数理解析研究所講究録
第666巻 1988年 91-100

辞書式順序で最初の極大部分グラフを計算する問題の P完全性とNCアルゴリズム

九州大学理学部基礎情報学研究施設

宮野　悟 (Satoru Miyano)

1．序。P≠NCと予想されているが，このことを信じるならば，ある問題がP完全であることの証明は，その問題が効率よくは並列化できないことの（数学的意味ではないが）証明を与えるものである。自然なP完全な問題は，[C1]で初めて報告され，その後いくつかのP完全な問題が見つかっている[AnM1, AnM2, AvM1, AvM2, C2, DLR, DKM, Go, GSS, JL, Ka, La, LW, Lu, Mi1, Mi3, P1, Re, UG, YD, Yas]。しかしその数はあまり多くはない。その理由はおそらくP完全性の意義についてあまり理解されていなかったからであろう。並列計算量が意識されていなかった初期のころでは，P完全な問題は，多項式時間で解くことができるが，$O((\log n)^k)$程度の領域では解くことができないという意義があった（kは定数）。もちろん，$P \neq DSPACE((\log n)^k)$を仮定してである。このことは，それ自身大切なことであるが，並列計算量が重要さを増してきている現在，P完全性は以前とは別の意味で再び注目されている。

辞書式順序で最初の独立集合を計算する問題（LFMIS）はCook[C2]によりP完全であることが示され，またそれに類似の問題も議論され[AnM1, AnM2, Lu, Mi1, Mi2, Mi3, Re]，いくつかの問題のP完全性が証明されている。この論文では，NP完全性についての[LY, Yan]の結果のようなさらに一般的なP完全性定理を証明する。

グラフの性質πは，グラフGがπを満たす限り，Gのどの部分グラフもπを満たすとき，遺伝的であるという。性質πを満たす辞書式順序で最初の極大部分グラフを求める問題（the lexicographically first maximal subgraph problem for π，略してLFMSP(π)）とは，次の様な問題である。

Instance: グラフ$G=(V, E)$。ただし$V=\{1, ..., n\}$。
Problem: 性質πを満たすGの部分グラフをinduceする辞書式順序で最初のVの極大部分集合Uを計算すること。

性質πが遺伝的で，多項式時間でその性質をもつかどうかをテストできれば，簡単な逐次アルゴリズムでLFMSP(π)を多項式時間で計算できる。この論文では，多項式時間でテスト可能で自明でない遺伝的などんな性質πに対しても，LFMSP(π)がP完全となることを証明する（定理5，6，7）。

多くの自然な遺伝的性質に対して，LFMSP(π)はグラフの次数を3に制限してもP完全で

ある（表3）。例えば，「サイクルをもたない」，「2部グラフ」，「平面グラフ」などがそうである。しかし例外がある。π_4を「4サイクルをもたない」という性質とするとき，LFMSP(π_4)は次数4のグラフに対しては，P完全であるが，次数3のグラフに対しては，LFMSP(π_4)はNC^{2}にはいることを証明できる（表1）。また，辺の集合に線形順序が入っているとき，頂点のかわりに，辺の集合からinduceされる極大部分グラフを計算することが問題となる。この場合，例えば，辞書式順序で最初の辺の集合からinduceされる極大2部グラフを計算すること（Edge-Induced LFMSP(bipartite)）は，NC^{2}でできる（表2）。頂点の集合の場合，この問題はP完全である。また，π_3を「3サイクルをもたない」という性質とするとき，Edge-Induced LFMSP(π_3)は次数が4のグラフに対してNC^{2}アルゴリズムを持つが（表2），次数が6以上のグラフに対してはP完全となる（表4）。詳細については[Mi1]を見られたい。

2．遺伝的性質とP完全性

定義1．回路とは，列$B=(B_1,...,B_n)$とする。ただし，各B_iは次の(i)-(iv)のうちのどれかである。

(i)　$B_i=t$ または $B_i=f$。　(ii) $B_i=\neg B_j$　$(j<i)$。

(iii) $B_i=B_j \vee B_k$ $(j,k<i)$。　(iv) $B_i=B_j \wedge B_k$ $(j,k<i)$。

論理回路値問題（CVP）とは，各$i=1,...,n$に対して，値value(B_i)を計算する問題である。集合$S\subseteq\{t,f,\neg,\vee,\wedge\}$に対して，Sに属する演算のみを許されたCVPをCVP[S]と記述する。

補題1[La]．CVP[$t,f,\vee,\wedge$]はP完全である。

補題2[Go]．CVP[$t,\neg,\wedge$]は出次数が2の平面回路に制限してもP完全である。

補題3．(1) LFMISは次数が高々3の2部グラフに制限しても，P完全である。

(2) LFMISは次数が高々3の平面グラフに制限しても，P完全である。

補題4．辞書式順序で最初の次数が高々1の極大部分グラフを計算する問題（LFMSP(max degree 1)）は，次数が高々3の平面2部グラフに制限しても，P完全である。

[LY],[Y]で使われている用語を準備する。Hを連結グラフとする。頂点cは，Hからcを取り除くとグラフを二つ以上の連結成分にわけるとき，関節点とよばれる。そして，その連結成分とcとを結ぶ辺を加えて得られる連結部分グラフを，Hのcについての連結成分という。

連結グラフHのα列を定義する。もしHが2連結でないならば，cをHの関節点とし$H_1,...,H_{i(c)}$を，Hのcについての連結成分とし，$\alpha_{c,H}=(|H_1|,...,|H_{i(c)}|)$と定義する。ただし，$|H_i|$はグラフ$H_i$の頂点の個数で$|H_1|\geq...\geq|H_{i(c)}|$とする。このとき，グラフHの$\alpha$列（$\alpha_H$と記述される）は，$\alpha_H=\min\{\alpha_{c,H} \mid c\text{はHの関節点}\}$と定義される。ここで，minは正整数のソートされたリスト上での辞書式順序についての minimumである。Hが2連結のときは，$\alpha_H=(|H|)$とする。頂点c_Hは，$\alpha_H=\alpha_{c_H,H}$となる任意のHの頂点とする。必ずしも連結でないグラフGに対して，$G_1,...,G_t$をその連結成分とするとき，列（$\alpha_{G_1},...,\alpha_{G_t}$）をGの

<u>β列</u>（β_Hと記述される）とよぶ。ただし，$\alpha_{G1} \geq \ldots \geq \alpha_{Gt}$のようにソートされているとする。

完全２部グラフ$K_{1,n}$を<u>nスター</u>，そして，nスターとmスターの中心を辺で結んでできるグラフを<u>(m,n)ダブルスター</u>と呼ぶ。Dをあるグラフの族とする。<u>独立辺集合</u>とは，互いに端点を共有しない辺から構成されるグラフとする。グラフの性質πは，Dに属する無限に多くのグラフがπを満たし，少なくとも一つのDのグラフがπを満たさないとき，<u>自明でない</u>という。

Vの二つの部分集合V_1, V_2は，どの$u \in V_1, v \in V_2$に対しても，$u \langle v$が成立するとき，$V_1 \langle V_2$と書かれる。

定理５．πは次の性質を満たすとする。
(i)　平面２部グラフの上で自明でない。(ii)　遺伝的である。
(iii) 任意の独立辺集合を満たす。
(iv)　多項式時間でテスト可能である。
このとき，LFMSP(π)は，平面２部グラフに制限しても，P完全である。

証明．πは自明でないので，$\beta_J = \min\{\beta_G \mid G$は$\pi$を満たさない平面２部グラフ$\}$となる平面２部グラフＪがある。$J_1, \ldots, J_t$をJの連結成分とする。ただし，$\alpha_{J1} \geq \ldots \geq \alpha_{Jt}$とする。即ち，Jの$\beta$列は，$(\alpha_{J1}, \ldots, \alpha_{Jt})$となる。$c=c_J$とし，$I_0$をcについての$J_1$の連結成分で最大のものとする（図１(a)斜線部分）。(ii)と(iii)より，任意の独立集合はπを満たす。よってI_0は少なくとも一つの辺を含んでいる。

１．I_0がただ一つの辺からなるグラフではないとき：　補題３(1)の結果から，平面グラフに制限されたLFMISからのリダクションを行う。グラフI_0は，二つ以上の辺をもつ連結な平面２部グラフであるので，cとは異なる頂点dで，cとdとの距離は偶数でかつこの二つの頂点はJの平面レイアウトにおいて同一面にあるものがある。I_1をJ_1からc以外のI_0を取り除いてできるグラフとしよう。

平面グラフ$G=(V,E)$に対して，$G'=(V',E')$を次のように定義する（図１(b),(c)）。各Gの頂点uにI_1のコピーを，cとuを同一視して張り付ける。次に，各辺$\{u,v\} \in E$を，今度はI_0のコピーの頂点c,dとu,vをそれぞれ同一視して置き換える。G'はこのようにしてできたグラフに$J_2, \ldots, J_t$を付け加えたものである。頂点dの選び方により，G'は平面２部グラフであることがわかる。さらに，グラフJの定義により，任意のGの独立集合Uに対して，集合$(V'-V) \cup U$からinduceされるグラフのβ列はβ_Jよりも小さい。また，各辺$\{u,v\} \in E$に対して，$(V'-V) \cup \{u,v\}$からinduceされるグラフはπを満たさない。このことから，V'上には$V'-V \langle V$を満たすように線形順序が定義されるものとする。V上の順序はGに与えられている順序とする。この順序のもとでは，まずV'-Vのすべての頂点がとられ，その後，Gの辞書式順序で最初の独立集合に対応するG'の頂点が選ばれる。このように，πを満たす部分グラフをinduceする辞書式順序で最初の極大な頂点の集合U'は，$U'=(V'-V) \cup U_0$となる。ただし，U_0はGの辞書式順序で最初の独立集合である。

２．I_0がただ一つの辺からなるグラフのとき：　平面２部グラフに制限されたLFMSP(max degree 1)からのリダクションを与える（補題４）。I_0は，単に一つの辺

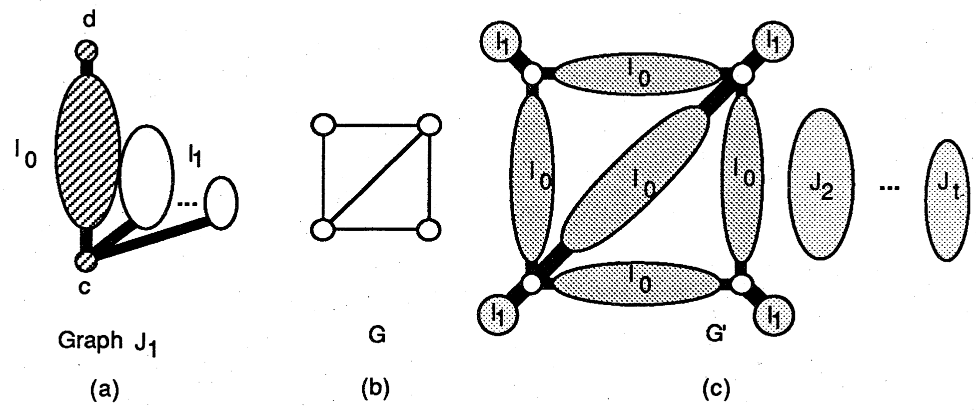

図１.

であるので，J_1は，スターである。したがって，$J_2, ..., J_t$もスターである。J_1が r個の辺をもっているとしよう。任意の独立辺集合はπを満たすので，$r \geq 2$である。定義より，任意有限個の(r-1)スターと$J_2, ..., J_t$からなるグラフのβ列はβ_Jよりも小さい。よって，そのグラフはπを満たす。このことから，次の二つのことをみたす整数q, k, pが存在することがわかる。

(1) 任意有限個の(r-2, q-1)ダブルスターとk-1個の(r-2, q)ダブルスターと$J_2, ..., J_t$から構成されるグラフはπを満たす。

(2) p個の(r-2, q-1)ダブルスターとk個の(r-2, q)ダブルスターと$J_2, ..., J_t$から構成されるグラフはπを満たさない。

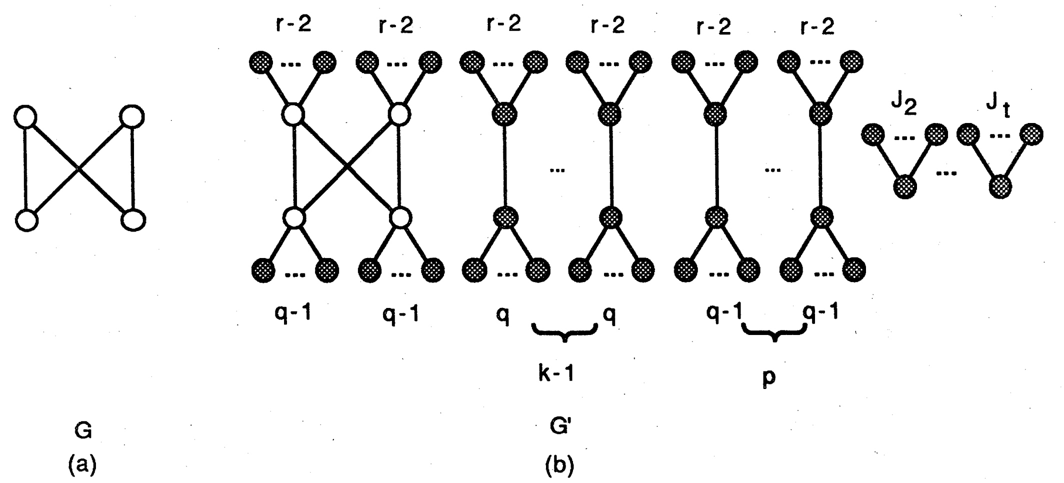

図２.

平面２部グラフG=(V, E)をとる。ここで，VはV=N∪Mのように分割されているとする。このとき，グラフG'=(V', E')を次のように構成する（図２）。Nの各頂点uに対して，(r-2)スターのコピーを，uとその中心を同一視して張り付ける。同様に，Mの各頂点uに対して，(q-1)スターのコピーを，uとその中心を同一視して張り付ける。次に，$J_2, ..., J_t$とk-1個の(r-2, q)ダブルスターとp個の(r-2, q-1)ダブルスターを付け加える。明らかに，このグラフ

は平面２部グラフである。V'上の順序はV'-V<Vをみたし，V上ではGでの順序に従う。(1)と遺伝性により，V'-Vの全ての頂点は選ばれる。次に，Vの頂点について考える。Vの頂点uの選択を決定するとしよう。もしuが高々一つのすでに選択されたVの頂点に隣接しているならば，(1)によりuを取ることができる。しかし，uが二つ以上のすでに選択されたVの頂点に隣接しているときは，uを取ることはできないことを示そう。もしuが(q-1)スターの中心ならば，uを取ると，k個の(r-2,q)ダブルスターができることになる。(2)より，これはπを満たさなくなる。uが(r-2)スターの中心ならば，rスターを作り出すことになる。グラフJの選び方により，uを加えるとπを満たさなくなる。このように，Uを次数が１のグラフをinduceする辞書式順序で最初の極大部分集合とするとき，πを満たす部分グラフをinduceするような辞書式順序で最初の頂点の部分集合U'は，U'=(V'-V)∪Uとなる。

以上の議論により，LFMSP(π)がＰ完全となることがわかる。□

次の二つの定理の証明は略する。

定理６．πを多項式時間でテスト可能な（２部グラフ上で，平面グラフ上で）自明でない遺伝的性質とする。このとき，LFMSP(π)は，（２部グラフに制限しても，平面グラフに制限しても）Ｐ完全である。

定理７．πを多項式時間でテスト可能な有向グラフ上で自明でない遺伝的性質とする。このとき，LFMSP(π)は，Ｐ完全である。

３．ＮＣ^{2}の問題

この節では，二つのトピックを扱う。まず，表１に書かれている辞書式順序で最初の長さkのサイクルをもたない極大部分グラフを計算する問題（LFMSP(k-cycle free)）がＮＣ^{2}にはいることを示す。次に，表２の，辞書式順序で最初の辺から induceされる極大部分グラフを計算する問題（Edge-Induced LFMSP(π)）もＮＣ^{2}にはいることを示す。

性質	次数
３サイクル無し	３
４サイクル無し	３

LFMSP(k-cycle free)∈NC^2

表１．

性質	グラフの制限
サイクル無し	無し
２部グラフ	無し
３サイクル無し	次数４
４サイクル無し	次数３

Edge-Induced LFMSP(π)∈NC^2

表２．

補題８．次数２のグラフに制限したLFMISはＮＣ^{2}にはいる。

定理９．次数３のグラフに対して，４サイクルをもたない辞書式順序で最初の極大部分グラフをＮＣ²で計算できる（LFMSP(4-cycle free) $\in$ NC²）。

証明．$G=(V,E)$を次数が高々３のグラフとする。Gの４サイクルの連接を解析するために，次のように定義されるグラフ$G^+=(V^+,E^+)$を考える。

$V^+=\{C : C\subseteq V, |C|=4,$ Cのinduceする部分グラフは４サイクルを含む$\}$,

$E^+=\{\{C,D\} : C\cap D\neq\phi\}$。

グラフの連結成分の計算はＮＣ²でできるので，G^+の各連結成分について，辞書式順序で最初の４サイクルをもたない極大部分グラフをＮＣ²で計算できることを示せばよい。CをGの４サイクルとしよう。図２の(1a)-(6a)（(2e)を除く）に，Cの近傍がG^+における次数（これを$\deg^+(C)$と記述する）によって分類されている。ただし，黒く塗られている頂点はサイクルC上の頂点を表し，不必要な辺は除かれている。グラフの次数が３であることを考慮すると，(3a),(4a)-(6a)の場合には，辺および頂点を付加しても，白い頂点を共有するが黒い頂点は含まないような４サイクルは存在しない。(3b)の場合では，ただ一つそのような可能性があるが，それは(4b)に表されている。このように，$\deg^+(C)\geqq 3$となる４サイクルについては，グラフG^+のCを含む連結成分から得られるGの部分グラフは，(3a)から(6a)までの６つのタイプのどれかとなることがわかる。$\deg^+(C)=2$の場合，(2a)から(2d)の４つのタイプがある。(2a)と(2d)の場合には，白い頂点を含むがサイクルCには触れないような４サイクルは存在しない。(2b)の場合には，その可能性がただ一つあるが，それは(2d)の場合である。$\deg^+(C)=1$のときは，(1a)しかない。$\deg^+(C)=0$場合は自明である。

以上のことから，(1a)と(2c)の場合を除いて，その４サイクルを含むG^+における連結成分の大きさは，限定サイズであることがわかる。従って，対応するGの部分グラフについて，辞書式順序で最初の４サイクルをもたない極大部分グラフを計算することはＮＣ²でできる。そこで，(1a)と(2c)の場合を考える。これらの場合，G^+の連結成分に対応するGの部分グラフは，いくらでも大きくなり得る。しかし，それは(2e)の形をしている。ただし，$t\geqq 4$で(1a)の場合は除かれている。さらに，(2e)は，$t\geqq 5$のとき，辺$\{a_1,a_t\}$, $\{b_1,b_t\}$が付け加えられ，$t\geqq 4$のとき，辺$\{a_1,b_t\}$, $\{b_1,a_t\}$が付け加えられている場合も表しているとする。(2e)の形のグラフに対しては，辞書式順序で最初の４サイクルをもたない極大部分グラフをＮＣ²で計算できることを示そう。まず，頂点a_iとb_i $(i=1,...,t)$を考えよう。頂点a_iを含む４サイクルは頂点b_iを含み，また逆も成立するので，$t\geqq 5$のとき，a_iとb_iのうち，順序の小さいほうはつねに選ぶことができる。そこで次のように定義される次数が高々２のグラフ　$G'=(V',E')$を考える。

$V'=\{c_i : c_i=\max\{a_i,b_i\}, i=1,...,t\}$,

$E'=\{\{c_i,c_{i+1}\} :$ c_iとc_{i+1}は同じ４サイクル上にある。ただし，$c_{t+1}=c_1\}$。

U'をG'の辞書式順序で最初の独立集合とする。$W'=\{\min\{a_i,b_i\}:i=1,...,t\}$とする。このとき，集合$U'\cup W'$が求める頂点の集合となることがわかる。補題８より，U'をＮＣ²で計算できる。このようにして，G^+の各連結成分に対して，求めるべき辞書式順序で最初の頂点の集合をＮＣ²で計算できる。□

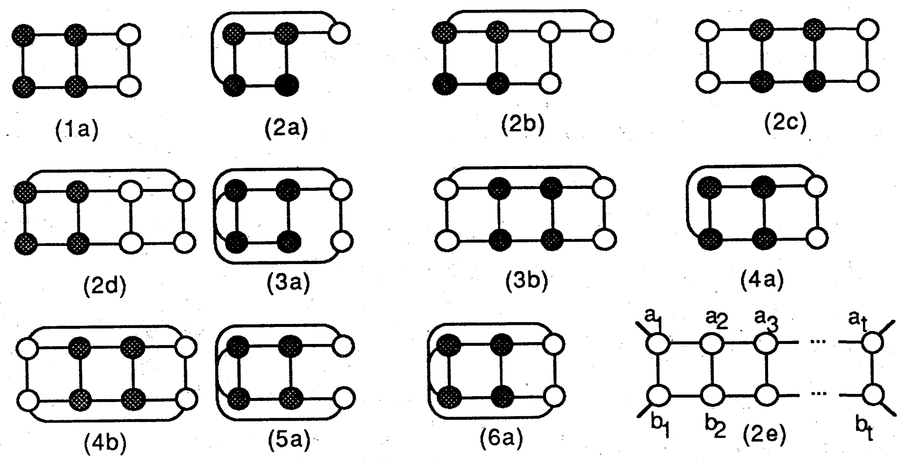

図3.

同様の考えで，次の定理も証明できる。

定理１０．次数３のグラフに対して，３サイクルをもたない辞書式順序で最初の極大部分グラフをＮC^2で計算できる（LFMSP(3-cycle free)$\in NC^2$）。

グラフG=(V,E)の辺の集合EにE=$\{e_1 < e_2 < \ldots < e_m\}$のように線形順序が与えられているとき，性質$\pi$をもつ部分グラフをinduceする辞書式順序で最初の極大な辺の集合を計算すること（Edge-Induced LFMSP(π)）を考える。[AH]，[WAN]では，「edge-deletion 問題」について，一般的なＮＰ完全性定理が証明されているが，頂点の代わりに辺を扱った場合，Ｐ完全性について，定理５，６，７のようなことがいえるかはわかっていない。しかし，いくつかの問題は効率よく並列計算できる。

補題１１[C2]. Minimum Spanning Tree 問題はＮC^2で計算できる。

系１２．サイクル無しの部分グラフ（森）をinduceする辞書式順序で最初の極大な辺の集合をＮC^2で計算できる（Edge-Induced LFMSP(forest)$\in NC^2$）。

定理１３．２部グラフをinduceする辞書式順序で最初の極大な辺の集合をＮC^2で計算できる（Edge-Induced LFMSP(bipartite)$\in NC^2$）。

証明. グラフG=(V,E)が与えられたとき，まず森をinduceする辞書式順序で最初の極大な辺の集合を計算する（系１２）。次に，この森の頂点に０または１を割り当て，bipartitionを行う。頂点uに割り当てられたラベルをlabel(u)と記述する。最後に，森に入っていない各辺e={u,v}に対して，もしlabel(u)≠label(v)ならば，辺eを森に加える。このようにして得られる部分グラフがもとめる極大な２部グラフである。□

次の定理は，定理９と同様のアイディアで証明できるが，分類はさらに複雑である（証明は[Mil]を参照）。

定理１４．
(1) 次数が４のグラフに対して，３サイクル無しの部分グラフをinduceする辞書式順序で最初の極大な辺の集合をＮＣ^{2}で計算できる。
(2) 次数が３のグラフに対して，４サイクル無しの部分グラフをinduceする辞書式順序で最初の極大な辺の集合をＮＣ^{2}で計算できる。

４．Optimal Degree Constraints

定理５の証明の中で構成されたグラフの次数は一般にはとても大きい。しかし，個々の性質について具体的にリダクションを与えることにより，表３に示されている性質の場合，グラフの次数を３もしくは４に制限してもＰ完全であることを示すことができる。そして，その次数は，(11)と(12)の場合を除いて最適である。

No.	性質	制限	次数
(1)	独立集合	ＰまたはＢ	3
(2)	最大次数１	ＰＢ	3
(3)	３サイクル無し		4
(4)	４サイクル無し	ＰＢ	4
(5)	ｋサイクル無し(k≧5)	Ｐ	3
(6)	平面グラフ	Ｂ	3
(7)	２部グラフ	Ｐ	3
(8)	Outerplanar	ＰＢ	3
(9)	Intervalグラフ	ＰＢ	3
(10)	Edge グラフ	ＰＢ	3
(11)	サイクル無し	ＰＢ	4
(12)	Nonseparating Independent set	ＰＢ	4

Ｐ：Planar，Ｂ：Bipartite
表３．

一方，ｋサイクルをもたない部分グラフをinduceする辞書式順序で最初の極大な辺の集合を計算する問題（Edge-Induced LFMSP(k-cycle free)）については，表４のそれぞれの場合にＰ完全になることを証明できる。

kサイクル	次数	次数（平面グラフ）
3	6	7
4	4	5
5	4	4
6	3	4
k≧7	3	3

P完全なEdge-Induced LFMSP(k-cycle free)

表4.

参考文献

[AnM1] Anderson, R. and Mayr, E.W., Parallelism and greedy algorithm, STAN-CS-841003, April 1984.

[AnM2] Anderson, R. and Mayr, E.W., Parallelism and the maximal path problem, Inf. Process. Lett. 24 (1987) 121-126.

[AH] Asano, T. and Hirata, T., Edge-deletion and edge-contraction problems, Proc. 14th ACM STOC (1982) 245-254.

[AvM1] Avenhaus, J. and Madlener, K., The Nielsen reduction and P-complete problems in free groups, Theoret. Comput. Sci. 32 (1984) 61-76.

[AvM2] Avenhaus, J. and Madlener, K., On the complexity of intersection and conjugacy problems in free groups, Theoret. Comput. Sci. 32 (1984) 279-295.

[C1] Cook, S.A., An observation on time-storage trade off, J. Comput. System Sci. 9 (1974) 308-316.

[C2] A taxonomy of problems with fast parallel algorithms, Inform. Contr. 64 (1985) 2-22.

[DLR] Dobkin, D, Lipton, R.J. and Reiss, S., Linear programming is log-space hard for P, Inf. Process. Lett. 8 (1979) 96-97.

[DKM] Dwork, D., Kanellakis, P.C. and Michell, J.C., On the sequential nature of unification, J. Logic Programming 1 (1984) 35-50.

[Go] Goldschlager, L.M., The monotone and planar circuit value problems are log space complete for P, SIGACT News 9 (1977) 25-29.

[GSS] Goldschlager, L.M., Shaw, R.E. and Staples, J., The maximum flow problem is log-space complete for P, Theoret. Comput. Sci. 21 (1982) 105-111.

[JL] Jones, N.D. and Laaser, W.T., Complete problems for deterministic polynomial time, Theoret. Comput. Sci. 3 (1977) 105-117.

[Ka] Kasif, S., On the parallel complexity of some constraint satisfaction problems, Proc. AAAI-86 (1986) 349-353.

[La] Ladner, R.E., The circuit value problem is log-space complete for P, SIGACT News 7 (1975) 18-20.

[LW] Lengauer, T. and K.W. Wagner, The correlation between the complexities of the non-hierarchical and hierarchical versions of graph problems, Proc. STACS 87 (1987) 100-113.

[LY] Lewis, J.M. and Yannakakis, M., The node deletion probles for hereditary properties is NP-complete, J. Comput. System Sci. 20 (1980) 219-230.

[Lu] Luby, M., A simple parallel algorithm for the maximal independent set problem, Proc. 17th ACM STOC (1985) 1-10.

[Ma] Martel, C.U., Lower bounds on parallel algorithms for finding the first maximal independent set, Inf. Process. Lett. 22 (1986) 81-85.

[Mi1] Miyano, S., The lexicographically first maximal subgraph problems: P-completeness and NC algorithms, Proc. 14th ICALP (1987) 425-434.

[Mi2] Miyano, S., A parallelizable lexicographically first maximal edge-induced subgraph problem, to appear in Inf. Process. Lett.

[Mi3] Miyano, S., Δ^p_2-complete lexicographically first maximal subgraph problems, submitted for publication.

[Pl] Plaisted, D.A., Complete problems in the first-order predicate calculus, J. Comput. System Sci. 29 (1984) 8-35.

[Re] Reif, J.H., Depth-first search is inherently sequential, Inf. Process. Lett. 20 (1985) 229-234.

[UG] Ullman, J.D. and Gelder, A., Parallel complexity of logical query programs, 27th IEEE FOCS (1986) 438-454.

[WAN] Watanabe, T., Ae, T. and Nakamura, A., On the removal of forbidden graphs by edge-deletion or by edge-contraction, Discrete Appl. Math. 3 (1981) 151-153.

[YD] Yamasaki, S. and Doshita, S., The satisfiability problems for some classes of extended Horn sets in the propositional logic, Trans. Inst. Electron. and Commun. Eng. of Japan, E 65 (1982) 390-396.

[Yan] Yannakakis, M., Node-deletion problems on bipartite graphs, SIAM J. Comput. 10 (1981) 310-327.

[Yas] Yasuura, H., On parallel computational complexity of unification, Proc. FGCS 84 (1984) 235-243.