数理解析研究所講究録
第 662 巻 1988 年 114-131

高次元におけるYang-Mills場のModuli空間のEndについて

東大・理　中島　啓
(Hiraku Nakajima)

ここでは，K.K.Uhlenbeck[U2], S.Sedlacek[Se], S.K.Donaldson [D1] による，4次元多様体上のYang-Mills場のModuliに関するいわゆる"bubble theorem"を高次元の場合に拡張することを目的とする。

以下に従って述べる。

§0. Notation

§1. 一般のYang-Mills場のModuliの場合

§2. Einstein-Hermitian connectionのModuliの場合

§3. Einstein metricsの収束について

§0. Notation

以下Notation は次の通りであるとする。

(X, g) : n 次元のコンパクトなRiemannian Manifold

$G, \mathfrak{g}$: コンパクト・リー群，およびそのリー環

$P \to X$; X 上の G 主束

$\mathcal{M}$: P 上のYang-Mills 場のModuli空間，すなわち P 上のYang-Mills 場の全体の集合をgauge 群の作用で割ったもの

$\mathrm{Ad}P$: P のadjoint bundle，すなわちadjoint表現

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$$

によって P にassociateしたvector bundle

$A^k(\mathrm{Ad}P)$: $\mathrm{Ad}P$ に値をもつ k-form の全体

$\mathcal{M}$ に次の様に位相を導入する。$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ をYang-Mills 場の列，$[A_i]$ を A_i の表わすclassとするとき，

$$[A_i] \longrightarrow [A_\infty] \quad \text{in } \mathcal{M}$$

を，あるgauge 変換 γ_i によって

$$\gamma_i(A_i) \longrightarrow A_\infty \quad \text{in } C^\infty\text{-topology on } X$$

とできるときと定義する。但しここで，C^∞-topology というときには，connection の全体と $A^1(\mathrm{Ad}P)$ を同一視することに

よって導入している。

§1. 一般のYang-Mills場のModuliの場合

Moduli空間 $\mathcal{M}$ のglobalな構造を知りたいということが問題意識である。今までに知られていたのは、以下のように低次元の場合に限られていた。

FACT

1) $n=2,3$ のとき (Uhlenbeck [U2])
   $\mathcal{M}$ はコンパクトである。

2) $n=4$ のとき (Donaldson [D1])
   $\mathcal{M}$は、一般にコンパクトでない。しかし、任意の列 $\{[A_i]\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ は、$\int_X |R_{A_i}|^2 dV_g$ が有界であれば X の有限個の点を除いて収束する。(詳しくは、後に述べるTheorem 1 を見よ。)

注意として、Gがabelianのときには $\mathcal{M}$がコンパクトであることが、Hodge Theory から容易に従うことを指摘しておく。

それでは、このsection の主定理を述べよう。

THEOREM 1

任意のYang-Mills場の列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ で $\int_X |R_{A_i}|^2 dV$ が有界であるものに対し，ある部分列 $\{j\} \subset \{i\}$，gauge 変換 γ_j，$(n-4)$ 次元のHausdorff測度が有限であるようなコンパクト集合 $S \subset X$，$E|X \setminus S$ 上のYang-Mills 場 A_∞ が存在して，

$$\gamma_j(A_j) \longrightarrow A_\infty \qquad X \setminus S \text{ 上で } C^\infty\text{-収束する。}$$

$(n-4)$次元Hausdorff 測度 $\mathcal{H}_{n-4}$ の復習をしておこう。

距離空間 X の部分集合 A に対し，

$$\mathcal{H}^{\varepsilon}_{n-4}(A) := \omega_{n-4} \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^{n-4} : \begin{array}{l}\operatorname{diam} C_j < \varepsilon \\ A \subset \bigcup_j C_j\end{array}\right\}$$

$$\mathcal{H}_{n-4}(A) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{H}^{\varepsilon}_{n-4}(A) \in [0, \infty]$$

と定義する。但し ω_{n-4} は $\mathbb{R}^{n-4}$ の unit ball の体積である。特に $n=4$ の場合は $\mathcal{H}_0(A) = (A\text{の個数})$ となり，上の定理はDonaldsonの結果と一致する。

以下，Theorem 1の証明の概略を述べる。Key となるのは次のアプリオリ評価である。

THEOREM 2

n，X，G のみに依存する定数 ε_1，C が存在して次が成立する。

$B_r(x) \subset X$: metric ball に対し，A が $E|B_r$ 上の Yang-Mills 場であって，$r^{4-n}\int_{B_r(x)} |R_A|^2 dV_g \leqq \varepsilon_1$ を満たすとき

$$\sup_{B_{\frac{r}{4}}(x)} |R_A|^2 \leqq C r^{-n} \int_{B_r(x)} |R_A|^2 dV_g$$

が成立つ。

証明は harmonic map のときの Schoen の評価 [Sc] と全く parallel にできる。Weitzenböck formula と Monotonicity formula を用いる。

さて $\{A_i\}$ を Theorem 1 にある Yang-Mills 場の列としよう。そこで X の部分集合 S を次のように定義する。

$$S := \{x \in X : \lim_{i\to\infty} r^{4-n}\int_{B_r(x)} |R_{A_i}|^2 dV \geqq \varepsilon_1 \quad \text{for all } r>0\}$$

まず $\mathcal{H}_{n-4}(S) < \infty$ となることを見よう。実際，任意の正数 r に対し，次の様な ball の family $\{B_r(x_k) : k=1,\cdots\}$ を取る。

① $S \subset \bigcup_k B_{2r}(x_k)$, $x_k \in S$

② $B_r(x_k) \cap B_r(x_l) = \phi$ if $k \neq l$

すると，$x_k \in S$ という条件から

$$r^{4-n}\int_{B_r(x_k)} |R_{A_i}|^2 dV \geqq \frac{\varepsilon_1}{2} \quad \text{for } i : 十分大$$

よって

$$\sum_k \left[\frac{\operatorname{diam} B_r(x_k)}{2}\right]^{n-4} \leqq \frac{2}{\varepsilon_1}\int_{B_r(x_k)} |R_{A_i}|^2 dV \leqq \frac{2}{\varepsilon_1}\int_X |R_{A_i}|^2 dV \leqq \frac{2}{\varepsilon_1} C$$

但し，最後の不等式は，$\int_X |R_{A_i}|^2 dV$ が上から有界という仮定から導かれる。結局 $r \downarrow 0$ として $\mathcal{H}_{n-4}(S)$ が示された。

次に $X \setminus S$ での A_i の収束を見る。次の Uhlenbeck による Coulomb gauge の存在定理が用いられる。

<u>FACT</u> (Uhlenbeck [U2])

$p \geqq n/2$ とする。このとき n, X, G, p に依存する正数 ε_2 が存在して次が成立する。

$P|B_r$ 上の connection A (Yang-Mills でなくてもよい) が

$$r^{2p-n}\int_{B_r} |R_A|^p dV \leqq \varepsilon_2$$

を満たすならば，$P|B_r$ のある trivialization $P|B_r \cong B_r \times G$ が存在して，A をこの trivialization によって $\mathfrak{g}$-valued 1-form と思ったときに

$$d^*A = 0$$

が成立つ。但し d は $B_r \times G$ の trivial な product connection であり，d^* はその adjoint である。

AがYang-Mills場であることは，$d_A^* R_A = 0$ と同値である。これをtrivializationを用いて $\mathfrak{g}$-valued 1-form Aの方程式に直すと，

$$d^*dA + [A, dA] + [A, [A, A]] = 0$$

となるが，この方程式は楕円型ではない。Coulomb gaugeであるという条件 $d^*A = 0$ をあわせると，Aは楕円型の方程式をみたすことになるのである。

$x \in X \setminus S$ としよう。部分列 $\{j\} \subset \{i\}$ を取れば，ある $r > 0$ に対して

$$r^{4-n} \int_{B_r(x)} |R_{A_j}|^2 dV \leqq \varepsilon_1 \quad \text{for all } j$$

を満たす。このときTheorem 2 を用いれば，

$$\sup_{B_{\frac{r}{4}}(x)} |R_{A_j}|^2 \leqq C r^{-n} \int_{B_r(x)} |R_{A_j}|^2 dV \leqq C r^{-4} \varepsilon_1$$

必要ならば ε_1をさらに小さく取り直すことにより，各A_jはCoulomb gaugeの存在定理の仮定をみたすとしてよい。Coulomb gaugeによるtrivializationのもとで A_jの収束をいうのは，楕円型の微分方程式に関するアプリオリ評価を用いることによって容易である。これはlocalな収束でしかないが，theoremの結論にあるようなgauge変換 γ_j を作ることは，technicalな議論であって，本質的に難しいことではない。

この§を終える前に二,三の注意を述べる。まずUhlenbeck-Yau[UY]の中に(証明なしで)引用されている事実によると,Theorem 1は,A_iたちがYang-Millsでなくとも成立つようである。但しその場合は $\mathcal{H}_{n-4}(S)<\infty$ までは言えず,単に $\mathcal{H}_{n-4+\varepsilon}(S)=0$ がすべての正数εについて成立つだけのようである。その証明にはCoulomb gaugeの存在定理がもっと弱い仮定,すなわち,すべての $r_1\leqq r$ に対して

$$r_1^{4-n}\int_{B_{r_1}}|R_A|^2dV \leqq \varepsilon$$

が成立つときに成立することを用いる。こちらの方が応用範囲は大きいように思われる。

次に,Theorem 1の状況が起こる例であるが,これは余り知られていないように思われる。§2はその数少ない例の一つである。Yang-Mills場の存在定理が高次元の場合は§2の例を除いて全くないのが理由である。今後の課題と言えるだろう。

§2. Einstein-Hermitian connectionのModuliの場合

この§では,Xはコンパクトな Kähler manifold で,次元を m (よって realの次元は $n=2m$)とし,ωで Kähler form を表わす。構造群を $G=U(r)$ とし,$U(r)$の標準的な$\mathbb{C}^r$へ

の表現によってPにassociateしたベクトル・バンドルをEで表わす。

まずEinstein-Hermitian connectionの定義をしよう。

<u>Definition</u>

P上のconnection Aが<u>Einstein-Hermitian</u>であるとは，次の1) 2)をみたすときを言う。

1) Aはholomorphic connectionである。

すなわち，Aにassociateした外微分作用素

$$d_A : A^p(E) \longrightarrow A^{p+1}(E)$$

をXのcomplex structureに従って

$$d_A = \partial_A + \bar{\partial}_A : A^{p,q}(E) \longrightarrow A^{p+1,q}(E) + A^{p,q+1}(E)$$

と分解したときに

$$\bar{\partial}_A^2 = 0$$

を満たす。

2) 各点$x \in X$に対し，正則接バンドル$T_x X$のunitray frame $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$を取ったときに，

$$\sum_{\alpha=1}^m R_A(e_\alpha, \bar{e}_\alpha)\xi = \lambda \xi \qquad \text{for all } \xi \in E_x$$

が成立つ。但しλは，（点xにはよらない）実数であって，上の方程式を用いると自動的に

$$\lambda = 2m\pi \int_X c_1(E) \wedge \omega^{n-1} / r \cdot \mathrm{vol}(X)$$

となることが従う。

（より詳しいことについては，小林先生の本［K2］を参照するとよい。）

AがEinstein-HermitianならばYang-Mills connectionである。

AをEinstein-Hermitian connectionとするとき $\bar{\partial}_A$ から定まるX上のcoherent sheafを $\mathcal{E}_A$ で表わそう。このとき $\mathcal{E}_A$ は、代数幾何で言うところの，"semistable"なsheafとなっている。（［K1］［L］）代数幾何ではsemistableなsheafのmoduliは調べられていて，vector bundleだけ考えていてはcompactにならなくてtorsion freeなsemistable sheafまで拡げると，projectiveなvarietyになることが知られている。（［M］）そこで，Einstein-Hermitian connection A_i に対応するsheaf $\mathcal{E}_{A_i}$ がvector bundleでないtorsion free sheafに"収束"するときに，微分幾何的に見て A_i がどういうふるまいをするかという問題を考えることは自然である。次のTheoremは、ある条件のもとでこの問題に解答を与えるものである。

<u>THEOREM 3</u>

今までの記号でさらに，Xはprojectiveで，Kähler form ωはあるample line bundle Lの $c_1(L)$ にコホモロガスであるとし，

$$G.C.D.\left(r, \int_X c_1(E)\wedge\omega^{n-1}\right) = 1$$

が成り立っていると仮定する。

$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ を Einstein-Hermitian connection の列とすると Theorem 1 の結論において，S は $\dim_{\mathbb{C}} S = m-2$ となる analytic set であり，A_∞ が $X \setminus S$ 上に定める sheaf $\mathcal{E}_{A_\infty}$ は，X 上で定義されたある torsion free coherent sheaf $\mathcal{F}$ の $X \setminus S$ への制限である。

証明を述べるかわりに，収束の状況をより詳しく説明しよう。（実はこの observation が証明の Key Point である。）記号が繁雑になるのを避けるために，A_i が（gauge 変換をとらずに）A_∞ に $X \setminus S$ で収束していると仮定しよう。まず，Serre の Theorem A から ample line bundle L を十分 tensor すれば，$\mathcal{E}_{A_i} \otimes \mathcal{O}(L^k)$ が global section で生成される。すなわち，k を十分大にとると，i と無関係な整数 N が存在して，

$$f_i : \mathcal{O}_X^N \longrightarrow \mathcal{E}_{A_i} \otimes \mathcal{O}(L^k)$$

という各 fibre で surjective な homomorphism f_i が存在する。但し，$\mathcal{O}_X$ は X の structure sheaf，$\mathcal{O}(L^k)$ は $L^k = \underbrace{L \otimes \cdots \otimes L}_{k \text{コ}}$ の定める sheaf である。k が i によらずに一様に取れることは，代数幾何の理論によって保証されている。f_i の $\mathrm{rank}\, E = r$ 回の外積を取ると，

$$\wedge^r f_i : \mathcal{O}_X^{\binom{N}{r}} \longrightarrow \wedge^r(\mathcal{E}_{A_i} \otimes \mathcal{O}(L^k))$$

となる。ここで $\wedge^r(\mathcal{E}_{A_i} \otimes \mathcal{O}(L^k))$ は line bundle で構造群が $G = U(1)$ というabel群の vector bundle $\wedge^r(E \otimes L^k)$ 上の Einstein-Hermitian connection から定まる sheaf であることに注意する。§1 で述べたように、構造群が abelian であれば moduli はコンパクトだから、$\wedge^r(\mathcal{E}_{A_i} \otimes \mathcal{O}(L^k))$ は、X 全体である line bundle L_∞ に収束するとしてよい。このとき $\wedge^r f_i$ は適当に定数倍することによって

$$g_\infty : \mathcal{O}_X^{\binom{N}{r}} \longrightarrow L_\infty$$

という non-zero homomorphism に収束する。しかしこのとき g_∞ は各 fibre で surjective とは言えず、ちょうど S の上では 0 になっている。

まとめて言うならば、S は $\mathcal{E}_{A_i}$ の local frame を取ったときに、i が無限大に発散するにつれて、その frame が一次独立でなくなってしまうところと言える。

なお、Theorem 3 と簡単な P.D.E の理論を用いると、次の Removable singularity theorem が言える。

<u>THEOREM 4</u>

Theorem 3 で得られた Einstein-Hermitian connection A_∞ は，torsion free sheaf $\mathcal{F}$ の double dual $\mathcal{F}^{**}$ が locally free な所まで smooth に拡張される。よって $\dim_{\mathbb{C}} = m-3$ である analytic set S' があって A_∞ は $X \setminus S'$ まで伸びる。

特に $m=2$ のときは A_∞ は X 全体に拡張され，これは Uhlenbeck の removable singularities theorem [U1] と適合する。高次元における removable singularities theorem はいろいろと知られているが，([OS], [N2]) それらは仮定が強く，Theorem 3 の A_∞ には apply できない。上の Theorem 4 は，簡単なうえ，自然である。

なお，この theorem 4 の結論は一般の Yang-Mills 場のときにも成り立つのではないかと予想している。すなわち A_∞ を Theorem 1 で得られた Yang-Mills 場とすると，あるコンパクト集合 S' で $\mathcal{H}_{n-5+\varepsilon}(S')=0$ for all $\varepsilon>0$ を満たすものが存在して A_∞ は $X \setminus S'$ まで smooth に拡張されるだろうというものである。その根拠は，Schoen-Uhlenbeck の harmonic map の regularity theory [SU] の類推というだけだが，Yang-Mills 場の regularity theory を作るというのは，hard であるが面白い問題のように思われる。

§3. Einstein metricの収束について

これは，私が今一番興味をもっている問題なのであるが，今までのYang-Mills場のときの結果をEinstein計量のときに考えてみようというものである。一般にEinstein計量のLevi-Civita connectionはYang-Millsであるから，一見，Yang-Millsのときの結果がそのまま使えそうであるが，実際には§2までの結果は多様体のbase metricはfixされていたので，これはそのまま適用することはできない。

次の様な例が知られていた。

<u>Example</u>（小林(亮)-Todorov）[KT]

X_∞を$T^4/\mathbb{Z}_2$とする。但し$\mathbb{Z}_2$はT^4に，

$$\tau(z_1, z_2) = (-z_1, -z_2) \qquad \tau : \mathbb{Z}_2\text{の生成元},\ (z_1, z_2) \in T^4$$

で作用しているものとする。g_∞をT^4のflat metric $= \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^2$ から自然にX_∞上にinduceされるmetricとしよう。但し，$\mathbb{Z}_2$の作用はT^4上で16コの不動点を持つから(X_∞, g_∞)はmanifoldでなくorbifoldである。さらにKähler orbifoldである。singular pointを$x_1, \cdots, x_{16}$と書くことにしよう。

$$\pi : X \longrightarrow X_\infty$$

をX_∞の(complex surfaceとしての) minimal resolutionとしよう。XはK3 surfaceである。このとき，X上のRicci-flat Kähler metricの列$\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$で，次をみたすものが存在す

る。

1) $vol(X, g_i) = 1$ for all i

2) $vol(\pi^{-1}(x_a), g_i|_{\pi^{-1}(x_a)}) = 1/i$ for all i, a

としてこのとき，g_i たちは $\pi^{-1}(x_a)$ を除いたところで，$\pi^{-1}(g_\infty)$ に収束する。（実は (X, g_i) は (X_∞, g_∞) に Hausdorff distance で収束している。ここでは Hausdorff distance については述べない。例えば Surveys in Geometry の "Gromov の幾何学" を参照）

この例をみる限り極限では，多様体の differentiable structure までが変わってしまっている。これは，Yang-Mills のときでも bundle の topological type がかわってしまうことから見れば当然と言えるだろう。

これについて私の今までに得た結果は，

(X_i, g_i) という Einstein 4-manifold の列を考えたときに，

それが 1) $diam(X_i, g_i)$ は上から bounded

2) $vol(X_i, g_i)$ は下からある正定数で bounded

3) X_i たちの Euler 数は bounded

をみたすならば，(X_i, g_i) の Hausdorff distance に関する収束先 (X_∞, d_∞) という距離空間が，有限個の点を除いてど

manifoldであって，さらにX_∞から有限コの点を上にEinstein計量g_∞が定義され，g_iたちは"ある意味で"g_∞に収束するというものである。

現在論文をまとめている段階なので詳しい内容については別の機会にゆずることにする。

References

[D1] S.K.Donaldson, An applicaton of gauge theory to 4-dimensional topology, J. Diff. Geom., 18 (1983), 279-315.

[D2] S.K.Donaldson, Infinite determinants, stable bundles and curvature, Duke Math. J. 54 (1987), 231-247.

[K1] S.Kobayashi, Differential geometry of holomorphic vector bundles, Math. Seminar Notes (by I.Enoki), 41 (1982), Univ. of Tokyo (in Japanese).

[K2] S.Kobayashi, Differential geometry of complex vector bundles, Publ. of Math. Soc. of Japan, 15 (1987), Iwanami Shoten.

[KT] R.Kobayashi and A.Todorov, Polarized period map for generalized K3 surfaces and the moduli of Einstein metrics, Tohoku Math. J., 39, 145-151 (1987).

[L] M.Lübke, Stability of Einstein-Hermitian vector bundles, Manuscripta Math., 42 (1983), 245-257.

[M] M.Maruyama, Moduli of stable sheaves I & II, J. Math. Kyoto Univ., 17 (1977), 91-126, and ibid., 18 (1978), 557-614.

[N1] H.Nakajima, Compactness of the moduli space of the Yang-Mills connections in higher dimensions, preprint.

[N2] H.Nakajima, Removable singularities for Yang-Mills connections in higher dimensions, to appear in J.Fac.Sci.Univ.Tokyo.

[N3] H.Nakajima, On the ends of the moduli space of Einstein-Hermitian connections and removable singularities theorem, preprint.

[OS] T.H.Otway and L.M.Sibner, Point singularities of coupled gauge fields with low energy, to appear in Comm. Math. Phys.

[Sc] R.Schoen, Analytic aspects of the harmonic map problem, Seminor on Nonlinear Partial Differential Equations, ed. S.S.Chern, Springer-Verlag, 1985, 321-358.

[Se] S.Sedlacek, A direct method for minimizing the Yang-Mills functiononal, Comm. Math. Phys., 86 (1982), 512-528.

[U1] K.Uhlenbeck, Removable singularities in Yang-Mills fields, Comm.Math.Phys., 83 (1982), 11-30.

[U2] K.Uhlenbeck, Connection with L^p-bounds on curvature, Comm. Math. Phys., 83 (1982), 31-42.

[UY] K.Uhlenbeck and S.T.Yau, On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles, Comm.Pure and Appl.Math., 39, Number S., (1986), 257-293.