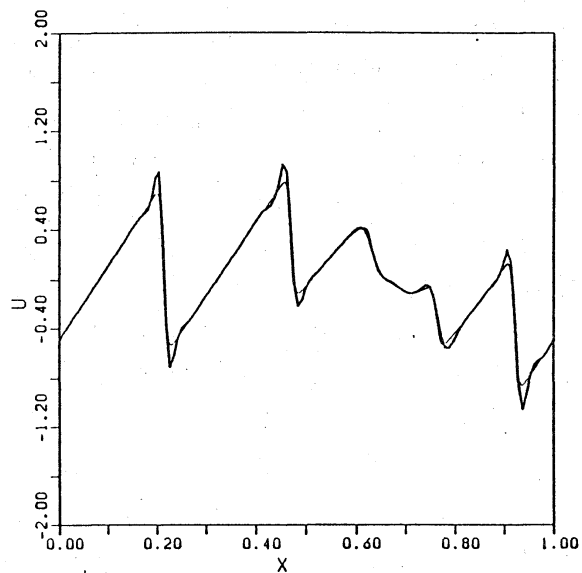
(a)  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$  による  
エネルギー散  
スノウトル



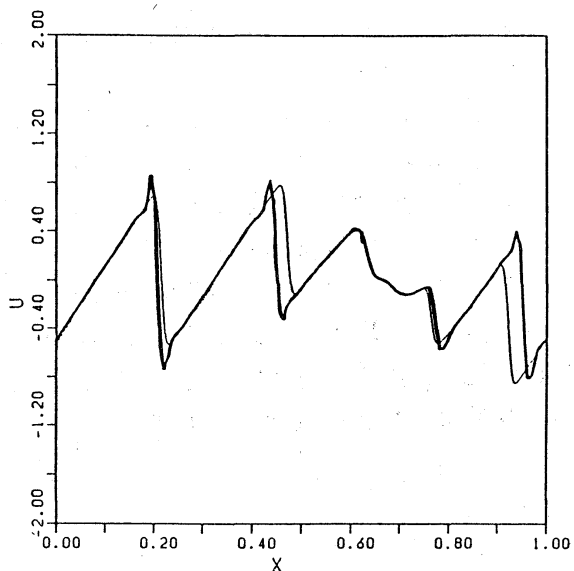
(b)  $|u| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$  による  
エネルギー散  
スノウトル



(a)



(b)



(c)

### Fig. 9 速度場

(a) 渦粘性モデル  $w=0$

(b) 4階数値拡散モデル

(c) 3次精度の上流差分