

Intermittency と Phase correlation II

東大・理・物理 真田 勉 (Tsutomu Sanada)

§ 1. Introduction

前年 (Sanada 1987) に続いて、乱流の間欠的構造: Intermittency とその速度場あるいは渦度場をフーリエ分解したときに現れる、Phase の間の統計的相関との関係について述べる。

乱流の統計理論では、その取扱い易さや小数自由度力学系との関連性を調べるために、それを波数空間で考えることが多い。ところが、Intermittency という現象は、本来物理空間での性質であるため、それまでの統計理論との関係が不明瞭である。たとえば、Intermittency とコルモゴロフのエネルギースペクトルのべき (-5/3) との関係については、次の 3 つの説が存在する。

(1) Intermittency の存在によって、-5/3 は、 $-5/3-\xi$ ($\xi > 0$) にずれる (Kolmogorov 1962, Frisch et al. 1978)。 (2) Intermittency が存在しても、-5/3 は、変わらない (Kraichnan 1985)。 (3) Intermittency が存在することによって、-2 から -5/3 に変わる (Chorin 1988)。

このような推測は他にも多く存在すると思われる。それゆえ、Intermittency に関して、何らかの数学的根拠を持つ情報が得られれば、それはかなり有力な情報になると思われる。そこで前年の報告では、Phase の間に correlation が存在しなければ、その分布は Gaussian になり Intermittent な構造はなくなることを示した。

この定理の基本的な考え方を理解するためには、次のような例を考えればよいであろう。サイコロを 100 個 (多ければ多いほどよい) 持ってきてそれを振る。これはただ一度の試行である。仮に 100 個のサイコロの目がすべて 1 になったとしたら、普通「そのサイコロには、何かからくりがあるに違いない」と考えるだろう。そのように考える根拠は、「仮にサイコロの目が統計的に独立ならば (からくりがなければ)、100 個の目がすべて 1 になる確率は非常に小さい」という数学的事実にある。同様に「Phase が統計的に独立であるならば、その分布が Gaussian から離れてしまう確率は非常に小さい」ことを主張するのが前年の定理が意味する内容である。そこで今回は、この定理と NS 方程式や乱流現象との関係について報告する。

§ 2. Relation to nonlinearity

各モードの Phase の間に何らかの correlation が存在するという事実は、

$\partial u/\partial x$ の Kurtosis が 3 に比べて非常に大きいという実験事実 (Van Atta & Antonia 1980) から結論できるものである。ところで、Phase の correlation を生み出す源は NS 方程式の非線形性にある。なぜなら線形方程式に従う現象ではフーリエモードの間には、一般に相互作用が存在しないからである。しかし、非線形現象であるからと言って必ずしも Phase に correlation が存在するとは限らない。前 § のサイコロの例では、100 個のサイコロはそれを振っている間に互いに運動量やエネルギーのやり取りを行うが、それが原因でサイコロの目がすべて 1 になるとは考えられない。すなわち相互作用はそれが働いている系に秩序を持たせることもあれば、逆に、より無秩序の状態にすることもある。NS 方程式に近い例を次の § であげよう。

§ 3. Inviscid Truncated System

Inviscid Truncated System (I T S) は、理論と数値計算の両面から良く研究されている (see References in Shepherd 1987)。特に 2 次元 I T S の数値計算例が多いので、それについて述べる。I T S の力学系としての特徴は、Non-linear の項がその系を random にすることである。2 次元 I T S では一般に、保存量はエネルギー E とエンストロフィー Q である。 $E = \text{一定}$ 、 $Q = \text{一定}$ のもとで最も random な状態、すなわち最大エントロピー状態は、分布関数が、

$$\rho \sim \exp(\alpha E + \beta Q) \quad (3.1)$$

で与えられる状態である。ここでは規格化のための因子は省略する。

(3.1) の性質を考えてみよう。波数空間における座標回転によって、 E も Q も不変であり、従って ρ も不変である。すなわちある状態と、それを任意に回転した状態は等確率で現れる。これは、I T S が等方性を持つことを意味する。

また、次のような Phase の変換、

$$\vec{u}(\vec{k}) \rightarrow \vec{u}(\vec{k}) \exp(i\theta(\vec{k})) \quad (3.2)$$

に対しても、 E 、 Q すなわち ρ は不変である。それは、Phase がどのような値を取る状態も等確率で現れることを意味し、Phase には correlation が存在しないことを表している。これらの 2 つの不変性と系の性質との関係は、3 次元 I T S においてもやはり成立する。

ところが実際の NS 方程式または乱流では粘性が存在し、そのため I T S

の平衡状態 (3. 1) は決して達成されない。それでは、乱流の非平衡状態においては先の2つの不変性は存在するであろうか。座標軸の回転不変性に関しては、2次元乱流と3次元乱流とでは見解が異なっている。3次元乱流、特にその小さい(大きい波数の)スケールでは、等方性がよく成立している (Nakauchi & Oshima 1987, Kida & Murakami 1987)。ところが2次元乱流では、初期条件あるいは大きいスケールの非等方性が、小さいスケールまで影響を与える (Herring 1975)。従って、少なくとも3次元乱流では、座標回転不変性は成立していると思われる。

次に位相変換の不変性については、一般には成立しない。なぜなら位相変換に対して不変ならば、Phase correlation が存在せず、その分布は、Gaussian になるはずであるが、渦度 ω の分布は現実にはそのような分布にはなっていないからである。すなわち Intermittency の存在は3次元乱流が位相変換に対して不変ではないことを示している。この点が ITS との基本的な違いである。

§ 4. One dimensional model

さて Intermittency を Phase の correlation と考えたとき、果してそれで次のような実験事実を説明できるであろうか。

実験事実1. u の Kurtosis は、Reynolds 数が大きくても 3 に近い。さらにその分布は、Gaussian に近い (Monin & Yaglom 1975)。

実験事実2. $\partial u / \partial x$ の Kurtosis は 3 より大きく、Reynolds 数が大きくなるにつれてその値も大きくなる (Van Atta & Antonia 1980)。

この2つの実験事実を次のような1次元モデルで試してみた。すなわち、1次元速度場: $u(x)$ をフーリエ分解する。

$$u(x) = \sum_k a(k) \cos(kx + \theta(k)).$$

波数 k は、 $10 \leq k \leq k_d$ の整数値を取る。amplitude $a(k)$ は、 $-5/3$ 則に合わせるため、

$$a(k)^2 k^2 \sim k^{-5/3}$$

から、

$$a(k) \sim k^{-11/6}$$

と置く。 k_d は、コルモゴロフの波数に相当するものであり、Reynolds 数との関係は、 $k_d \sim Re^{3/4}$ である。残りの自由度である、Phase $\theta(k)$ ($k=10, 11, \dots, k_d$) を乱数で生成し、 $u(x)$ と $\partial u / \partial x$ の分布の Kurtosis を計算した。 $\theta(k)$ は、 $[0, 2\pi * C)$ の間の一様乱数とした。例えば、 $C = 1.0$ のときは、Phase が $[0, 2\pi)$ の間に一様に分布しており correlation が無い状態であるが、 $C (> 0)$ が小さくなるにつれて Phase が揃ってくる。 $C = 1.0, 0.5, 0.4, 0.3$ について、 u と $\partial u / \partial x$ の分布の Kurtosis の k_d 依存性 (Re 依存性) を示したのが、Fig.1 と Fig.2 である。この simulation の結果、(1) Phase が揃ってくるほど、Kurtosis は大きくなる。(2) u の Kurtosis は、 $\partial u / \partial x$ の Kurtosis に比べ、小さい。(3) $\partial u / \partial x$ の Kurtosis は、 C が小さいとき、 k_d (Re) が大きいほど大きくなる。

(2) と (3) は実験事実を定性的にはあるが、説明していると思われる。現実の乱流がこのような単純な correlation を持っているかどうか疑わしいが、Phase に correlation が存在しても、 u に関しては、そのスペクトルのべきが steep であるため高波数側のモードの影響が現れず、結局 Gaussian に近くなるが、 $\partial u / \partial x$ または ω に関してはべきがゆるやかであり、Phase の correlation の影響がもろにその分布に現れてくるとと思われる。

§ 5. NS eq. with random phasing

§ 3で考察されたように、3次元乱流は位相の変換：

$$\vec{u}(\vec{k}) \rightarrow \vec{u}(\vec{k}) \exp(i \theta(\vec{k}))$$

に対して不変ではない。さらに、この非不変性が Intermittency となって現れる。NS 方程式には Phase の correlation を生み出すメカニズムが備わっていると思われるが、そのようなメカニズムが、乱流の基本的性質にどのような影響を及ぼすかは興味のあるところである。

その影響を調べるため、本来の NS 方程式 (非圧縮性、外力なし) と、それに人工的に Phase correlation を失わせるような効果を加えたものを比較した。具体的には、次の様な simulation を行った。NS 方程式の直接 simulation (NS と表す) と、それに各ステップごとに渦度のフーリエモードを、

$$\vec{\omega}(\vec{k}) \rightarrow \vec{\omega}(\vec{k}) \exp(i \theta(\vec{k})) \quad (5.1)$$

の様に変換する効果を加えたものである。ここに、 $\theta(\vec{k})$ は $[-5^\circ, 5^\circ]$ (5 と表す) または、 $[-10^\circ, 10^\circ]$ (10 と表す) の一様乱数で \vec{k} ごとに違う値である。

この3つの場合について、初期条件と粘性 ($\nu = 0.01$) を与え、スペクトル法 (フーリエスペクトル法、 $-10 \leq k_x, k_y, k_z \leq 10$) を用いて simulation を行った。時間積分は、2 次の Runge-Kutta 法 ($dt = 0.01$) を用いた。

注意すべき点は、(5.1) の変換を行ってもその時点では、E、Q、H (Helicity)、エネルギースペクトルなどの量はまったく変化しない。Phase を shift した効果は、次のステップの計算において効いてくる。

Figure 4, 5, 6 は、それぞれ、E、Q、H の時間発展である。縦軸は、それぞれ、その初期値で規格化してある。E に関しては、NS 方程式の方が減衰は速いが、さほど大きな違いはない。Q (~ エネルギーの散逸) では、NS 方程式の方が、random phasing が加わったものより大きい。すなわち、random phasing により、渦の発達が妨げられていることがわかる。逆に言えば Intermittency の効果はエネルギーの高波数側へのトランスファーを促成しているようである。また H に関しては、NS 方程式の方が速く減衰する。

全体的に判断すると、random phasing は NS 方程式の Non-linearity を弱めているようである。そして、エネルギーの高波数側へのトランスファーを抑制している。

§ 6. Discussions

乱流における Phase correlation の効果について考察した。Intermittent な構造が果して乱流の統計的性質にどのような効果を及ぼすかは、まだ良くわかっていない。Intermittent な構造はコルモゴロフ的なエネルギーカスケードに単なる修正を与えるだけなのか、それともエネルギーカスケードそのものなのかも知れない。また、もし Random な外力によって Phase の correlation を壊すことができれば、乱流の性質はどの様に変化するであろうか。§ 3 で述べたように、Nonlinearity は ITS ではその系を random にするが、NS 方程式では何等かの相関を生み出している。平衡系と非平衡系で全く同じ形の項が、一見逆の作用をしているように思われる。乱流がその非平衡系のために、「乱れた状態になろうとするが、完全に乱れた状態にはなれない」と言う中途半端な状態が、その現象の扱いにくさであろう。

Acknowledgements

講演の後で、多くの先生方から、貴重な御意見をいただきました。感謝したいと思います。

References

- Chorin, A.J. 1988 : Commun.Math.Phys. 114,167.
 Frisch, U., P-L. Sulem & M. Nelkin 1978 : J.Fluid Mech. 87,719.
 Herring, J.R. 1975 : J.Atmos.Sci. 32,2254.
 Kida, S. & Y. Murakami 1987 : Phys.Fluids 30,2030.
 Kolmogorov, A.N. 1962 : J.Fluid Mech. 13,82.
 Kraichnan, R.H. 1985 : Phys.Fluids 28,10.
 Monin, A.S. & A.M. Yaglom 1975 : Statistical Fluid Mechanics,
 Vol.2, § 18, M.I.T.press.
 Nakauchi, N. & H. Oshima 1987 : Phys.Fluids 30,3653.
 Sanada, T. 1987 : in 数理研講究録「乱流の特異性と統計理論Ⅱ」
 (in press ?).
 Shepherd, T.G. 1987 : J.Fluid Mech. 184,289.
 Van Atta, C.W. & R.A. Antonia 1980 : Phys.Fluids 23,252.

Figure Captions

- Fig.1. u の Kurtosis の k_d 依存性。
 Fig.2. $\partial u / \partial x$ の Kurtosis の k_d 依存性。
 Fig.3. Energy の時間変化。
 Fig.4. Enstrophy の時間変化。
 Fig.5. Helicity の時間変化。
 (a) と (b) は、縦軸のスケールが異なっている。

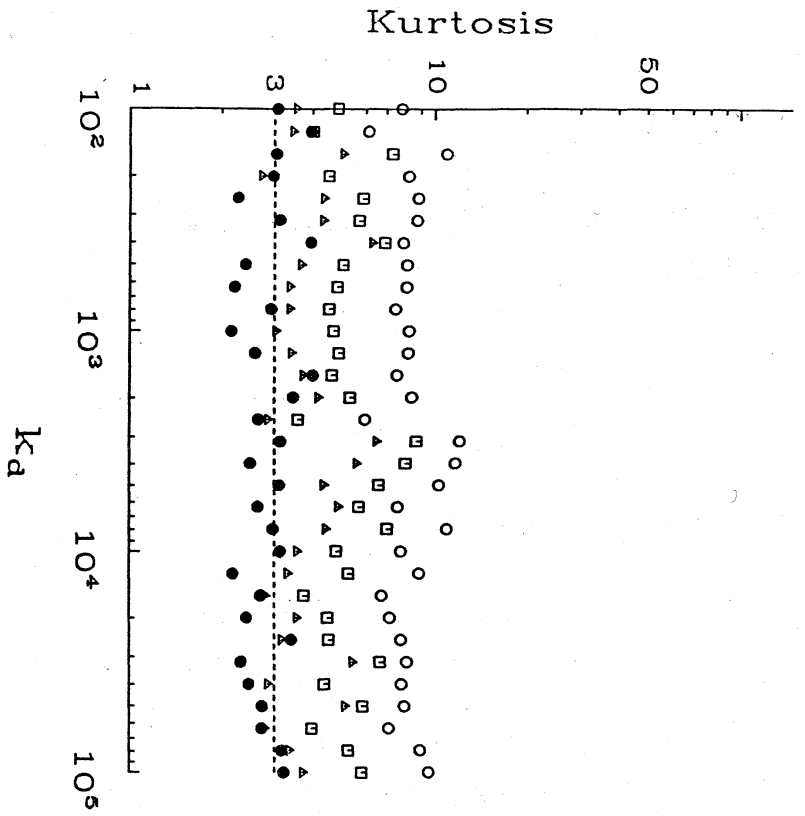


Fig. 1

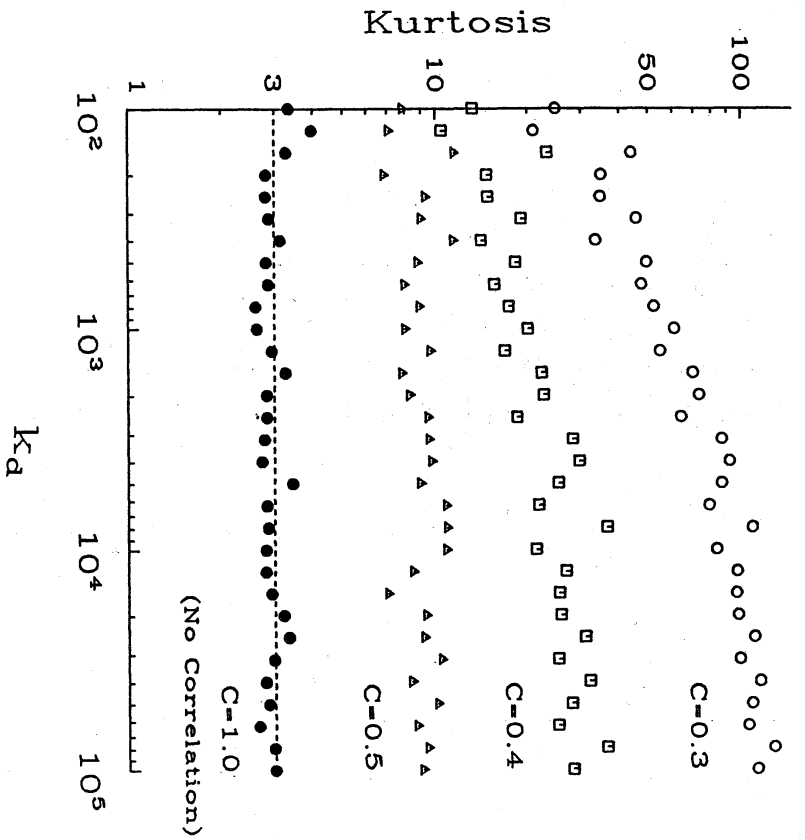


Fig. 2

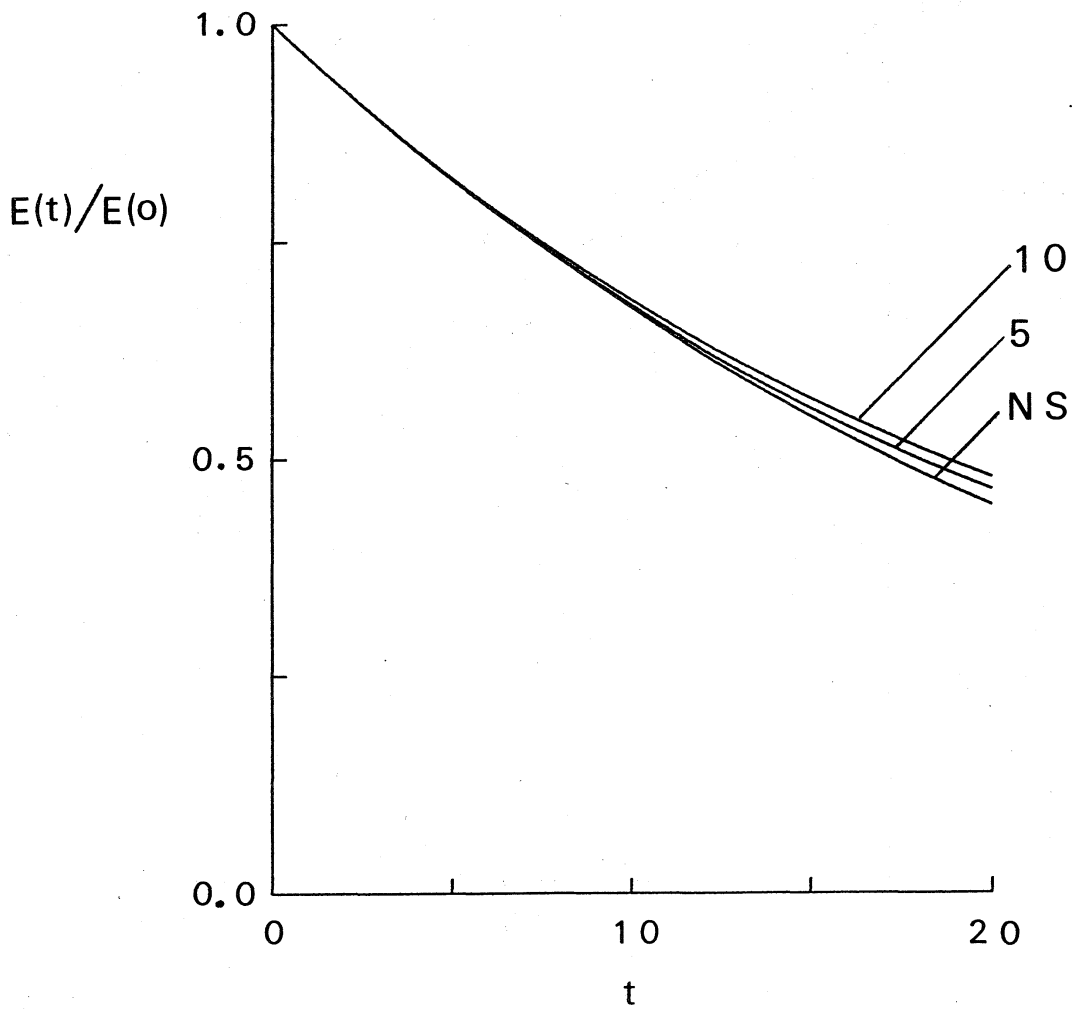


Fig. 3

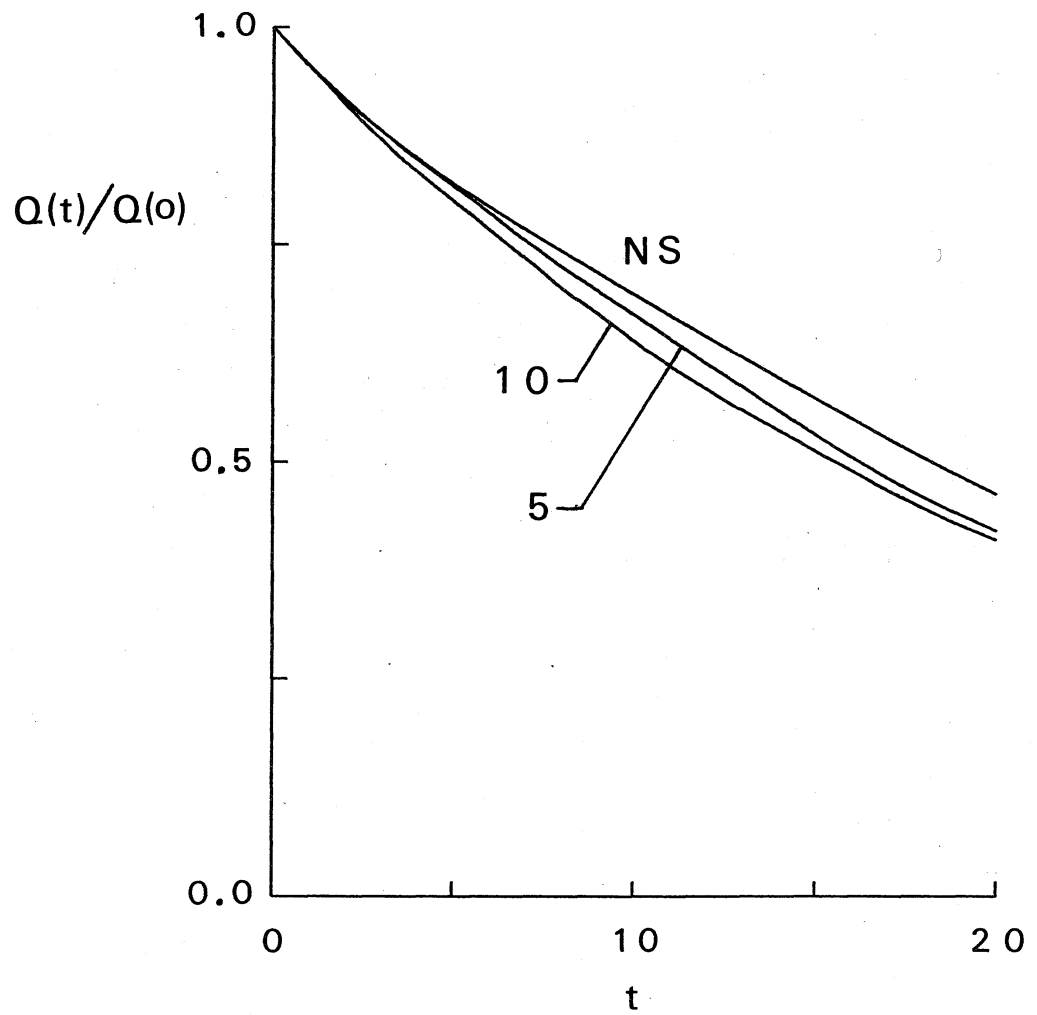


Fig. 4

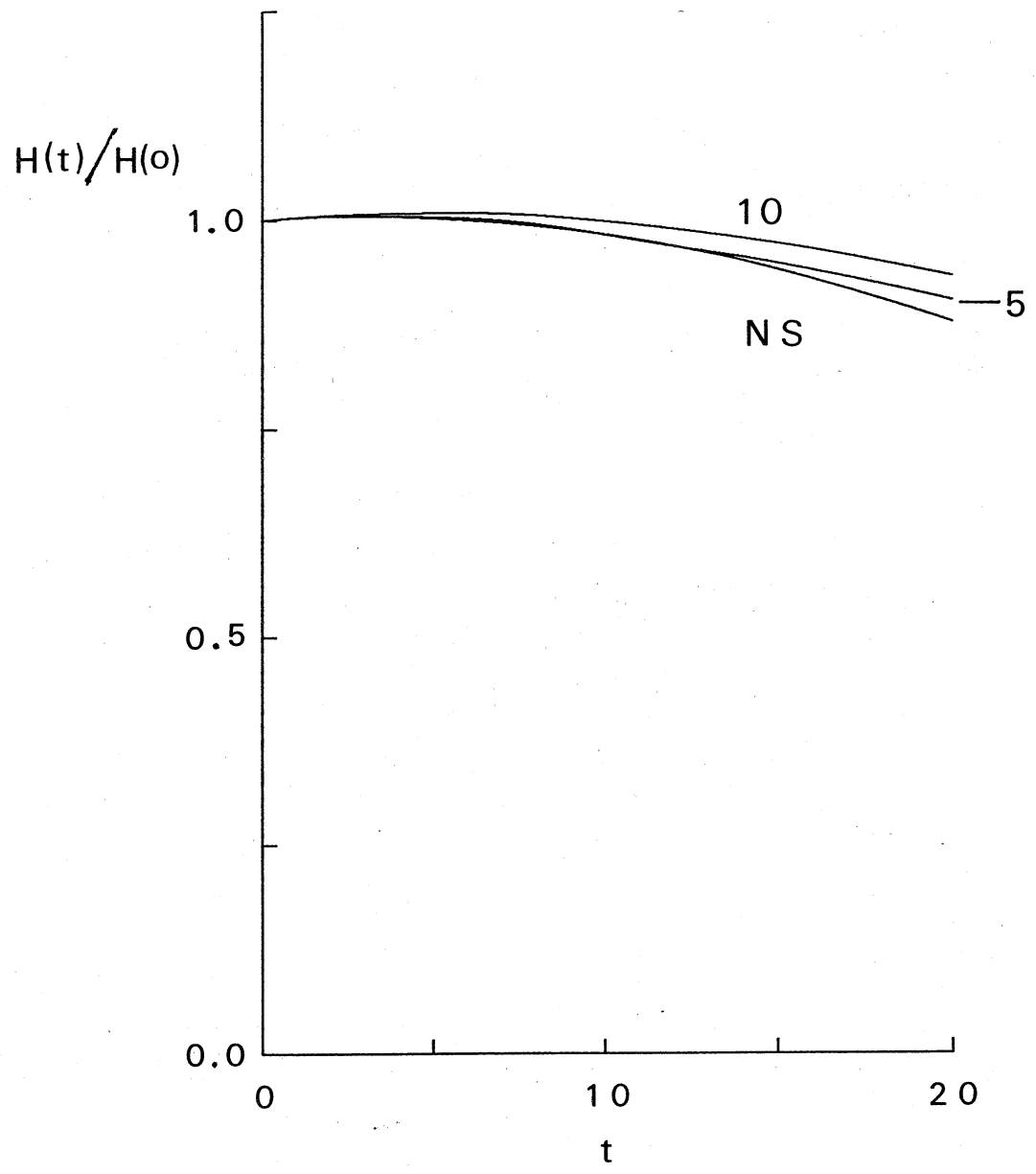


Fig. 5 (a)

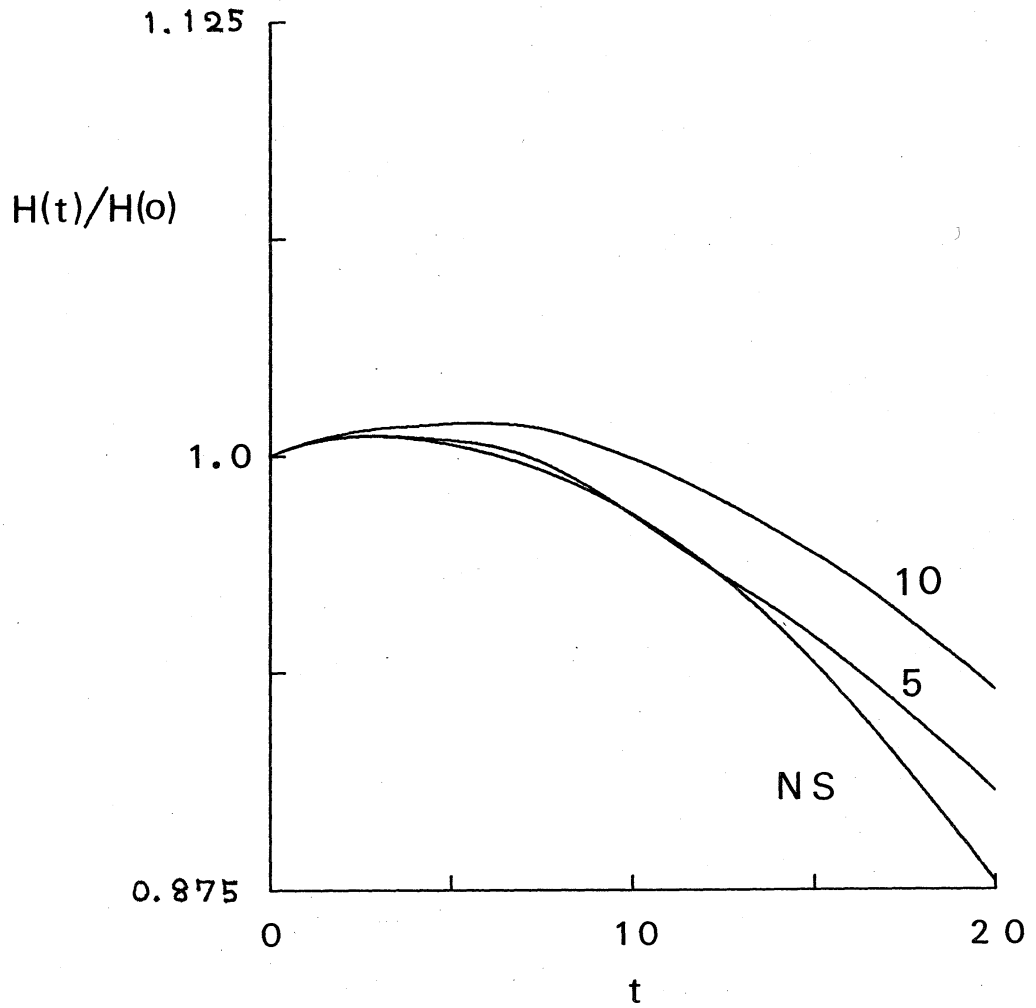


Fig. 5 (b)