

## 鉛直流体層の自然対流における攪乱の共鳴

UCLA 藤村 薫<sup>\*</sup> (Kaoru FUJIMURA)

### 1. はじめに

せん断流に加えられる 2 次元攪乱の 3 次元化と chaos 化の過程では、3 次元攪乱と元の 2 次元攪乱間におこる広い意味での共鳴が本質的役割を果たす。

平面 Poiseuille 流の場合、線形増幅波数帯は十分狭く、2 次元基本波として最大増幅モードを考へると、その分数調波及び高調波は一般に基本波の位相速度と全く異なる。位相速度をもち、減衰モードであるため、2 次元波間の共鳴は通常生じない（亜臨界領域における 1 次高調波共鳴は別として）ことが知られている。このことは、実験的にも、また数値実験的にも 2 次元攪乱は 2 次元不安定もしくは共鳴を通じて 3 次元化することに対応している。つまり、2 次元攪乱 (Tollmien-Schlichting 波) の次に 3 次元攪乱が顕著に現われず、2 次元攪乱同志の強い相互作用は生じない。

\* 厚研より出張中

他方, free shear layer では, 線形波は non-dispersive であるため, 分数調波共鳴又は高調波共鳴が一般に可能である。たとえて R.E. Kelly は 1967 年に, 基本波として線形中立擾乱を考之ると, 2次不安定として分数調波共鳴が生じることを示し, 実験的に得られる Vortex pairing の機構を明らかにした。(最近この解析を spatial mode に拡張した取り扱いが P.A. Monkewitz によって行われている。)つまり, この流れでは 2次元化に先立って基本波の高調波, 分数調波並びに分数調波の高調波が励起され, 2次元擾乱間のエネルギーバランスが確立された後, 3次元擾乱に対して不安定となるという遷移過程を経る。

ここでは同様の高調波共鳴の例として, 鉛直流体層における自然対流に加えられる擾乱の非線形相互作用を考之よう。異なる温度に保たれた無限の広さをもった2枚の平板が鉛直方向に平行に設置されている。その間に満たされた流体には2平板間の温度差によって駆動された自然対流が生じる。この自然対流に加えられる擾乱の線形及び弱非線形理論については, これまで数多くの研究が行われてきた(例之は, Mizushima & Gotoh, Bergholtz, Gotoh & Mizushima に挙げられた文献を参照されたい)。ところで最近, Nagata & Busse と Mizushima & Saito は, Prandtl 数  $P \rightarrow 0$  の極限で非線形擾乱

方程式を数値的に解いて非線形平衡解を求めると、線形増幅波数帯よりもすい分狭い（波数で約1/2）平衡解の帯が得られることを示した。この一見線形安定性と矛盾する非線形特性の原因が、基本波と高調波（いずれも定在波）間の非線形相互作用にあることが Fujimura & Mizushima によって明らかにされている。

他方、 $P \neq 0$  の場合には、定在波間の高調波共鳴のみならず、定在波と伝播波間にも高調波共鳴が生じることを示すのが本稿の目的である。実はこの流体系における定在波と伝播波間の相互作用はすでに Gotoh & Mizushima によって調べられているが、伝播波が非0の位相速度を有することから、定在波との間に共鳴が生じることはあり得ないと言われていた。その結果、定在波と伝播波の振幅を記述する方程式として、3次の非線形項をもった連立 Landau 方程式が導かれた。しかし、一般に伝播波として  $\pm y$  方向（座標系については次節参照）に同一位相速度ですい抜けてゆく一対の波が存在し、両者間の相互作用が定在波を励起することは可能である。ここでは、伝播波擾乱と定在波擾乱間の厳密な意味での共鳴に關する定式化を多重尺度法に基づいて行い、得られた2次の非線形項を有する連立振幅方程式の解の性質を調べる。

## 2. 問題の定式化

図1に示す異なる温度を有する2鉛直平板間の自然対流を考へよう。与えられた諸量を代表長さ  $L$ 、代表温度差  $\delta T$  ならびに代表速度  $\gamma g L^3 \delta T / \nu$  を用いて無次元化する。ここに  $\gamma$  は流体の熱膨張係数、 $g$  は重力加速度、 $\nu$  は動粘性率である。このとき Prandtl 数  $P = \nu / \kappa$ 、Grashof 数  $G = \gamma g L^3 \delta T / \nu^2$  という2つの無次元パラメータが現われる。ここに  $\kappa$  は温度伝導率である。

Boussinesq 近似の下に、無次元化された2次元の基礎方程式は流れ関数を用いて

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - J(\psi, \Delta \psi) - G^{-1} \Delta^2 \psi + G^{-1} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} - J(\psi, T) - (PG)^{-1} \Delta T = 0 \end{cases} \quad (1)$$

と書ける。ここに  $T$  は温度、 $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ 、 $J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$

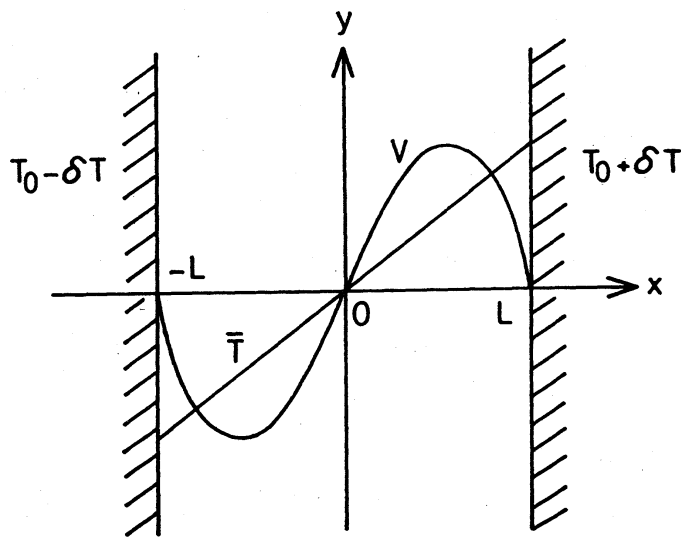


図1

である。境界条件は

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad T = \pm 1 \quad \text{at} \quad x = \pm 1 \quad (2)$$

で与えられる。\$y\$ に依存しない定常解は

$$V(x) = x(1-x^2)/6, \quad T(x) = x \quad (3)$$

のように求められる。流れ関数と温度を各々  $\psi = \bar{\psi}(x) + \hat{\psi}(x, y, t)$ ,  $T = \bar{T}(x) + \hat{T}(x, y, t)$  のように主流と擾乱の和で表わし、基礎方程式に代入する。そこから主流に対する式を引き去るとに  
より、非線形擾乱方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial t} + v \frac{\partial \Delta \hat{\psi}}{\partial y} - v'' \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} - G^{-1} \Delta^2 \hat{\psi} + G^{-1} \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} = J(\hat{\psi}, \Delta \hat{\psi}), \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + v \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} - (P_G)^{-1} \Delta \hat{T} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} = J(\hat{\psi}, \hat{T}) \end{cases} \quad (4)$$

が得られる。境界条件としては

$$\hat{\psi} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = \hat{T} = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm 1 \quad (5)$$

が課せられる。便宜上擾乱方程式を次の形にまとめておく。

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \frac{\partial \Delta}{\partial y} - v'' \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & v \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} - G^{-1} \begin{pmatrix} \Delta^2 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & P^{-1} \Delta \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{T} \end{pmatrix} \\ = N. \end{aligned} \quad (6)$$

## 3. 線形安定性

弱非線形を取り扱ふに入る前に線形安定論の結果を示して置く。

1-マルモード

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} e^{i\alpha(y-ct)} \quad (7)$$

を擾乱方程式に代入し、擾乱振幅について線形化することに  
より、次の連立ODE

$$\begin{cases} [i\alpha(V-c)S_1 - i\alpha V'' - G^{-1}S_1^2] \phi = -G^{-1}\theta' \\ [i\alpha(V-c)] \theta + i\alpha \phi = (PG)^{-1}S_1 \theta \end{cases} \quad (8)$$

を得る。境界条件は

$$\phi = \phi' = \theta = 0 \quad \text{at } x = \pm 1. \quad (9)$$

$T = T_1$ ,  $S_n \equiv d^2/dx^2 - n^2\alpha^2$  なる  $\phi$ ,  $\theta$  を Chebyshev 多項式で展開した後 collocation 法を用いることにより、 $(\alpha, G, P)$  に対する固有値  $c$  を数値的に求めた。

図2に示した4種類の  $P$ , 即ち 0, 12.7, 14.72525 及び 34.40 の場合の線形中立安定曲線である。この流れのよ  
うに空間的に反対称性をもつ主流場に関して、擾乱として  
Hermitian 対称性又は反 Hermitian 対称性をもつ定在波擾乱(位

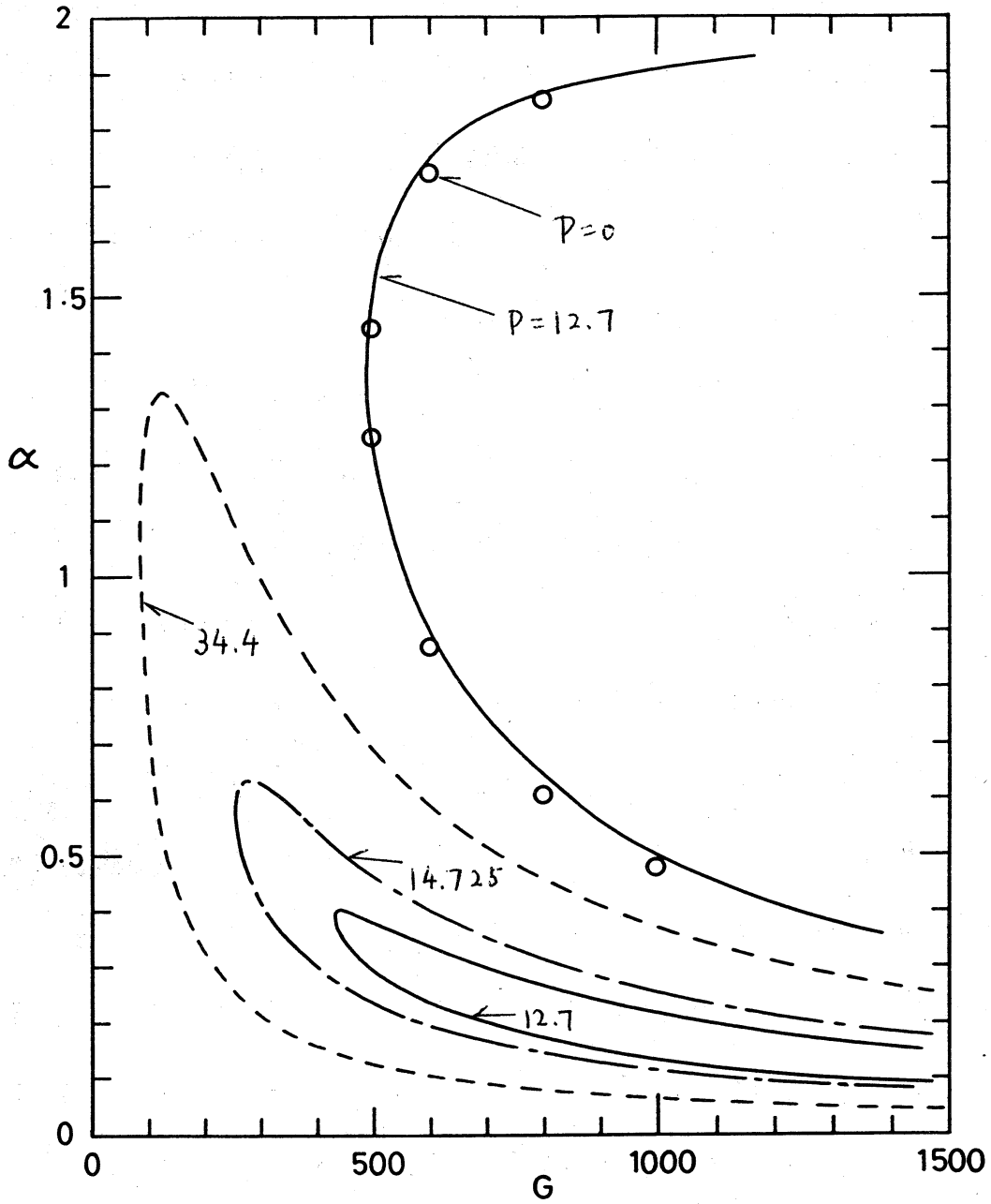


圖 2. 中立安定曲線

相速度  $c_r = 0$ ) と,  $\pm y$  方向に同一の位相速度 ( $c_r \neq 0$ ) であり、  
 ぬけてゆく伝播波擾乱の対の両者が可能であり, 後者は対称  
 性を有しない。さて, 図から明らかたように定在波擾乱に対  
 する中立曲線は  $P$  の変化に対してほとんど影響をうけない。  
 他方, 伝播波擾乱の線形増幅領域は  $P$  の増大と共に急速に拡  
 大することわかる。しかし, 伝播波擾乱の最大増幅波数は  
 $P$  の値にほとんど依存しない。

ここで選んだ 4 つの  $P$  の値は次のような意味をもつ。まず  
 $P = 0$  の場合, 擾乱方程式において温度擾乱が速度擾乱から  
 完全に分離でき, 問題は 3 次元数  $\alpha$  の速度分布をもつせん断流  
 の安定性に帰着される。  $P = 12.7$  は, 定在波擾乱に対する臨界  
 Grashof 数と伝播波のそれとが一致するといわれている値で  
 ある (たとえば Mizushima & Gotoh)。つまり,  $P < 12.7$  の場合  
 定在波擾乱が臨界条件を与えるが,  $P > 12.7$  では伝播波擾乱が  
 臨界条件を与える。次に  $P = 14.72525$  では,  $G = 1000$  における  
 伝播波擾乱の中立波数 (中立曲線の上分枝) が定在波擾乱の  
 中立波数 (下分枝) の丁度  $1/2$  となる。つまり  $P = 14.72525$  の場合, 波  
 数の上では定在波擾乱が伝播波擾乱の第 1 高調波となる。  
 最後に  $P = 34.40$  では定在波擾乱の臨界波数が伝播波擾乱  
 の中立波数 (上分枝) の 2 倍となっており, この場合も定在  
 波擾乱は伝播波擾乱の第 1 高調波に相当する。



#### 4. 定在波擾乱と伝播波擾乱間の高調波共鳴

波数  $\alpha_1$  及び複素位相速度  $c_1$  を有する波,  $\alpha_2$  と  $c_2$  を有する波及び  $\alpha_3$  と  $c_3$  を有する波の3波間に共鳴が生じるためには次の共鳴条件

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_3 c_3 = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 \quad (10)$$

が成立しなければならぬ。  $\alpha_1 = \alpha_2$  の場合のこの条件の成立は高調波共鳴を意味する。今,  $\alpha_1, \alpha_2$  という波数をもつ波として伝播波,  $\alpha_3$  を有するものとして定在波を選べば,  $\alpha_1 = \alpha_2, c_2 = i^{-1}(ic_1)^*$  の場合に共鳴条件は厳密に満足される。ただしこの場合伝播波としては  $\pm y$  方向にすいぬけてゆく波の両方を考えている。

通常高調波共鳴といふは, 基本波  $(\alpha, c)$  と  $(2\alpha, c)$  をもつ高調波の間に共鳴が成立し, その場合, 基本波振幅  $A_1$  と高調波振幅  $A_2$  の間には

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-12} A_1^* A_2 + O(A^3) \\ \frac{dA_2}{dt} = \lambda_2 A_2 + \lambda_{11} A_1^2 + O(A^3) \end{cases} \quad (11)$$

の形の連立方程式が成立する。この種の共鳴は, 今の問題の場合, Fujimura & Mizushima が示したように任意の  $P$  の値に對する定在波において生じ得る。その結果, 基本波の成長は

抑制され、非線形中立波の台は線形増幅波数帯の約  $1/2$  にまで縮小されてしまう。

ここで、基本波として  $(\alpha, +c_r)$  ;  $(\alpha, -c_r)$  という 2 つの伝播波を考えている。その際、1 高調波として  $(2\alpha, +2c_r)$ ,  $(2\alpha, -2c_r)$  及び  $(2\alpha, 0)$  という 3 種類の波が可能であるが、前の 2 波は互いに  $\pm y$  方向に位相速度  $2c_r$  で通りぬけてゆくため定在波との間には 2 次の相互作用を行うことは無い。他方最後の波  $(2\alpha, 0)$  は伝播波が位相速度 0 の定在波を 2 次の項として作り出すという意味で、伝播波によって作り出された 0 次高調波 (主流の変形) 的役割を演じている。

## 5. 弱非線形理論

以下では  $P=14.72525$ ,  $G=1000$  及び  $P=34.40$ ,  $G=488.5892$  の場合を考えよう。前者の中立波数は  $\alpha_1=0.251859$ , 後者のそれは  $\alpha_1=0.69915$  である。さて、 $G_0$  としてこれらの  $G$  の値を定義すると、線形中立性からのそれは  $\varepsilon \equiv G_0^{-1} - G^{-1} (\ll 1)$  で表わされる。ここで  $O(1)$  の時間スケール  $t$  に対して  $t_n \equiv \varepsilon^n t_n$  という多産尺度を導入すると擾乱方程式は

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \dots \right) M + L - G_0^{-1} S^2 \right] \Phi = N \quad (12)$$

と書ける。ただし

$$M = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \hat{\Psi} \\ \hat{T} \end{pmatrix}.$$

さて,  $E_1 = e^{i\alpha(x-c_1t)}$ ,  $E_2 = e^{i\alpha(x-c_2t)}$ ,  $E_3 = e^{2i\alpha(x-c_3t)}$   
 $\alpha c_1 + \alpha c_2 = 2\alpha c_3$  により,  $E_1, E_2, E_3$  を定義し,  $\Phi$  を

$$\begin{aligned} \Phi = & E_1 [\varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_{-23} + \varepsilon^3 (\Phi_{-111} + \Phi_{-221} + \Phi_{-331}) + \dots] \\ & + E_2 [\varepsilon \Phi_2 + \varepsilon^2 \Phi_{-13} + \varepsilon^3 (\Phi_{-112} + \Phi_{-222} + \Phi_{-332}) + \dots] \\ & + E_3 [\varepsilon \Phi_3 + \varepsilon^2 \Phi_{12} + \varepsilon^3 (\Phi_{-113} + \Phi_{-223} + \Phi_{-333}) + \dots] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

の形に展開すれば, 以下の系列の方程式を得る ( $\varepsilon = \varepsilon$ , 3  
波は同一オメガ  $\sim \varepsilon$  の振幅を有すると仮定している)。

$$\begin{aligned} \varepsilon E_1: & [-i\alpha c_1 \tilde{M}_1 + \tilde{L}_1 - G_0 \tilde{S}_1^2] \Phi_1 = 0, & \Phi_1 = A_1(t_1, t_2, \dots) \phi_1(x), \\ \varepsilon E_2: & [-i\alpha c_2 \tilde{M}_1 + \tilde{L}_1 - G_0 \tilde{S}_1^2] \Phi_2 = 0, & \Phi_2 = A_2(t_1, t_2, \dots) \phi_2(x), \\ \varepsilon E_3: & [-2i\alpha c_3 \tilde{M}_2 + \tilde{L}_2 - G_0 \tilde{S}_2^2] \Phi_3 = 0, & \Phi_3 = A_3(t_1, t_2, \dots) \phi_3(x). \end{aligned} \quad (14)$$

これらの式は先に求めた線形方程式に他ならない。次に  $\varepsilon^2$  の  
相互作用から

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 E_1: & [-i\alpha c_1 \tilde{M}_1 + \tilde{L}_1 - G_0 \tilde{S}_1^2] \Phi_{-23} = -A_1 \tilde{S}_1^2 \phi_1 - \frac{\partial A_1}{\partial t_1} \tilde{M}_1 \phi_1 + N_{-23} A_2^* A_3, \\ \varepsilon^2 E_2: & [-i\alpha c_2 \tilde{M}_1 + \tilde{L}_1 - G_0 \tilde{S}_1^2] \Phi_{-13} = -A_2 \tilde{S}_1^2 \phi_2 - \frac{\partial A_2}{\partial t_1} \tilde{M}_1 \phi_2 + N_{-13} A_1^* A_3, \\ \varepsilon^2 E_3: & [-2i\alpha c_3 \tilde{M}_2 + \tilde{L}_2 - G_0 \tilde{S}_2^2] \Phi_{12} = -A_3 \tilde{S}_2^2 \phi_3 - \frac{\partial A_3}{\partial t_1} \tilde{M}_2 \phi_3 + N_{12} A_1 A_2 \end{aligned} \quad (15)$$

を得る。  $O(\varepsilon^2)$  の 3 式の solvability condition として、  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  の時間発展を記述する共鳴方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial t_1} = -\langle \tilde{S}_1^2 \phi_1 \rangle_1 A_1 + \langle N_{-23} \rangle_1 A_2^* A_3 \equiv \lambda_1 A_1 + \lambda_{-23} A_2^* A_3, \\ \frac{\partial A_2}{\partial t_1} = -\langle \tilde{S}_1^2 \phi_2 \rangle_2 A_2 + \langle N_{-13} \rangle_2 A_1^* A_3 \equiv \lambda_2 A_2 + \lambda_{-13} A_1^* A_3, \\ \frac{\partial A_3}{\partial t_1} = -\langle \tilde{S}_2^2 \phi_3 \rangle_3 A_3 + \langle N_{12} \rangle_3 A_1 A_2 \equiv \lambda_3 A_3 + \lambda_{12} A_1 A_2 \end{cases} \quad (16)$$

が得られる。  $T = T = 1$

$$\langle Q \rangle_n \equiv \frac{\int_{-1}^1 \tilde{\Phi}_n Q dx}{\int_{-1}^1 \tilde{\Phi}_n S_m \phi_n dx} \quad (m=1 \text{ for } n=1, 2 \text{ and } m=2 \text{ otherwise})$$

Adjoint 関数  $\tilde{\Phi}_n(x)$

$$\begin{cases} [in\alpha(U-c)S_n + 2in\alpha U''D - G^{-1}S_n^2] \tilde{\Phi}_n = -in\alpha D \bar{T} \tilde{\Theta}_n, \\ [in\alpha(U-c) - (PG)^{-1}S_n] \tilde{\Theta}_n = G^{-1}D \tilde{\Phi}_n \end{cases} \quad (17)$$

で与えられる。ここで与えられる式を再び Chebyshev 多項式展開を用いて数值的に解くことにより、連立振幅方程式の係数を求めた。

$$P=14.72525, \alpha=0.251859, G_0=1000 \quad P=34.4, \alpha=0.69915, G_0=488.5892$$

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -6.12187 \times 10^{-1} + 3.86939 \times 10^{-1}i & \lambda_1 = -6.66396 \times 10^{-1} + 7.15370 \times 10^{-1}i \\ \lambda_2 = -6.12187 \times 10^{-1} - 3.86939 \times 10^{-1}i & \lambda_2 = -6.66396 \times 10^{-1} - 7.15370 \times 10^{-1}i \\ \lambda_3 = 1.38175 \times 10^{+1} & \lambda_3 = 1.05922 \times 10^{+1} \\ \lambda_{-23} = -1.87882 \times 10^{-1} + 2.45053 \times 10^{-2}i & \lambda_{-23} = -3.03095 \times 10^{-1} + 3.66584 \times 10^{-2}i \\ \lambda_{-13} = -1.87882 \times 10^{-1} - 2.45053 \times 10^{-2}i & \lambda_{-13} = -3.03095 \times 10^{-1} - 3.66584 \times 10^{-2}i \\ \lambda_{12} = -3.81576 \times 10^{-2} & \lambda_{12} = -1.07950 \times 10^{-2} \end{array}$$

$A_1 = a_1 e^{i\theta_1}$ ,  $A_2 = a_2 e^{i\theta_2}$ ,  $A_3 = a_3 e^{i\theta_3}$  ( $a_1, a_2, a_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$  は  $t_1$  の実関数) とおき  $\Theta \equiv \theta_1 + \theta_2 - \theta_3$  (非線形性による共振条件から位相のずれ) とすると, 連立振幅方程式は次の 4 式に帰着される:

$$\begin{cases}
 \dot{a}_1 = \lambda_{1r} a_1 + [\lambda_{-23r} \cos \Theta + \lambda_{-23i} \sin \Theta] a_2 a_3, \\
 \dot{a}_2 = \lambda_{2r} a_2 + [\lambda_{-13r} \cos \Theta + \lambda_{-13i} \sin \Theta] a_1 a_3, \\
 \dot{a}_3 = \lambda_3 a_3 + \lambda_{12} a_1 a_2 \cos \Theta, \\
 \dot{\Theta} = a_1^{-1} a_2 a_3 [\lambda_{-23i} \cos \Theta - \lambda_{-23r} \sin \Theta] \\
 \quad + a_2^{-1} a_1 a_3 [\lambda_{-13i} \cos \Theta - \lambda_{-13r} \sin \Theta] \\
 \quad - a_1 a_2 a_3^{-1} \lambda_{12} \sin \Theta.
 \end{cases} \quad (18)$$

ここで detuning  $\Theta \equiv 0$ ,  $a_1 = a_2$  という状況を考えよう。(  $\theta_3$  は定在波の位相であるので 0 としてよい。また  $a_1 = a_2$  では  $\theta_1 \approx \theta_2$  が期待されるので, この仮定は現実的である。) このとき  $a_1, a_2, a_3$  の時間発展は定性的に下図のよう描くことができる。

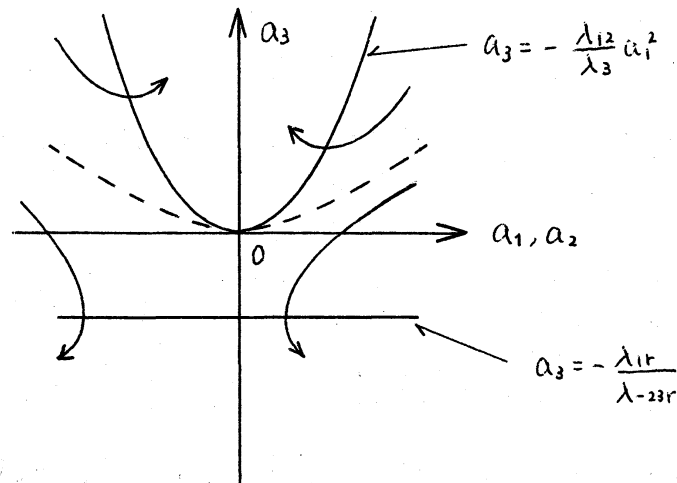


図 3

$\varepsilon > 0$  ( $G > G_0$ ) の条件は、定在波擾乱にと、ては超臨界、位播波擾乱にと、ては亜臨界状態に相当する (図2 参照)。従って線形理論によれば、 $a_3$  は指数関数的に増幅、 $a_1, a_2$  は減衰するはずである。非線形相互作用がこの特性を著しく変えるのは、図3の破綻より下の初期条件から出発した場合である。その時位播波は定在波からエネルギーを受けて十分大きくなるとして  $\pm\infty$  に発散する。  $P \rightarrow 0$  の定在波擾乱同志の高調波共鳴の場合、線形増幅擾乱である基本波の成長が高調波によ、て抑制された現象と著しい対照をなしている。

ここで解析に3次の非線形相互作用を含めると、振幅の発散は抑制され、有限の平衡振幅に漸近するこゝが予想される。その際、連立方程式の係数は現在計算中であるが、共鳴現象で重要なものは最低次の非線形性の寄与であるので、こゝで得られた2次の連立方程式は問題としている定在波と位播波間の共鳴の本質的部分を記述していると考えて差し支えない。

最後に具体的係数の値に基づく数値計算例を示そう。用いた係数は  $P = 14.72525$  の場合のものである。図4は初期条件  $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 0.002)$  の下に連立方程式を Runge-Kutta 法を用いて数値積分したものである。この図によると  $a_1, a_2$  は初期に減衰するもののその後増幅して発散し、 $a_3$

图4. 初期条件:

$$(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 0.002)$$

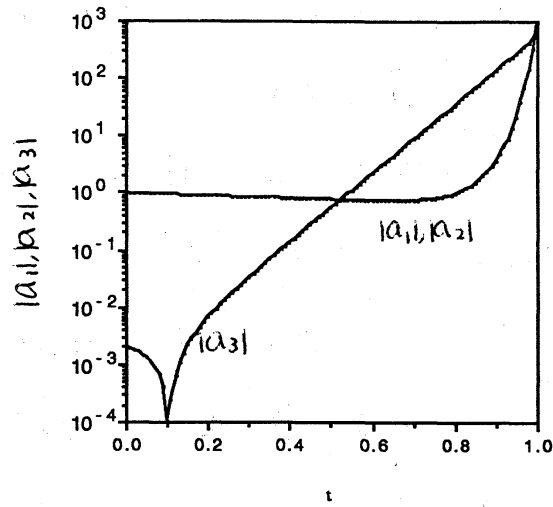


图5. 初期条件:

$$(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 0.003)$$

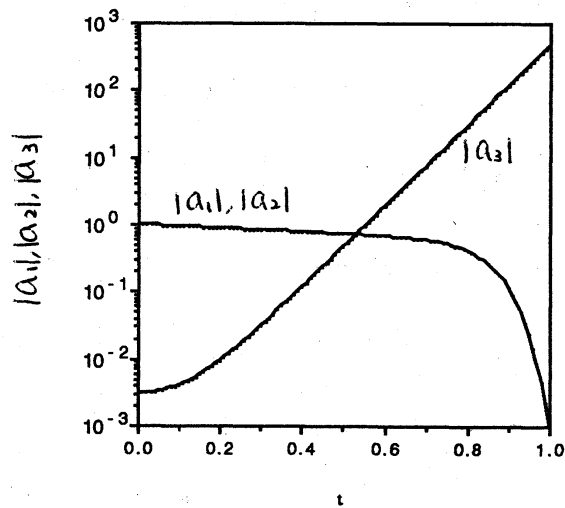
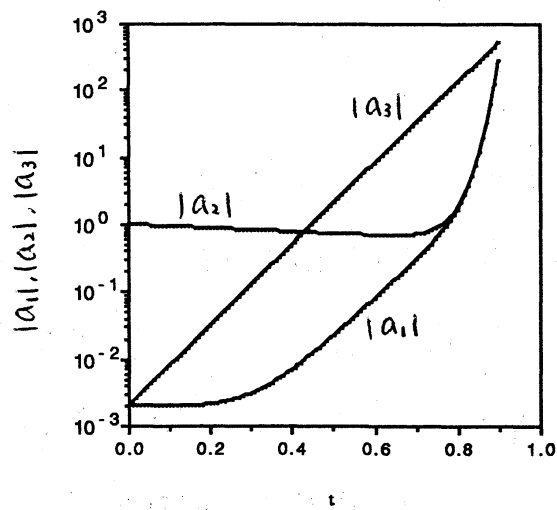


图6. 初期条件:

$$(a_1, a_2, a_3) = (-0.002, 1, 0.002)$$



は符号を変えて発散する。→すなわちこの初期条件は図3の破線より下位置していることとなる。逆に破線より上の初期条件から出発したものが図5である。この場合初期条件として  $(1, 1, 0.003)$  が選ばれているが、 $a_1, a_2$  は単調に減衰して消滅し、 $a_3$  は単調増加の後に発散する。このように、実際の  $a_1, a_2, a_3$  の時間発展は図3の定性的挙動と完全に首尾一致している。

さて、同図から予想できているのは  $a_1 \neq a_2$  の場合である。その例として、 $(a_1, a_2, a_3) = (-0.002, 1, 0.002)$  から出発した場合の結果を図6に示す。この条件下では  $a_1$  と  $a_2$  は異符号同一絶対値をもつに到り、 $t \rightarrow \infty$  で発散し、他方  $a_3$  は全く単調に増大する。ところで、これらの図における  $a_3$  の  $t$  の比較的大きい場合の振舞いはほとんど線形増幅と異ならない。このことは  $\lambda_{12}$  が  $\lambda_3$  と比較して  $10^{-3}$  程度であることを反映している。

## 6. まとめ

ここでは鉛直流体層における自然対流に加えられた定在波擾乱と伝播波擾乱の間に非線形共鳴(高調波共鳴)が厳密に生じ得ることを示し、解の定性的振舞いを調べた。この共鳴が、たとえは非線形平衡状態にどのような影響を及ぼすの



かは今後の課題である。

研究会では、 $P \rightarrow 0$  の場合に生じる共鳴(定在波間)が  $C_i \neq 0$  においても可能であることを強調した。このことは、たとえは free shear layer における分数調波共鳴が非線形擾乱に対しても可能であることを示している。(実験的に得られる Vortex pairing は最大増幅モードに対して生じているのに対し、§1 で与えた Kelly や Monkewitz の解析は線形中立波近傍に適用限界が限られていた。) また、 $P \rightarrow 0$  の場合に変調の影響を調べた。初期条件として sech 型の包絡線をもつ基本波と第 1 高調波(定在波)を考えると、 $t \rightarrow \infty$  と共に、基本波の包絡線の中心はくびれて 0 に漸近し、くびれた部分及びその両側にある山の部分は  $\pm y$  方向へ伝播してゆく。他方、高調波の包絡線は単調にその振幅を増し、台は  $\pm y$  方向に拡大してゆくことがわかった。さらに、単一モードに対する多重尺度法に基づいた弱非線形理論が、振幅展開による理論と線形増幅率の小さい場合完全に等価であることを、与る Landau 定数で数値計算することにより示したが、この等価性は直接形式展開を行うことによっても示すことができる。以上の事柄は紙面の都合上全て省略した。

最後に、定在波擾乱と伝播波擾乱間の共鳴の解析は R.E. Kelly 教授との議論が動機となっていることを記しておきたい。

*References*

- R.F.Bergholz : J.Fluid Mech. **84** (1978) 743  
K.Fujimura and J.Mizushima : Nonlinear Wave Interactions in Fluids, Ed. by  
R.W.Miksad, T.R.Akylas and T.Herbert (ASME,1987,AMD-Vol.87) ) 123  
K.Gotoh and J.Mizushima : Turbulence and Chaotic Phenomean in Fluids, Ed.by  
T.Tatsumi (North-Holland, 1984) 47  
R.E.Kelly : J.Fluid Mech. **27** (1967) 657  
J.Mizushima and K.Gotoh : J.Fluid Mech. **73** (1976) 65  
P.A.Monkewitz : J.Fluid Mech. **188** (1988) 223