数理解析研究所講究録
第666巻 1988年 105-114

ループプログラムのハードウェア化

東北大・工 阿曽弘具 (Hirotomo Aso)

あらまし 与えられたループプログラムに内在する計算の並列性を抽出し，それから基本計算素子の結線構造を導く方法を与える．このために，並列処理機構における結線構造の表現法を与え，基本的性質を示す．

1．一様結線構造

並列処理機構は，基本計算素子からなる計算セルをいくつか並べ，通信線で互いに結合したものとみることができる．計算セルはいくつかの入力ポートと出力ポートを持つ．それぞれの集合をP_{in}, P_{out}と記す．出力ポートは複数の入力ポートに結線されるかも知れないが，入力ポートへはその性質上２つ以上の出力ポートをつなぐことはできない．したがって，結線は，入力ポートをどのセルのどの出力ポートにつなぐかということを定める写像で定義できる．

この結線構造は，ラベル付き有向グラフ $\langle V, E, S, \ell \rangle$によって表現できる．すなわち，Ｖはセルを置く点の集合，Ｅはセル間結線を示す有向辺の集合である．有向グラフとして連結であるとする．Ｓは入力ポートを示すラベルの集合で，ℓは各辺がどの入力ポートの結線かを示すためのＥからＳへの関数でラベリング関数とよぶ．$v \in V$ へはいる辺の集合を$Ein(v)$とおく．すなわち，

$$Ein(v) = \{ e \mid e = (v', v) \}.$$

各セルの入力ポートはすべて区別できるから，$\ell : Ein(v) \to S$とみたとき，１対１であるとする．

結線構造の一様性は，グラフのある点から他の点をみたときの関係がどの点においても同一であるということで定義できるだろう．まず，ある点から他の点をみるという関係を定式化しよう．各ラベル$s \in S$ を次のように定義される写像と同一視する．

$$s(v) = \begin{cases} v' & \text{if } \ell(v', v) = s \\ \perp & \text{if } \ell(v', v) = s \text{を満たす} v' \text{が存在しない.} \end{cases}$$

$Vex = V \cup \{\perp\}$ とおくと，s は Vexから Vexへの写像とみなせる（$s(\perp) = \perp$）．以下では，$s(v)$ を $v \triangleleft s$ と記す．この記法から，$\triangleleft$をＶ×ＳからＶへの写像ともみなし，入力近傍写像という．入力近傍写像が定まると，Ｅが一意に決まる．従って，結線構造は3項組$\langle V, S, \triangleleft \rangle$であると定めてもよい．

ここで，$\perp$は入力ポートへの結線が考えている並列処理機構の外部となっていることを意味する．従って，Ｖは次の２つの集合に分類できる．

$$Vb = \{ v \mid \exists s;\ s(v) = \perp \} = \{ v \mid \ell(Ein(v)) \neq S \},$$

$$Vc = \{ v \mid \forall s;\ s(v) \neq \perp \} = \{ v \mid \ell(Ein(v)) = S \}.$$

Vbを境界節点の集合，Vcを内部節点の集合という．有限個の点の集合を考えると，一般的には端の点が存在し，端の点と内部の点とでは，結線構造が変わらざるを

得ない．上の２つの集合はこのことの表現となっている．

さて，Vex 上の写像の集合を考えると，その上に写像の合成による演算が定義できる．Ｓからその合成演算によって生成される Vex上の写像の集合は単位的半群（自由モノイド）となる（０回の演算の適用を考え，Vex 上の恒等写像も付加される）．この半群をＳ* と記す．Ｓ* の元はＳの元からなる系列によって表現できる．すなわち，$\sigma = s_1 s_2 \cdots s_n \in S^*$ に対して，

$$v \triangleleft \sigma = (\cdots((v \triangleleft s_1) \triangleleft s_2) \triangleleft \cdots) \triangleleft s_n .$$

これは意味的には，v から入力ポート$s_1, s_2, \cdots, s_n$ を次々にたどって行って行きつく先が $v \triangleleft \sigma$であることを示す．このたどり方σと行き着く先の節点 $v \triangleleft \sigma$に関する構造がv から他の点をみた関係を示すと考えられる．従って，<u>結線が一様である</u>とは，２つのσ_1，$\sigma_2 \in S^*$ について，あるv'∈V に対して　$v' \triangleleft \sigma_1 = v' \triangleleft \sigma_2 \in V$ ならば，任意のv∈V に対して $v \triangleleft \sigma_1 \equiv v \triangleleft \sigma_2$ が成立することであると定義する．但し，≡は両辺の項が共に Vの元であれば等しいということを表す．この後半の条件を満たすσ_1，σ_2について，$\sigma_1 \equiv \sigma_2$ と記す．Ｓ* はこの同値関係≡により同値類に分割できる．その同値類の集合$S^*_{\equiv}$ は，$\{ v \triangleleft \sigma \mid \sigma \in S^* \}$ に１対１に対応する．この集合は vにおける計算処理に影響を与えるセルの配置を与えており，v への（情報）流域と呼ぶ．流域の構造を考えることは$S^*_{\equiv}$ の構造を考えることに等しい．

【命題１】｜Ｓ｜＝d とする．Ｓ* が交換律を満たすならば，$S^*_{\equiv}$ は d次元格子空間に埋め込むことができる．

（証明）$S = \{ s_1, s_2, \cdots, s_d \}$ とする．$\sigma \in S^*$ について，d次元ベクトルc(σ)を次のように定める．第i要素 $c(\sigma)_i$はσの中のs_iの数である．σの交換律による同値類［σ］の各元σ' に対して，$c(\sigma') = c(\sigma)$ となり，また，逆も成立する．従って，同値類［σ］と d次元ベクトル c(σ)とは１対１に対応し，本命題が証明された．　□

Ｚを整数の集合とする．

例１．２分木．

$V = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$，$S = \{R, L\}$．

$v \triangleleft R = 2v$，$v \triangleleft L = 2v+1$.

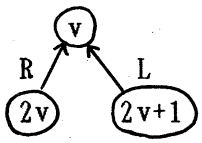


図１．２分木

Ｓ* は交換律を満たさない．しかし，一様である．

例２．２次元メッシュ．

$V = Z^2$，$S = \{N, W\}$．

$v \triangleleft N = v-(1,0)$，$v \triangleleft W = v-(0,1)$.

これは次の交換律をみたす．

$v \triangleleft NW = v \triangleleft WN$ ($= v-(1,1)$) .

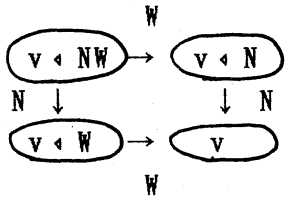


図２．メッシュ

以上に述べた一般的な結線構造を持つハードウェアを次のように定義する．

【定義１】シストリック処理系Ａとは，次のセル機能Ｆ，セル空間Ｖ，セル間結線Ｗ，配置領域Ｒの４項組＜Ｆ，Ｖ，Ｗ，Ｒ＞である．

(1)　$F = \langle P_{in}, P_{out}, D, f \rangle$．$P_{in}$，$P_{out}$ は入力・出力ポート集合で，$|P_{in}| = n$，$|P_{out}| = m$ とおく．D はデータの集合で，　$f = \langle f_1, f_2, .., f_a, .., f_m \rangle$ はf_a:

$[P_{in}\to D]\to D$なる写像の組である．$[P_{in}\to D]=D^n$ は入力ポート上のデータの集合を表し，その元dを $\langle d(i)\mid i\in P_{in}\rangle$ とも表す．f_a はその入力データに対して出力ポートaの値を決める関数で，セル関数と呼ぶ．

(2) Vは，セル機能を配置する空間の座標の集合である．（１次元または２次元格子空間や木なども対象とする）．

(3) Wは，ポート間結線写像 $u: P_{in}\to P_{out}$ と入力近傍写像 $\triangleleft: V\times P_{in}\to V$ との２項組 $\langle u, \triangleleft\rangle$ である．各セルαの入力ポートiをセル $\alpha\triangleleft i$ の出力ポート$u(i)$に接続することを意味する．

(4) $R\subseteq V$は，実際にセル機能をおくセル座標の集合である．

記憶を明示的には定式化していないが，$\alpha\triangleleft i=\alpha$ なる入力ポートi，出力ポート$u(i)$によって表現できる．

システトリック処理系の各時点での動作はデータ転送，計算処理の２フェーズからなる．すなわち，時刻tでのセル入・出力様相を $y^t: P_{in}\times V\to D$，$x^t: P_{out}\times V\to D$ として，次式で動作が定まる．

転送フェーズ：$y^t(i,\alpha)=x^{t-1}(u(i),\alpha\triangleleft i)$

計算フェーズ：$x^t(a,\alpha)=f_a(\langle y^t(i,\alpha)\mid i\in P_{in}\rangle)$

但し，$\alpha\triangleleft i\notin R$のとき，$x^{t-1}(u(i),\alpha\triangleleft i)$は外部からの入力である．

２．ループプログラム

ループプログラムの本体はIF文と割当文とからなるものとする．また，IF文の条件判定や割当文の右辺の評価において副作用は生じないものとする．このとき，IF文に対して等価なif-then-else関数を用いることにより，本体を，左辺に現れる配列変数（配列要素指定）には同じものがない割当文だけにすることができる．その結果はつぎのように表現できる．

```
for j1 = b1 to e1
  ........
 for jn = bn to en
  for p = 1 to M
    ap[kp(j1,…,jn)]
          = fp( <ap^q[kp^q(j1,…,jn)] | q∈Occur> )
```

但し，pは割当文の番号で，その集合をID＝{1,…,M}とおく．このpに関するループは本体を略記したもので，p番目の割当文で値が更新される配列名がa_p，その要素を指定する添え字式が$k_p(j_1,\cdots,j_n)$，その更新の計算式が f_pで，その q番目の入力となる配列名がa_p^q，その添え字式が $k_p^q(j_1,\cdots,j_n)$である．f_pは，$(j_1,\cdots,j_n)$に直接依存してもよい．単純変数は添え字式が定数である配列とみなす．例えば，変数v はv[1]という配列要素指定とみなす．Occurは入力の出現番号の集合である．ループインデックスの集合を，

$$Index=\{(j_1,\cdots,j_n)\mid b_1\leqq j_1\leqq e_1,\cdots,b_n\leqq j_n\leqq e_n\}$$

とおき，その元を**j**と記す．Index は実行順序を反映する辞書式順序(>)をもっており，それは Index×ID上に拡張されているものとする．

以下の議論のために，いくつかの写像を定める．まず，添え字式 k_p，k_p^q は

Indexからデータ配置空間G_pへの写像であるが，Z^n(⊇Index)上に自然に拡張されているともみなす．更に，Arg＝ID×Occur，配列名の集合をSortとおき，写像 s:ID→Sort，arg:Arg→Sort をそれぞれ $s(p)=a_p$，$arg(p,q)=a_p^q$ と定める．

ループ本体の各割当文で参照されている配列変数は，入力としてあらかじめ与えられているか，あるいは，どこかのループインデックスで計算されているはずである．その対応を示すため次の関数を導入する．

【定義２】次の関数 $B:Index\times Arg\rightarrow(Z^n\cup\{\perp\})\times(ID\cup\{0\})$を，**生成時点関数**という．$B(\mathbf{j},\langle p,q\rangle)$は，$arg(p,q)=s(p')$，$k_p^q(\mathbf{j})=k_{p'}(\mathbf{j}')$，$(\mathbf{j},p)>(\mathbf{j}',p')$を満たす$(\mathbf{j}',p')$が存在すれば（$\mathbf{j}'\notin$Indexかも知れない），そのうちで最大の順位にあるものを値とし，存在しなければ，$(\perp,0)$を値とする．特に，値の各々を示すため次の記法を用いる．$\mathbf{j}\cdot\langle p,q\rangle=\mathbf{j}'$，$st(\mathbf{j},\langle p,q\rangle)=p'$．ドット・を**逆行関数**(retrogression)，st を**文指定関数**と呼ぶ．

すなわち，$arg(p,q)=s(p')=a$，$k_p^q(\mathbf{j})=k_{p'}(\mathbf{j}')=\mu$ の場合，jにおける文p の q番目の参照 $a[\mu]$の値が，j'において文p' で計算されていることを示す．また，このことはjにおけるf_pの計算より，$\mathbf{j}\cdot\langle p,q\rangle$における $f_{p'}$の計算が先に実行されなければならないことを意味する．これを**計算の依存性**という．

$IndexI=\{\mathbf{j}\cdot\langle p,q\rangle \mid \mathbf{j}\in Index,\ \langle p,q\rangle\in Arg\}$，

$IndexA=Index\cup IndexI\cup\{\perp\}$

とおく．$\mathbf{j}\cdot\langle p,q\rangle=\perp$となるのは，配列名arg(p,q)を左辺に持つ文がないか，あっても参照されている添え字に一致するものがないことを意味する．すなわち，その参照はループの外で入力として与えられるものである．⊥でなくて$\mathbf{j}\cdot\langle p,q\rangle\notin$Index となるのは，本質的には使われないか，あるいは，初期値として値が与えられるものである．

結線構造 $\langle IndexU IndexI, Arg, \cdot\rangle$ を**計算グラフ**（またはデータフローグラフ[9]）ともいう．

３．ループプログラムのハードウェア化

ループプログラムに対してそれを実行するシストリック処理系を構成する．

ループプログラムの本体の各計算式は，各セルのセル関数に対応させる．このとき，各セル関数の出力値が出力ポートに対応し，引数が入力ポートに対応するので，次のようになる．

$P_{out}=ID$，　$P_{in}=Arg=ID\times Occur$.

次に，各ループインデックスjにおける計算を実行する時刻とセル位置を与える**計算時刻関数**Tc，**計算セル位置関数**Acを考える．

$Tc: IndexA\rightarrow T$，　$Ac: IndexA\rightarrow V$.

以下では，Vの元として記号αを用いる．

各f_pのjにおける計算は，セルAc(j)で時刻Tc(j)に実行される．そのために必要な q番目の入力は，$\mathbf{j}\cdot\langle p,q\rangle=\mathbf{j}'$ なるインデックスで $st(\mathbf{j},\langle p,q\rangle)=p'$ 番目の計算式で計算されている．従って，セルAc(j)の $i=\langle p,q\rangle$ という入力ポートはセル $Ac(\mathbf{j}\cdot i)$ の出力ポート$p'=u(i)$に接続する必要がある．また，その計算は時刻 $Tc(\mathbf{j}\cdot i)$ に実行され，時刻 Tc(j) までその計算結果を保存してお

かなければならない．すなわち，入力ポートi から計算素子 pの入力q までに長さTc(j)-Tc(j·i)-1 のシフトレジスタを必要とする．以上の状況の下で，セル機能の一様性，すなわち，どのjに対する計算についても結線および関数機能が同一であるという要請を課すると，まず，ループプログラムは次の条件を満たさなければならない．

(C0) st(j,i)＝u(i) はjに依存しない．

更に，Ac,Tc は次の条件を満たさなければならない．

(C1) Ac(j·i)＝ Ac(j)◁i ．

(C2) Tc(j)-Tc(j·i)＝δ(i) はjに依存しない．

δを時間調整写像という．(C1)を**一様結線条件**，(C2)を**同一機能条件**という．計算の依存性，および，入出力ポート間のデータ転送には１単位時間を必要とするので，次の必要条件が得られる．**転送可能条件**と呼ぶ．

(C3) δ(i)≧0．特に，j≠j·i ならば，δ(i)＞0．

次に，セル機能を単純にするために，同時刻，同一セルでは，高々１つのインデックスにおける計算しか実行されないことを要請する．これを**最簡機能条件**という．次のように記述される．

(C4) Ac(j)＝Ac(j')ならば Tc(j)≠Tc(j')．

この対偶は，“計算時刻が一致するならば計算セルは異なる”となる．

以上の条件(C1)～(C4)を満たすAc,◁,Tc,δ が存在すれば，それによりシストリック処理系が定まる．以下にこのδに対する必要条件を明らかにしていくが，その前に明らかな問題点を解決しておく．それは，j·i＝⊥の場合，δ(i)はjに依存してしまうということである．この場合が生ずるのは，配列arg(i)が入力として与えられ，ループ本体では値がセットされない場合である．そこで，ループの計算の意味を変えることなく次のように値をセットするようにする．すなわち，i=⟨p,q⟩，arg(i)=b のとき，$b[k_p^q(j)]=b[k_p^q(j)]$という右辺と左辺が同一の項である割当文をあらかじめ付加する．このループプログラムの等価変換を**流れ化変換**と呼ぶ．入力データをパイプライン的に流すことに対応する．

次は，(C1),(C2) における$\alpha \triangleleft i$，δ(i)の定め方から成立する．

【命題２】(1) j·i＝jならば，$\alpha \triangleleft i=\alpha$，δ(i)＝0．

(2) 各i,i'∈Arg について，あるjに対して，

j·i＝j·i' ならば，i≡i'，δ(i)＝δ(i')．

Arg を上の (2) に従って，同値類分割し，各同値類を e と表す．すなわち，i,i'∈e ⇔ ∃j；j·i＝j·i'．また，j·i＝jとなるi が属する同値類を除いた同値類の集合をEとおく．逆行関数は IndexA×E 上の関数に自然に拡張する．

条件(C2)は δ,Tcを未知関数とする方程式ともみなすことができる．この方程式を解くために，いくつかの定義をする．まず，$((j\cdot e_1)\cdot e_2)\cdot e_3$ を $j\cdot e_1e_2e_3$ と記す． Eの元からなる系列の集合を E* と記し，その元を $e_1e_2\cdots e_n$ あるいはσと記す．逆行関数は IndexA×E* 上の関数に自然に拡張される．関数 c: E* →［E→Z］を，

c(σ)(e) ＝（σ中の eの生起回数）

と定め，更に，次の記法を導入する．

$(c(\sigma),\delta) = \Sigma_e\, c(\sigma)(e)\cdot\delta(e)$.

【命題３】(1) 任意の $j\in$ Index, 任意の $\sigma\in E^*$ に対して,

$Tc(j)=Tc(j\cdot\sigma)+(c(\sigma),\delta)$.

(2) $\exists j; j\cdot\sigma = j\cdot\sigma'$ かつ $c(\sigma)\neq c(\sigma')$ となる σ, σ'が存在するならば,

$(c(\sigma)-c(\sigma'),\delta)=0$.

(証明) $Tc(j)-Tc(j\cdot e_1)=\delta(e_1)$,

$Tc(j\cdot e_1)-Tc(j\cdot e_1e_2)=\delta(e_2)$, ・・・,

$Tc(j\cdot e_1e_2\cdots e_{n-1})-Tc(j\cdot e_1e_2\cdots e_n)=\delta(e_n)$.

$\sigma=e_1e_2\cdots e_n$に対する上式より, 辺辺の和をとって,

$Tc(j)-Tc(j\cdot\sigma)=\Sigma_{p=1}^{n}\ \delta(e_p)$.

この右辺は和の交換律より$(c(\sigma),\delta)$に等しい. 従って, (1)が示された. (2)は(1)より明らかである. □

この(2)はδに対する制約条件を与える.

IndexA上に関係← を次のように定める. $j\leftarrow j'\Leftrightarrow \exists\sigma; j\cdot\sigma=j'$. この関係は, 意味的には, jにおける計算のためにj'における計算結果を必要とすることを示し, 依存関係と呼ぶ. この依存関係の反射的交換的推移的閉包をとるとIndexA上の同値関係となり, ⇔と表す. 異なる同値類の元の間には依存関係が存在しないから, それらの計算は独立に実行可能であり, 各々を実現することにより全体が実現できる. そこで, 一般性を失うことなく, ⇔による同値類は１つであるとする. すなわち, ある $j_0\in$ Index が存在して, 任意のjに対して $j\Leftrightarrow j_0$ であるとする.

【命題４】写像 v:Index→［E→Z］が存在して,

$Tc(j)=Tc(j_0)+(v(j),\delta)$.

(証明) $j\Leftrightarrow j_0$ より,例えば, $j\cdot\sigma_1=j_1$, $j_2\cdot\sigma_2=j_1$, $j_2\cdot\sigma_0=j_0$. このとき, 命題２(1) の式を用いて計算して, 次式を得る.

$Tc(j)=Tc(j_0)+(c(\sigma_1)-c(\sigma_2)+c(\sigma_0),\delta)$.

そこで, 上のような j_0 に到るE上の適当な系列を選び, $v(j)=c(\sigma_1)-c(\sigma_2)+c(\sigma_0)$などと定めればよい. □

v(j)は, j_0からjまでの計算の依存関係の状況を縮約したものとなっており, jの状況ベクトルという.具体的な v(j) の値の決定は系列の選び方に依存するが, $(v(j),\delta)$はその系列の選び方に依存しないことが証明から分かる.

命題４は, Tc(j)が定数 $Tc(j_0)$とδの線形結合とから定まることを示している. 従って, 制約条件を満たすδが存在すれば, Tcは一意に定まることが知られた. Acについては次が成立する.

【命題５】(1) 任意の $j\in$ Index, 任意の $\sigma\in E^*$ に対して,

$Ac(j\cdot\sigma)=Ac(j)\triangleleft\sigma$.

(2) $\exists j; j\cdot\sigma=j\cdot\sigma'$ ならば $\sigma\equiv\sigma'$.

(証明) 命題３の証明と同様である. □

以上の議論から, 次が得られる.

【定理１】ループプログラムがシストリック処理系により実現できるためには, 次の条件(a),(b)を満たさなければならない. $i\in$ Arg である.

(a) 文指定関数 st(j,i) は j に依存しない.

(b) ∃j; j·σ = j·σ' かつ c(σ)≠c(σ') となるすべての σ, σ'∈E* に対して, ラベル関数として, σ≡σ' が成立し, かつ,

(c(σ)-c(σ'), δ)=0

が成立し, さらに, δ>0 となるδが存在する. 但し, δ:E→T.

また, (b)が成立するならば, 一様結線, 同一機能, 転送可能 の3条件(C1), (C2), (C3)が成立する.

(証明) 条件(C0)および命題3, 5から明らかである. □

この定理より, 条件(a)を満たすループプログラムについて, 条件(b)を満たすδとAcで更に最簡機能条件を満たすものが得られるならば, シストリック処理系が構成できることが分かる.

計算式f_pが直接 j に依存してよいとしたが, そのためには各セルはインデックスの値を知ることができなければならない. そこで, 写像 Ind:T×V→Indexを Ind(t,α)= j ⇔ Tc(j)=t かつ Ac(j)=α と定める. このInd が存在するとき, **インデックス利用可能**という. すなわち, 各セルは自身の座標αと時刻 t とから, そのとき計算しているループインデックス j を知ることができ, j に依存する計算を実行できる. 次が成立する.

【命題6】Tc, Ac について, 最簡機能条件を満たすならば, インデックス利用可能である. 逆も成立する.

(証明) $Ind(t,\alpha)\in Tc^{-1}(t)\cap Ac^{-1}(\alpha)$より明かである. □

与えられたループプログラムからシストリック処理系を設計する手順を効率化し, また, できる処理系をよりよいものにするためのいくつかの結果を示す.

逆行関数を知ってからArg を同値類分割してEを求め, δに関する制約条件式を求めたが, Arg をあらかじめ分類しておくことができる.

【命題7】(1) 同じ配列名を持ち, 添え字式が等しい参照変数は, その生成割当文より共に前あるいは共に後にあるならば, 等価である.

(2) 添え字式が同一の参照変数は各々の前後にある生成割当文の左辺の添え字式が同種のものからなっているとき, 等価である. すなわち, $k_{p_1 q_1}(j) = k_{p_2 q_2}(j)$, $\{k_{p'} \mid p'\in s^{-1}(arg(p_1,q_1)), p'<p_1\} = \{k_{p''} \mid p''\in s^{-1}(arg(p_2,q_2)), p''<p_2\}$ かつ, この等式において $p'\geq p_1, p''\geq p_2$ とした場合にも等号が成立するならば, $j\cdot\langle p_1,q_1\rangle = j\cdot\langle p_2,q_2\rangle$.

(証明) 逆行関数の定義から容易に示される. □

配列名b の入力変数が m個あり, その添え字式を $k^{(r)}(r=1\sim m)$とおく. 流れ化変換により, m個の次の形の割当文が付加されたとする.

$b[k^{(r)}(j)] = b[k^{(r)}(j)]$

m 個の bの添え字の集合$k^{(r)}(Index)$ を考える. これらが排反ならば, 配列b が m 個に分割されて入力されることを意味し, 問題はない. それらが排反でないとき, 例えば, $\mu\in k^{(1)}(Index)\cap k^{(2)}(Index)$が存在するとき, $b[\mu]$ は(異なる)インデックスについて2カ所で値が設定され, 同一のデータを2カ所に流すことを意味する. これは入出力を複雑にするので, 一方を省略することを考える.

[**分流変換**] 参照変数 $b[k^{(1)}(j)]$, $b[k^{(2)}(j)]$ について, それらが(流

れ化変換をする前には）入力としてだけ現れるとき，新しい配列名b'を導入し，b[k⁽²⁾(j)]の参照をすべて b'[k⁽²⁾(j)]で置き換え，次の割当文を付加する．

b'[k⁽²⁾(j)] = if k⁽¹⁾(j)=k⁽²⁾(j) then b[k⁽¹⁾(j)]
else b'[k⁽²⁾(j)]

【命題８】各$\mu \in GD$ に対して，$j_0 = \min\{j \mid k^{(2)}(j)=\mu\}$ と定めるとき，$k^{(1)}(j_0)=\mu$ ならば，分流変換はループプログラムの等価変換である．

(証明) 変換後のプログラムにおいて，インデックスjでb'[k⁽²⁾(j)] が参照されたとする．変換の定義および命題の条件より，その参照はもとのプログラムにおける参照b[k⁽²⁾(j)] に一致する． □

例３．総和： $sum = \Sigma_{i=1}^{n} a_i$ ．

ループプログラム：
```
for i=0 to n-1 { wi=ai+1 ;}
 wn=0 ;  /* necessary for odd n */
for j=1 to ⌈log n⌉
{ imax=⌈n/2^j⌉ ;
 for i=0 to imax-1 { wi = w2i + w2i+1 ; }
  wimax=0 ;    }
```

等価変換結果：
```
for j=0 to ⌈log n⌉
{ imax=⌈n/2^j⌉ ;
 for i=0 to imax
 {/*1*/  ai+1 = ai+1 ;     /*流れ化変換*/
  /*2*/  wi = if j=0 then  ai+1
             else if i=imax then 0
             else   w2i + w2i+1 ;   } }
```

添え字式： p=1 (a_{i+1})について，$k_1(j,i)=i+1$, $k_1^1(j,i)=i+1$. p=2 (w_i) について，$k_2(j,i)=i$, $k_2^1(j,i)=i+1$ (a_{i+1}), $k_2^2(j,i)=2i$ (w_{2i}), $k_2^3(j,i)=2i+1$ (w_{2i+1})． 入力ポートのラベルを，<1,1>=<aa>, <2,1>=<wa>, <2,2>=<w0>, <2,3>=<w1> とおく．

逆行関数：$(j,i)\cdot\langle w0\rangle=(j',i')$については，$k_2^2(j,i)=k_2(j',i')$, $(j,i)>(j',i')$ より $i'=2i$, $j'=j-1$. 従って，

$(j,i)\cdot\langle w0\rangle=(j-1,2i)$.

同様に，$(j,i)\cdot\langle w1\rangle=(j-1,2i+1)$,
$(j,i)\cdot\langle wa\rangle=(j,i)$,
$(j,i)\cdot\langle aa\rangle=(j-1,i)$.

計算時刻関数：（第2式(p=2)についてのみ考える）

$Tc(j,i)-Tc((j,i)\cdot\langle w0\rangle)=\delta(w0)$,
$Tc(j,i)-Tc((j,i)\cdot\langle w1\rangle)=\delta(w1)$ より，
$Tc(j,0)=Tc(0,i)+\Sigma_{p=0}^{j-1}(i_p\cdot\delta(w1)+(1-i_p)\cdot\delta(w0))$
但し，$i=(i_{j-1}\cdots i_1 i_0)$ [２進表示].

逆行関数の定まり方から命題３(2)の条件を満たすσ, σ' は存在しない．従って，$\delta(w1)$, $\delta(w0)$は正でありさえすれば任意に定めてよい．効率の面から，

$\delta(w1)=\delta(w0)=1$

と定める．このとき，Tc(j,0)=Tc(0,i)+j となる．任意のi（jビット）について，Tc(0,i)は同一の時刻となり，それをt₀とおくと，Tc(j,0)=t₀+j．同様にして一般的に，Tc(j,i)=t₀+j．

計算セル位置関数：

Ac(j,i)◁<w0>=Ac((j,i)·<w0>)=Ac(j-1,2i)

Ac(j,i)◁<w1>=Ac((j,i)·<w1>)=Ac(j-1,2i+1)

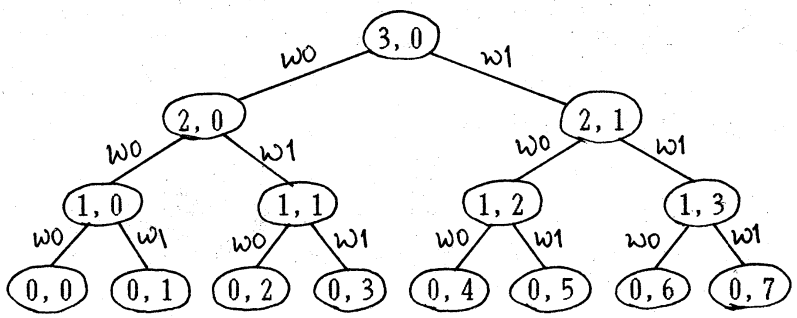
入力近傍関数◁を木のそれにすれば，Ac(j,i)=i は上の式を満たす．逆に，Ac(j,i)=i とおけば，上の式から結線構造は木になる（ルートのところが例1と若干異なる）．

n=7 の場合，計算グラフ，結線構造は図3のようになる．

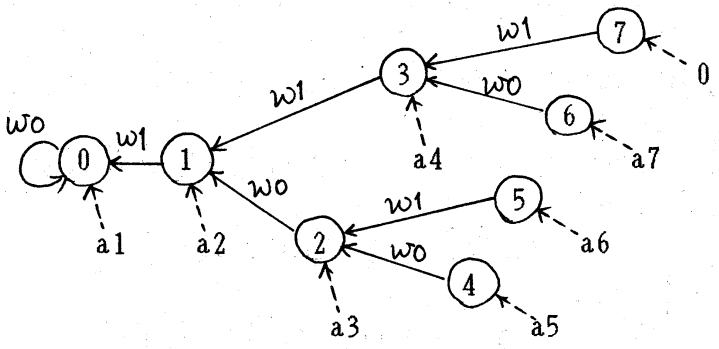
4．むすび

結線構造を定式化し，その一様性について1つの考えを示した．それらを基に，シストリックアレーの定義[10]を若干拡張して，シストリック処理系を定式化した．それは結線構造として線形格子空間だけでなく木などのより一般的なものも対象にしている．

更に，ループプログラムからシストリック処理系を構成する一般的方法を与え，シストリック処理系で実現可能なループプログラムのクラスに関する条件を与え



(a) 計算グラフ（各節点：(j,i)）



(b) 結線構造（各節点：Ac(j,i)=i）
（点線：初期外部入力）

図3．総和のシストリック処理系（n=7，⌈log n⌉=3）

た．その条件は，j－j·i（データ依存ベクトルという）がjに完全に依存することも許すものとなっており，組織的にハードウェア化できるループプログラムの対象を広げたといえる．従来は，データ依存ベクトルが定数ベクトルの場合にループプログラムや漸化式からシストリックアレーを構成する方法が得られている[1-9]．また，データ依存ベクトルがjに依存するとしてもその有限的な性質（ある要素が奇数か偶数かなど）に依存するものであった[11,12]．それらは結線構造がアレーであるために課された条件であると考えられ，本論文は結線構造を一般化することによって対象を拡張したものである．

この構成法に並列度や計算時間の評価を導入してより実用的なものにすること，および，入力近傍関数をよりシステマティックに求める方法を見いだすことは，今後の課題である．

謝辞　本研究を進めるうえで御討論頂いた東北大学木村正行教授に感謝する。また，本研究の一部は文部省科学研究費補助金（総合研究(A)課題番号62302032）の援助を受けた．ここに記して感謝する．

文　献

[1] D.I.Moldovan;"On the analysis and synthesis of VLSI algorithms", IEEE.Trans.Comp.C-31,11,pp.1121-1126.(1982)

[2] D.I.Moldovan;"On the design of algorithm for VLSI systolic arrays", Proc.IEEE,71,1,pp.113-120.(1983)

[3] 若林,菊野,吉田;"漸化式を用いたハードウェアアルゴリズムの設計について", 信学論D,J67-D,8,pp.861-868.(1984)

[4] P.Quinton;"Automatic synthesis of systolic arrays from uniform recurrent equations",Proc.11th Int.Symp.Comp.Arch.,pp.208-214.(1984)

[5] G.J.Li and B.W.Wah; "The design of optimal systolic arrays", IEEE Trans.Comp.C-34,1,pp.66-77.(1985)

[6] D.I.Moldovan,I.A.B.Fortes;"Partitioning and mapping algorithms into fixed size systolic arrays",TEEE Trans.Comp.C-35,1,pp.1-12.(1986)

[7] 三浦,阿曽,稲垣;"多重ループプログラムを処理するシストリックアルゴリズムの構成法",信学論D,J70-D,3,pp.515-524.(1987)

[8] 堀池,西田,坂口;"プロセッサ数の制限下におけるシストリックアレーの設計法",信学論D,J70-D,5,pp.880-888.(1987)

[9] 飯国,酒井,得丸;"データフローグラフを用いたシストリックアレイの構成法",信全大(総合),1676.(1987)

[10] 阿曽，稲垣；"シストリックアルゴリズムの定式化と情報の流れ", 信学論D,J70-D,6,pp.1074-1082（1987）

[11] 阿曽；"シストリックアルゴリズム化可能な問題のクラスについて", 夏のＬＡシンポジウム．（1987）

[12] 阿曽；"セル構造情報処理系とプログラミング"，昭62電気関係学会東海支部連合大会，S5-1.(1987)

（以上）