数理解析研究所講究録
第668巻 1988年 63-119

D加群と群の表現論

東北大学理学部　谷崎俊之 (T. Tanisaki)

D加群の理論の"使い方"を学ぶうえでもっとも適切な題材のひとつとして次をとりあげる。

"半単純リー環の既約最高ウェイト加群の指標公式"

すなわち Brylinski－柏原([BK]), Beilinson－Bernstein([BB1])による Kazhdan－Lusztig 予想([KL1])の証明である。

以下の内容は次のとおり。

§1. Lie環の表現とD加群はどうして結びつくか?

§2. 旗多様体上のline bundleに関する復習。

§3. Beilinson－Bernstein category 同値

§4. 群作用をもつLie環の表現と群作用をもつD加群

§5. Kazhdan－Lusztig予想とは何か?

§6. Kazhdan－Lusztig予想の証明

§1〜§3 では Beilinson-Bernstein category 同値について述べる。大雑把にいうと

{半単純 Lie 環のある種の表現} $\simeq$ {旗多様体上の D-加群} ----(0.1)

という category 同値が成立するというものであるが，これにより半単純 Lie 環の表現に関するある種の問題は D-加群に関する問題に直ってしまう事になる。(0.1) の証明では D-加群についての難しい事は使わない。代数幾何及び半単純群に関する常識的なことと D_X の定義がわかっていれば十分である。

§4 では (0.1) の equivariant version について述べる。

§5, §6 では (0.1) の応用として指標公式の証明を述べるが，ここでは regular holonomic system, Riemann-Hilbert 対応等に関する深い結果が用いられる。

§1. Lie 環の表現と D 加群はどうして結びつくか？

1.1 D-affine variety

次のことはよく知られている。

「X を affine algebraic variety, $R=\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ をその関数環とするとき，abelian category の同値：

$$\{\text{有限生成 } R\text{-module}\} \simeq \{\text{coherent } \mathcal{O}_X\text{-module}\} \quad \cdots\cdots (1.1)$$
$$M \longmapsto \mathcal{O}_X \otimes M$$
$$\Gamma(X, \mathcal{M}) \longleftarrow\!\!\mid \mathcal{M}$$

が成立する。」

そこで $\mathcal{O}_X$ を D_X =(微分作用素の層)におきかえるとどうなるだろう?

X を $\mathbb{C}$ 上の non-singular algebraic variety とするとき, ともかく

2つの functor:

- $\{\text{有限生成 } \Gamma(X, D_X)\text{-module}\} \longrightarrow \{\text{coherent } D_X\text{-module}\} \quad \cdots\cdots (1.2)$

$$M \longmapsto D_X \otimes M$$

- $\{\text{coherent } D_X\text{-module}\} \longrightarrow \{\text{有限生成 } \Gamma(X, D_X)\text{-module}\} \quad \cdots\cdots (1.3)$

$$\mathcal{M} \longmapsto \Gamma(X, \mathcal{M})$$

は定義される。これらが互いに他の逆 functor となるのはどのようなときであろうか? affine variety に対して (1.1) が成立する理由は次の事実である(と思える)。

「X を affine variety, $\mathcal{M}$ を coherent $\mathcal{O}_X$-module とするとき

(a) $H^i(X, \mathcal{M}) = 0 \quad (\forall i > 0)$

(b) $\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}_X$-module として $\Gamma(X, \mathcal{M})$ で生成される。」

そこで，

「**定義 1.1**　$\mathbb{C}$上の non-singular variety X が D-affine であるとは，任意の coherent D_X-module $\mathcal{M}$ について次の二条件が成立することをいう。

(a) $H^i(X,\mathcal{M})=0$　$(\forall i>0)$

(b) $\mathcal{M}$ は D_X-module として $\Gamma(X,\mathcal{M})$ で生成される。」

D-affine variety なら (1.2)，(1.3) は互いに逆の functor となり category 同値が成立する。問題はどのような X が D-affine になるかであるが，affine variety，projective space $\mathbb{P}^n$ は D-affine になる事がわかっている。一般的な解答は（筆者は）知らない。

§3 で次を示す。

「**定理 1.2** ([BB1])　連結半単純群の旗多様体 X は D-affine である。よって次の category 同値が成立する。

$$\begin{array}{ccc} \{\text{有限生成 }\Gamma(X,D_X)\text{-module}\} & \simeq & \{\text{coherent } D_X\text{-module}\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ M & \longmapsto & D_X \otimes M \\ \Gamma(X,\mathcal{M}) & \longleftarrow\!\shortmid & \mathcal{M} \end{array}$$

」

G を$\mathbb{C}$上の連結半単純代数群とすると，G の連結可解閉部分群のうちで極大なもの B が共役を除いてただ一つ定まる。この B と G の

Borel部分群と呼び $X=G/B$ を G の旗多様体という。X は non-singular projective variety である。

「<u>例 1.3</u>　$G=SL(n,\mathbb{C})=\{g\in GL(n,\mathbb{C})\mid \det g=1\}$ とするとき，$B=\{$上三角行列で G に入るもの$\}$ は G の Borel 部分群である。よって

$$X=\{(V_n\supset V_{n-1}\supset\cdots\supset V_1\supset V_0)\mid V_i \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の } i \text{ 次元部分空間}\}$$

が G の旗多様体となる（G の X への作用は推移的で，ある一点の固定部分群が B と一致する）。特に $G=SL(2,\mathbb{C})$ ならば $X=\mathbb{P}^1$ である。」

1.2 Lie環と微分作用素

代数群 G が non-singular variety X に作用しているとする。このとき G は X 上の関数の空間 $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ に

$$(g\cdot f)(x)=f(g^{-1}\cdot x)\qquad (g\in G,\ x\in X,\ f\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X))$$

で作用する。より正確には $g:\mathcal{O}_{X,x}\longrightarrow\mathcal{O}_{X,g\cdot x}$ が定まる。これを微分して Lie環の準同型

$$\mathfrak{g}\xrightarrow{\ \Phi\ }\Gamma(X,\Theta_X)$$

$$((\Phi(A))(f))(x)=\frac{d}{dt}f((\exp(tA))^{-1}\cdot x)\Big|_{t=0}$$

$$(A\in\mathfrak{g},\ x\in X,\ f\in\mathcal{O}_{X,x})$$

が得られる。ここで $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\,G=$（$G$ の Lie環），Θ_X は X 上の vector field

の層である。さらに $\mathfrak{g}$, Θ_X の包絡環をとって associative algebra の準同型

$$U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\Phi} \Gamma(X, D_X) \quad \cdots\cdots \quad (1.4)$$

が得られる。但し $U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の包絡環である。

$U(\mathfrak{g})$ と親しくないひとのために

(i) 勝手な associative algebra は $[x,y]=xy-yx$ により Lie 環と思える。$U(\mathfrak{g})$ は，単位元をもつ associative algebra であって $\mathfrak{g}$ を Lie 部分環として含むもののうちで universal なものである。より正確には次のとおり。単位元をもつ associative algebra $\mathfrak{a}$ と Lie 環の準同型 $\mathfrak{g} \xrightarrow{f} \mathfrak{a}$ の組 $(\mathfrak{a}, f)$ を考える。このような $(\mathfrak{a}, f)$ のうちで universal なもの（すなわち他の $(\mathfrak{a}', f')$ があるとき associative algebra homomorphism $\mathfrak{a} \xrightarrow{h} \mathfrak{a}'$ で $h \circ f = f'$ なるものがただ一つ存在するもの）が同型を除いてただ一つ存在する。この $\mathfrak{a}$ を $U(\mathfrak{g})$ と書く。

(ii) (PBW) $\mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ は injective。また $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{C}$-basis $\{A_1, \cdots, A_m\}$ をひとつ固定するとき $\{A_1^{j_1} \cdots A_m^{j_m} \mid j_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は $U(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}$-basis になる。

(iii) 定義から明らかに

$$\{\mathfrak{g} \text{ の表現}\} \simeq \{U(\mathfrak{g})\text{-module}\}$$

そこで元に戻って，一般に(1.4)は同型ではないが，G，X がそれぞれ $\mathbb{C}$ 上の連結半単純代数群，その旗多様体のときには，(1.4)がよい性質を持つことを説明する。

$U(\mathfrak{g})$ の中心を $\mathfrak{z}$ と書く。$\mathfrak{z}$ から $\mathbb{C}$ への algebra homomorphism の事を central character と呼ぶ。特に

$$\begin{array}{ccccl} \mathfrak{z} & \xrightarrow{\chi_\rho} & \mathbb{C} & & \\ \downarrow & \circlearrowright & \wr\!\!\mid & \longleftarrow & (\mathrm{PBW}) \\ U(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{g} & & \end{array}$$

により定まる χ_ρ を trivial central character という（ρ の意味はあとでわかる（§3.2））。$U(\mathfrak{g})$-module M に対して

$$z \cdot m = \chi(z) m \qquad (\forall z \in \mathfrak{z},\ \forall m \in M)$$

となる central character χ があるとき，M は central character χ を持つという。Schur の Lemma により irreducible $U(\mathfrak{g})$-module は central character をもつ。

§3で次が示される。

「<u>定理 1.4</u>（[BB1]）G が $\mathbb{C}$ 上の連結半単純代数群で，X がその旗多様体のとき，

(i) $U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\Phi} \Gamma(X, D_X)$ は surjective。

(ii) $\mathrm{Ker}\,\Phi = U(\mathfrak{g})\,\mathrm{Ker}\,\chi_\rho$ 」

定理1.2, 1.4 より

「**系1.5** ([BB1]) G, X を定理1.4 のとおりとするとき, 次の category 同値が成立する。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{trivial central character をもつ}\\ \text{有限生成 } U(\mathfrak{g})\text{-module}\end{array}\right\} \simeq \{\text{coherent } \mathcal{D}_X\text{-module}\}$$」

「**注意1.6** trivial でない central character をもつ場合を扱うためには, $\mathcal{D}_X$ のかわりに $\mathcal{D}_X$ をひねったものを考えればよい ([BB1,2], §3)。」

「**例1.7** $G=SL(2,\mathbb{C})$, $X=\mathbb{P}^1$ とする。$\mathbb{P}^1$ の局所座標系を次のようにとる。

$$\mathbb{P}^1 = \{(x) \mid x\in\mathbb{C}\} \cup \{(z) \mid z\in\mathbb{C}\} \qquad x=\frac{1}{z}$$

G の $\mathbb{P}^1$ への作用は

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot(x) = \left(\frac{c+dx}{a+bx}\right) \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

で与えられる。また

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \{A\in M(2,\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}\,A = 0\} = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E_+ \oplus \mathbb{C}E_-$$

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_+=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_-=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である。この場合に Φ を具体的に計算してみよう。

$$\big((\Phi(H))(f)\big)(x) = \frac{d}{dt} f\left(\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\cdot(x)\right)\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt} f(e^{2t}x)\Big|_{t=0}$$
$$= 2x\left(\frac{df}{dx}\right)(x)$$

よって $\Phi(H) = 2x\frac{d}{dx} = -2z\frac{d}{dz}$ $\quad\left(x = \frac{1}{z},\ \frac{d}{dx} = -z^2\frac{d}{dz}\right)$。

同様に $\Phi(E_+) = x^2\frac{d}{dx} = -\frac{d}{dz}$

$\Phi(E_-) = -\frac{d}{dx} = z^2\frac{d}{dz}$ 。

この場合 $\mathfrak{Z} = \mathbb{C}[\Omega]$, $\Omega = (H-1)^2 + 4E_+E_- = (H+1)^2 + 4E_-E_+$ となることが知られている。$\chi_\rho(\Omega) = 1$ であるが $\Phi(\Omega) - 1 = 0$ となることもすぐわかる。∎

§2. 旗多様体上の line bundle に関する復習

この節は定理 1.2, 1.4 を証明するための準備である。

以下 G を $\mathbb{C}$ 上の連結, 単連結な半単純代数群, B を G の Borel 部分群, $X = G/B$ =（G の旗多様体）とする。単連結性を仮定するのは話を簡単にするためで本質的ではない。

$\boxed{2.1}$ G の作用をもつ line bundle

$X = G/B$ なので category 同値:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{G-equivariant vector bundle} \\ \text{on } X\end{array}\right\} \simeq \{\text{有限次元}B\text{-module}\} \quad \cdots (2.1)$$
$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ L & \longleftrightarrow & (L\text{の }eB\text{での fiber}) \end{array}$$

がある。特に

$$\left\{\begin{array}{l}\text{G-equivariant line bundle} \\ \text{on } X\end{array}\right\} \simeq \{1\text{次元}B\text{-module}\} \quad \cdots (2.2)$$

である。U を B の unipotent radical, T を B に含まれる G の極大 torus とすると $B=TU$, $T\cap U=\{1\}$, $B \triangleright U$ であるが, U は unipotent T は torus ($\mathbb{C}^*$ の直積) なので

$$\begin{array}{ccc} \{B\text{の既約表現}\} & \simeq & \{T\text{の既約表現}\} \\ \| & & \| \\ \{B\text{の1次元表現}\} & \simeq & \{T\text{の1次元表現}\} = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*) \end{array}$$

となる。従って $P=\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^*)$ とおくと

$$\left\{\begin{array}{l}\text{G-equivariant invertible} \\ \mathcal{O}_X\text{-module}\end{array}\right\} \simeq P = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*) \quad \cdots (2.3)$$

である。$T \simeq (\mathbb{C}^*)^{\dim T}$ なので $P \simeq \mathbb{Z}^{\dim T}$ である。$\lambda \in P$ に対して

$$\mathcal{O}(\lambda) = \left(\begin{array}{l}\lambda\text{に対応する G-equivariant line bundle の section のつくる} \\ \text{G-equivariant invertible } \mathcal{O}_X\text{-module}\end{array}\right)$$

とする。

$\boxed{2.2}$ root系とWeyl群

Gの極大torus Tをひとつとり $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\,G$, $\mathfrak{t}=\mathrm{Lie}\,T$とする。微分することにより，うめこみ

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^*) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathfrak{t},\mathbb{C}) \\ \| & & \| \\ P & \hookrightarrow & \mathfrak{t}^* \\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathbb{Z}^{\dim T} & & \mathbb{C}^{\dim T} \end{array}$$

が得られて，これにより $\mathfrak{t}^* = P\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ である。視覚的に(あるいは心理的に)わかり易くするために $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}} = P\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}\subset\mathfrak{t}^*$ を導入する。Pは$\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$の$\mathbb{Z}$-lattice, $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$は$\mathfrak{t}$の$\mathbb{R}$-formである。

(a) root系

Gの$\mathfrak{g}$へのadjoint actionをTに制限して$\mathfrak{g}$はT-moduleと思える。このとき$\mathfrak{g}$はT-moduleとして次のように分解することが知られている。

$\Delta\subset P-\{0\}\subset\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$ 及び $\mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{g}$ $(\alpha\in\Delta)$ が定まって

- $\mathfrak{g}=\mathfrak{t}\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha\right)$
- $\mathfrak{g}_\alpha$はT-stableな1次元subspaceで$\mathfrak{g}_\alpha$上のTの表現はαに対応する

Δを(G,T)のroot系，Pを(G,T)のweight latticeという。

(b) 内積

$\mathfrak{g}$ 上の G-不変な non-degenerate symmetric bilinear form が $\langle x, y\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y))$ により定まるが，これを Killing form という ($(\mathrm{ad}(x))(z)=[x,z]$)。$\langle\ ,\ \rangle$ は G-不変なので特に T-不変。よって

$$\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{g}_\alpha\rangle = 0 \quad (\alpha\in\Delta), \quad \langle \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta\rangle = 0 \quad (\alpha,\beta\in\Delta,\ \alpha+\beta\neq 0)。$$

従って $\Delta=-\Delta$ で $\langle\ ,\ \rangle$ の $\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}$，$\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{-\alpha}$ $(\alpha\in\Delta)$ への制限も non-degenerate。

よって $\mathfrak{t}$ と $\mathfrak{t}^*$ を同一視できる。よって $\mathfrak{t}^*$ 上の non-degenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ が定まる。$\langle\ ,\ \rangle$ の $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}\times\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$ への制限は $\mathbb{R}$-値でしかも正定値である。これを $(\ ,\ )$ と書く。

G は単連結と仮定したので，次が知られている。

$$P = \left\{\lambda\in\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}} \;\middle|\; \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z} \quad (\forall\alpha\in\Delta)\right\} \quad \cdots\cdots (2.4)$$

(c) Weyl 群

$W=N_G(T)/T$ を (G,T) の Weyl 群という。W の T への作用を微分して，W の $\mathfrak{t}$ への線型な作用が定まる。その反傾表現として W の $\mathfrak{t}^*$ への作用が定まる。これらの作用は全て faithful である。また W は Δ, P, $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$ を保ち，$\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$ 上の内積 $(\ ,\ )$ を不変にする。特に，

$$W \subset O(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*) \subset GL(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*) \subset GL(\mathfrak{t}^*) \quad \cdots\cdots (2.5)$$

と思う事ができる。

$\alpha\in\Delta$に関する鏡影変換を$s_\alpha \in O(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*)$とする。すなわち

$$s_\alpha(x) = x - \frac{2(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \qquad (x\in\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*)$$

とすると次が知られている。

$$W = \langle s_\alpha \mid \alpha\in\Delta\rangle \quad \cdots\cdots (2.6)$$

(d) 正root系, 単純root系

Δの部分集合$\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$で次の性質をみたすものが, W-共役を除いてただ一つ定まる。

(i) Πは$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$の$\mathbb{R}$-basis

(ii) $\Delta \subset \left(\sum_{i=1}^{l}\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i\right) \cup \left(\sum_{i=1}^{l}\mathbb{Z}_{\leq 0}\alpha_i\right)$

このΠを単純root系と呼び, $\Delta^+ = \Delta\cap\left(\sum_{i=1}^{l}\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i\right)$を正root系と呼ぶ。$\Delta^- = \Delta\cap\left(\sum_{i=1}^{l}\mathbb{Z}_{\leq 0}\alpha_i\right)$とおくとき$\Delta^- = -\Delta^+$, $\Delta = \Delta^+\sqcup\Delta^-$である。

以下の事が知られている。

- $\mathfrak{b} = \mathfrak{t}\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{g}_\alpha\right)$はGのあるBorel部分群BのLie環で$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{g}_\alpha$はBのunipotent radicalのLie環になる。
- $$\left.\begin{array}{l} C^+ = \{x\in\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^* \mid (x,\alpha)\geq 0 \ (\forall\alpha\in\Delta^+)\} \\ C^- = \{x\in\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^* \mid (x,\alpha)\leq 0 \ (\forall\alpha\in\Delta^+)\} \end{array}\right\}$$ はともに. Wの$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$への作用に関する基本領域。

• $S=\{s_{\alpha_i} \mid i=1,\cdots,l\}$ は W を生成し，更に (W,S) はいわゆる Coxeter 系になる。すなわち S は W の生成系として"よい"性質をみたす。

さて $w\in W$ に対してその長さ $l(w)$ を

$$l(w)=\min\{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0} \mid {}^{\exists}s_1,\cdots,{}^{\exists}s_j\in S \text{ s.t. } w=s_1\cdots s_j\}$$

で定義する。$l(1)=0$，$l(s)=1$ $(s\in S)$ である。$l(w)$ が最大となる $w\in W$ がただ一つ定まる。これを w_0 とかく。w_0 は $w_0(C^+)=C^-$ で特徴づけられる。あるいは $w(\Delta^+)=\Delta^-$ でも特徴づけられる。

「例 2.1 $G=SL(n,\mathbb{C})$ ならば $T=\left\{\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \middle| a_1\cdots a_n=1\right\}$ ととれる。よって $\dim \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*=n-1$ である。また Δ,Π,Δ^+,P,W は次のように見える。

$$V=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{R}e_i \qquad \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*=\{\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\in V \mid \sum_{i=1}^{n}a_i=0\}$$

$$\Delta=\{e_i-e_j \mid i\neq j\}$$

$$\Pi=\{e_i-e_{i+1} \mid i=1,\cdots,n-1\}$$

$$\Delta^+=\{e_i-e_j \mid i<j\}$$

$$P=\{\sum_{i=1}^{n}a_ie_i \mid a_i-a_j\in\mathbb{Z}\ ({}^{\forall}i,{}^{\forall}j),\ \sum_{i=1}^{n}a_i=0\}$$

$$W=\mathfrak{S}_n=(n\text{次対称群}) \qquad \sigma(\sum_{i=1}^{n}a_ie_i)=\sum_{i=1}^{n}a_ie_{\sigma(i)}$$

$G=SL(2,\mathbb{C})$ のとき $\dim\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*=1$。$\Pi=\{\alpha\}$ とすると $\Delta=\{\pm\alpha\}$

$P=\frac{1}{2}\mathbb{Z}\alpha$，$W=\{\pm 1\}$

$G=SL(3,\mathbb{C})$ のとき

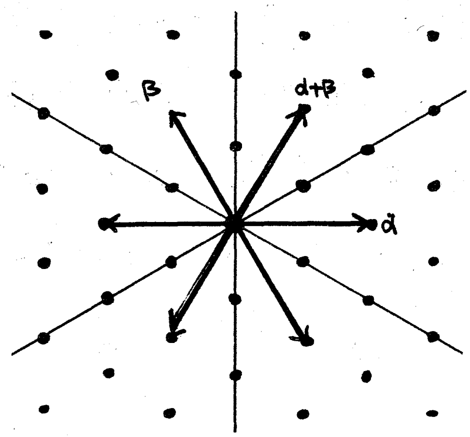
右図で

$\Delta=\{\pm\alpha,\pm\beta,\pm(\alpha+\beta)\}$

$\Pi=\{\alpha,\beta\}$

$\Delta^+=\{\alpha,\beta,\alpha+\beta\}$

$P=\{\bullet$ の点$\}$



W は3つの超平面に関する折り返しで生成される。 ┘

$\boxed{2.3}$ G の有限次元既約表現

V を G の有限次元既約表現とする。T は reductive なので，V は T-module として完全可約である。従って T-module としての分解

$$V=\bigoplus_{\mu\in P} V(T,\mu) \quad (V(T,\mu) \text{ は } \mu \text{ に対応する既約 T-module の和})$$

がある。$V(T,\mu)\neq 0$ なる $\mu\in P$ を V の weight と呼ぶ。また

$$ch(V)=\sum_{\mu\in P}\dim V(T,\mu)\,e^{\mu} \in \mathbb{Z}[P]$$

を V の指標と呼ぶ。

P 上の半順序 $\geq$ を $[\lambda\geq\mu \Leftrightarrow \lambda-\mu\in\sum_{\alpha\in\Delta^+}\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha]$ により定める。

このとき次が知られている。

「<u>定理2.2</u> (Cartan-Weylの分類定理)

VをGの有限次元既約表現とすると，Vのweightのうちで(上で定義した半順序に関して)極大なものμ_V，極小なものν_Vがそれぞれただ一つ定まり $\mu_V \in P^+ := \mathcal{C}^+ \cap P$, $\nu_V \in P^- := \mathcal{C}^- \cap P$, $\nu_V = w_0(\mu_V)$ である。さらに

$$\begin{array}{ccccc} P^- & \xrightarrow{\sim} & \{G\text{の有限次元既約表現}\}/\cong & \xrightarrow{\sim} & P^+ \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \nu_V & \longleftarrow & V & \longmapsto & \mu_V \end{array}$$

である。」

「<u>記号</u> Gの有限次元既約表現Vで$\mu_V=\mu$となるものをV^μ，$\nu_V=\nu$となるものをV_νと書く。」

$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$ とおくとき $\frac{2(\alpha,\rho)}{(\alpha,\alpha)}=1$ ($\forall\alpha\in\Pi$) が知られている。特に$\rho\in P^+$である。

「<u>定理2.3</u> (Weylの指標公式)

$$\mathrm{ch}(V^\mu) = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e^{w(\mu+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})} = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e^{w(\mu+\rho)}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e^{w\rho}}$$

$$\mathrm{ch}(V_\nu) = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e^{w(\nu-\rho)+\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{\alpha})} = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e^{w(\nu-\rho)}}{\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}e^{-w\rho}}$$ 」

$\boxed{2.4}$ Borel−Weil−Bott の定理

$\lambda\in P$ のとき $\mathcal{O}(\lambda)$ は G-equivariant invertible $\mathcal{O}_X$-module だったので $\Gamma(X,\mathcal{O}(\lambda))=H^0(X,\mathcal{O}(\lambda))$ は

$$(g\cdot s)(x)=g\cdot(s(g^{-1}x))\qquad (g\in G,\ x\in X,\ s\in\Gamma(X,\mathcal{O}(\lambda)))$$

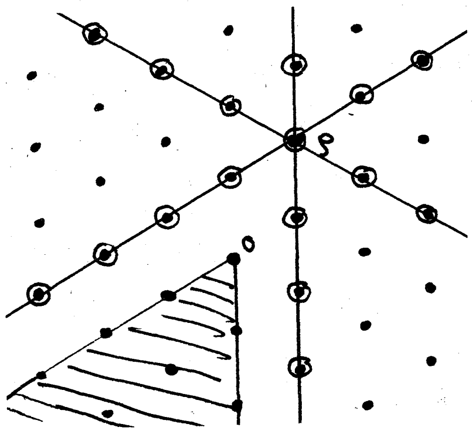
により G-module になる。同様に $H^i(X,\mathcal{O}(\lambda))$ も G-module になる（X は projective なので $\dim H^i(X,\mathcal{O}(\lambda))<\infty$）。$H^i(X,\mathcal{O}(\lambda))$ の G-module structure を記述するために記号の準備をする。

W の $\mathfrak{h}^*$ への new-action ☆ を $w☆x=w(x-\rho)+\rho$ で定義する（原点を ρ にずらしたもの）。この ☆-action に関する鏡影面の上にある P の元を P_{sing} と書く。すなわち

$$\begin{aligned}P_{sing}&=\left\{\lambda\in P\ \middle|\ \frac{2(\lambda-\rho,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=0\quad(\exists\alpha\in\Delta)\right\}\\&=\{\lambda\in P\mid s_\alpha☆\lambda=\lambda\quad(\exists\alpha\in\Delta)\}\\&=\{\lambda\in P\mid w☆\lambda=\lambda\quad(\exists w\in W,\ w\neq 1)\}\end{aligned}$$

また $P_{reg}=P-P_{sing}$ とおく。

例えば $G=SL(3,\mathbb{C})$ のときは，右図で ⊙の点が P_{sing} の元，◭ に入る •の点が P^- の元で，☆-action は ⊙ ののっている 3本の超平面に関する折り返しで生成される。



「**定理2.4** (Borel - Weil - Bott)

(i) $\lambda\in P_{sing}$ ならば $H^i(X,\mathcal{O}(\lambda))=0 \quad (\forall i)$

(ii) $\lambda\in P_{reg}$ ならば $w\star\lambda\in P^-$ となる $w\in W$ が唯一つ存在して

$$H^i(X,\mathcal{O}(\lambda))=\begin{cases}\nabla_{w\star\lambda} & (i=\ell(w))\\ 0 & (i\neq\ell(w))\end{cases}$$

(iii) $\mathcal{O}(\lambda)$ が ample $\Longleftrightarrow \lambda\in P^- - \rho=\{\lambda\in P \mid \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}<0 \ (\forall\alpha\in\Delta^+)\}$ 」

「**例2.5** $G=SL(2,\mathbb{C})$, $X=\mathbb{P}^1$ のとき $P=\mathbb{Z}\rho$, $W=\{1,s\}$ で

$s\star(m\rho)=(2-m)\rho$。 また通常の記号で $\mathcal{O}(m\rho)=\mathcal{O}(-m)$ である。」

§3. Beilinson - Bernstein category 同値

$\boxed{3.1}$ Twisted differential operators

§2.1 で $\lambda\in P$ に対して X 上の line bundle を対応させたが、この line bundle に作用する微分作用素の層を D_λ と書く事にする。よって $D_\lambda=\mathcal{O}(\lambda)\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}D_X\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}\mathcal{O}(-\lambda)$ である。D_λ は環の層で local には D_X と同型である。D_X のときと同様に、associative algebra の準同型が、

$$U(\mathfrak{g})\xrightarrow{\Phi_\lambda}\Gamma(X,D_\lambda)$$

$$((\Phi_\lambda(A))(s))(x)=\frac{d}{dt}(\exp tA)\,s((\exp tA)^{-1}\cdot x)\big|_{t=0}$$

$$(A\in\mathfrak{g},\ x\in X,\ s\in\mathcal{O}(\lambda)_x)$$

で定まる。

一般の$\lambda\in\mathfrak{h}^\vee$に対しては line bundle はないが，$D_\lambda$は定まる。これは

$\mathcal{O}_X\underset{\mathbb{C}}{\otimes}U(\mathfrak{g})$ —— $Af-fA=(\Phi(A))(f)$ $(A\in\mathfrak{g},\ f\in\mathcal{O}_X)$ により環になる —— を

ある両側 ideal でわったものであるが，その定義は省略する（[BB 1,2]）。

以下の議論は$\lambda\in\mathfrak{h}^\vee$でも成立するが，ここでは簡単のために$\lambda\in P$のときに

限る事にする。

3.2 central character

$U(\mathfrak{g})$の center $\mathfrak{z}$に関する Harish-Chandra の結果を復習する。

$\mathfrak{n}^+=\bigoplus_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{g}_\alpha$，$\mathfrak{n}^-=\bigoplus_{\alpha\in\Delta^-}\mathfrak{g}_\alpha$とおくとき$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}^+\oplus\mathfrak{n}^-$である。よって

PBW により

$$U(\mathfrak{g})=U(\mathfrak{h})\oplus(\mathfrak{n}^-U(\mathfrak{g})+U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+)\quad\cdots\cdots(3.1)$$

$$U(\mathfrak{g})=U(\mathfrak{h})\oplus(\mathfrak{n}^+U(\mathfrak{g})+U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^-)\quad\cdots\cdots(3.2)$$

と分解される。$\mathfrak{h}$は可換なので$U(\mathfrak{h})\simeq S(\mathfrak{h})$である。分解(3.1)，(3.2)に

関する$U(\mathfrak{h})\simeq S(\mathfrak{h})$への projection をそれぞれ$U(\mathfrak{g})\xrightarrow{\beta_1}S(\mathfrak{h})$，$U(\mathfrak{g})\xrightarrow{\beta_2}S(\mathfrak{h})$

とする。algebra $S(\mathfrak{h})$の自己同型$S(\mathfrak{h})\xrightarrow{\varepsilon_i}S(\mathfrak{h})$ $(i=1,2)$を

$\varepsilon_1(H)=H-\rho(H)1$，$\varepsilon_2(H)=H+\rho(H)1$ $(H\in\mathfrak{h})$で定める。このとき

次が知られている。

$\varepsilon_1\circ\beta_1$，$\varepsilon_2\circ\beta_2$の$\mathfrak{z}$への制限は一致してその像は$S(\mathfrak{h})^W$になる。
これにより algebra isomorphism $\mathfrak{z}\xrightarrow[\sim]{\psi}S(\mathfrak{h})^W$が定まる。

$\mathfrak{z}\xrightarrow{\chi_\lambda}\mathbb{C}$を$\chi_\lambda(z)=\langle\psi(z),\lambda\rangle$で定める。このとき

$$\begin{cases} \{\text{central character}\} = \{\chi_\lambda \mid \lambda \in \mathfrak{h}^*\} \\ \chi_\lambda = \chi_\mu \iff \mu = w(\lambda) \quad (\exists w \in W) \end{cases}$$

である。また (Trivial central character) $= \chi_\rho = \chi_{-\rho}$ 。

$\boxed{3.3}$ §3で証明する定理を述べよう。すなわち定理1.2, 1.4の拡張であるところの次の2つの定理である。

「定理3.1 ([BB1]) $\lambda \in P$ とすると

(i) $U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\Phi_\lambda} \Gamma(X, D_\lambda)$ は surjective。

(ii) $\mathrm{Ker}\,\Phi_\lambda = U(\mathfrak{g})\,\mathrm{Ker}\,\chi_{\lambda-\rho}$ 。」

「定理3.2 ([BB1]) $\lambda \in P^-$ とすると任意の coherent D_λ-module $\mathcal{M}$ に対して次が成立する。

(i) $H^i(X, \mathcal{M}) = 0 \quad (\forall i > 0)$ 。

(ii) $\mathcal{M}$ は D_λ-module として $\Gamma(X, \mathcal{M})$ で生成される。」

従って次がわかる。

「系3.3 ([BB1]) $\lambda \in P^-$ とすると次の category 同値が成立する。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{central character } \chi_{\lambda-\rho} \text{ をもつ} \\ \text{有限生成 } U(\mathfrak{g})\text{-module}\end{array}\right\} \simeq \{\text{coherent } D_\lambda\text{-module}\}$$
」

$\boxed{3.4}$ 定理3.1の証明

基本的な idea は次のとおり。

"$U(\mathfrak{g})$, D_λ という非可換なものを直接扱うかわりに，可換環での対応する結果をまず示す。(ここでは通常の代数幾何が使える。)そこから非可換なときの情報をひきだす。"

Step 1 $U(\mathfrak{g})$, D_λ の可換版

$U(\mathfrak{g})$ および D_X の order による filtration をそれぞれ $\{U(\mathfrak{g})_m\}_{m\geq 0}$ $\{D_{X,m}\}_{m\geq 0}$ とする。すなわち

$$U(\mathfrak{g})_m = (\mathfrak{g} \text{ の } m \text{ 個以下の積で生成される } \mathbb{C}\text{-subspace})$$

$$D_{X,m} = (\Theta_X \text{ の } m \text{ 個以下の積で生成される } \mathcal{O}_X\text{-submodule})$$

$U(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}$, $D_{X,0} = \mathcal{O}_X$ また $m<0$ ならば $U(\mathfrak{g})_m = 0$, $D_{X,m}=0$ と思う。この filtration は次の性質をみたす。

$$U(\mathfrak{g})_{m_1} U(\mathfrak{g})_{m_2} \subset U(\mathfrak{g})_{m_1+m_2}, \qquad D_{X,m_1} D_{X,m_2} \subset D_{X,m_1+m_2}$$

$$[U(\mathfrak{g})_{m_1}, U(\mathfrak{g})_{m_2}] \subset U(\mathfrak{g})_{m_1+m_2-1}, \quad [D_{X,m_1}, D_{X,m_2}] \subset D_{X,m_1+m_2-1}$$

よって $gr_m U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})_m / U(\mathfrak{g})_{m-1}$, $gr_m D_X = D_{X,m}/D_{X,m-1}$ とおくとき $gr\, U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{m\geq 0} gr_m U(\mathfrak{g})$, $gr\, D_X = \bigoplus_{m\geq 0} gr_m D_X$ はそれぞれ可換な $\mathbb{C}$-algebra 及び可換な $\mathcal{O}_X$-algebra である。PBW により $gr\, U(\mathfrak{g}) \simeq S(\mathfrak{g})$ また $T^*X \xrightarrow{p} X$ を cotangent bundle とするとき $gr\, D_X = p_* \mathcal{O}_{T^*X}$ である。$\lambda \in P$ のときも $D_{\lambda,m} = \mathcal{O}(\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_X} D_{X,m} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(-\lambda)$ とおいて同様の事が成立して

$\mathrm{gr}\,D_\lambda = \mathcal{O}(\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{gr}\,D_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(-\lambda) \cong \mathrm{gr}\,D_X \cong P_* \mathcal{O}_{T^*X}$ である。自然な morphism $\sigma_m : U(\mathfrak{g})_m \longrightarrow \mathrm{gr}_m U(\mathfrak{g})$, $\sigma_m : D_{\lambda,m} \longrightarrow \mathrm{gr}_m D_\lambda$ が定まる。

Step2 $\mathrm{Ker}\,\chi_{\lambda-\rho}$ の可換版

G が adjoint action で $U(\mathfrak{g})$ に作用しているが，その G－不変元全体 $U(\mathfrak{g})^G$ がZと一致する。よって $\mathrm{Ker}\,\chi_{\lambda-\rho}$ の可換版は

$$S(\mathfrak{g})^G_+ = S(\mathfrak{g})^G \cap \left(\bigoplus_{m>0} S(\mathfrak{g})_m\right)$$

と思える。ここで $S(\mathfrak{g})_m$ は m次 symmetric tensor の全体である。

Step3 定理3.1 の可換版

$U(\mathfrak{g})$ の可換版は $\mathrm{gr}\,U(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g}) = \Gamma(\mathfrak{g}^*, \mathcal{O}_{\mathfrak{g}^*})$ であり，$\Gamma(X, D_\lambda)$ の可換版は $\Gamma(X, \mathrm{gr}\,D_\lambda) \cong \Gamma(X, P_*\mathcal{O}_{T^*X}) = \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X})$ である。

$\Phi_\lambda(U(\mathfrak{g})_m) \subset \Gamma(X, D_{\lambda,m})$ と exact sequence

$$0 \to \Gamma(X, D_{\lambda,m-1}) \to \Gamma(X, D_{\lambda,m}) \to \Gamma(X, \mathrm{gr}_m D_\lambda)$$

により $\mathrm{gr}\,U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathrm{gr}\,D_\lambda)$ すなわち

$$\Gamma(\mathfrak{g}^*, \mathcal{O}_{\mathfrak{g}^*}) \longrightarrow \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X}) \quad \cdots\cdots (3.3)$$

が定まる。この写像は次のように解釈される。G が X に作用しているので自然な morphism $T^*X \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{g}^*$ が定まる (moment map)。X は projective なので γ は projective morphism である。このとき (3.3) は γ による引きもどし γ^* と一致する。

以上の考察から定理3.1の可換版は次の命題になる。

Lemma 3.4

(i) $\Gamma(\mathfrak{g}^{\perp}, \mathcal{O}_{\mathfrak{g}^{\perp}}) \xrightarrow{\gamma^{\perp}} \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X})$ は surjective。

(ii) $\mathrm{Ker}\,\gamma^{\perp} = S(\mathfrak{g})S(\mathfrak{g})^G_+ \subset S(\mathfrak{g}) \cong \Gamma(\mathfrak{g}^{\perp}, \mathcal{O}_{\mathfrak{g}^{\perp}})$。

そこでこれを示そう。Kostant による次の事実を援用する。

(a) γ の像 $\mathcal{N}$ は normal variety。

(b) $T^*X \longrightarrow \mathcal{N}$ は projective, birational。

$\mathcal{N}$ は $\mathfrak{g}^{\perp}$ の closed G-stable subvariety であるが、

(c) $\mathcal{N}$ の $\mathfrak{g}^{\perp}$ での定義 ideal は $S(\mathfrak{g})^G_+$ で生成される。

(d) $\mathcal{N}$ は open dense な G-orbit を含む。

γ を $T^*X \xrightarrow{\gamma''} \mathcal{N} \xrightarrow{\gamma'} \mathfrak{g}^{\perp}$ とわけて可換図式

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathfrak{g}^{\perp}, \mathcal{O}_{\mathfrak{g}^{\perp}}) \arrow[rr, "\gamma^{\perp}"] \arrow[dr, "\gamma'^*"'] & & \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X}) \\
& \Gamma(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}) \arrow[ur, "\gamma''^*"'] &
\end{tikzcd}$$

を得る。(a),(b) により γ''^* は同型写像。また $\mathcal{N}$ は $\mathfrak{g}^{\perp}$ の closed subvariety なので γ'^* は surjective で、その Kernel は (c) により $S(\mathfrak{g})S(\mathfrak{g})^G_+$ と一致する。以上から Lemma 3.4 は明らか。

Step4 center の作用

「Lemma 3.5 $\lambda \in P$ のとき $\Phi_\lambda(z) = \chi_{\lambda-\rho}(z)\,\mathrm{id}$ $(\forall z \in \mathfrak{z})$」

(証明) $z \in \mathfrak{z} = U(\mathfrak{g})^G$ なので $\Phi_\lambda(z) \in \Gamma(X, D_\lambda)^G$ である。

また, Lemma 3.4 の証明中の (d) により $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^G = \mathbb{C}$ であるが, γ^{-1} は同型写像だったので $\Gamma(X, \mathrm{gr}\,D_\lambda)^G = \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X})^G = \mathbb{C}$。よって

$$\Gamma(X, \mathrm{gr}_m D_\lambda)^G = \begin{cases} \mathbb{C} & m=0 \\ 0 & m\neq 0 \end{cases}$$

となる。exact sequence

$$0 \to \Gamma(X, D_{\lambda,m-1}) \to \Gamma(X, D_{\lambda,m}) \to \Gamma(X, \mathrm{gr}_m D_\lambda)$$

から結局 $\Gamma(X, D_{\lambda,m})^G = \Gamma(X, D_{\lambda,0})^G = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^G = \mathbb{C}$ $(\forall m \geq 0)$。

(X は projective なので $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$) よって

$$\Gamma(X, D_\lambda)^G = \mathbb{C}$$

がわかった。よって $\Phi_\lambda(z) = c_\lambda(z)\,\mathrm{id}$ $(\forall z \in \mathfrak{z})$ により c_λ が定まる。このとき $c_\lambda = \chi_{\lambda-\rho}$ をみればよい。

D_λ は $\mathcal{O}(\lambda)$ に作用しているので, $\mathcal{O}(\lambda)$ のある non-zero section s に対して $(\Phi_\lambda(z))\cdot s = \chi_{\lambda-\rho}(z)s$ となることをみればよい。$\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha$ に対応する G の部分群を N^- とすると, $N^- \longrightarrow X = G/B$ $(u \mapsto uB)$ は open immersion である。$\mathcal{O}(\lambda)$ の eB での fiber は λ に対応する B-module であった。$\mathcal{O}(\lambda)$ の eB での fiber の non-zero element v_0 をひとつきめて, N^-B/B 上の

$\mathcal{O}(\lambda)$ の section s を $s(uB)=u\cdot v_0$ $(\forall u\in N^-)$ により定める。定義から

$$\Phi_\lambda(Y)\cdot s = 0 \qquad (\forall Y\in \mathfrak{n}^-) \qquad \cdots\cdots (3.5)$$

$$\Phi_\lambda(H)\cdot s = \lambda(H)s \qquad (\forall H\in\mathfrak{h}) \qquad \cdots\cdots (3.6)$$

さらに $s'\in\mathcal{O}(\lambda)$, $\mu\in P$ について

$$\left.\begin{array}{c}\Phi_\lambda(H)s'=\mu(H)s' \\ (\forall H\in\mathfrak{h})\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c}\Phi_\lambda(H)\Phi_\lambda(Y_\alpha)s'=(\mu+\alpha)(H)\Phi_\lambda(Y_\alpha)s' \\ (\forall H\in\mathfrak{h},\ \forall Y_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha)\end{array}\right. \cdots (3.7)$$

これは $HY_\alpha=Y_\alpha H+[H,Y_\alpha]=Y_\alpha(H+\alpha(H))$ からでる。

さて PBW により $\mathfrak{n}^+=\bigoplus_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{g}_\alpha$ とおくとき

$$U(\mathfrak{g})=U(\mathfrak{h})\oplus(\mathfrak{n}^+U(\mathfrak{g})+U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^-)=U(\mathfrak{h})\oplus\mathfrak{n}^+U(\mathfrak{n}^+)U(\mathfrak{h})\oplus U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^-$$

と分解される。$z\in\mathfrak{z}$ を $z=u_1+u_2+u_3$ $(u_1\in U(\mathfrak{h}),\ u_2\in\mathfrak{n}^+U(\mathfrak{n}^+)U(\mathfrak{h}),$ $u_3\in U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^-)$ とわけるとき，(3.5) から $\Phi_\lambda(z)s=\Phi_\lambda(u_1)s+\Phi_\lambda(u_2)s$ となるが $\Phi_\lambda(z)$ は constant だったので (3.6), (3.7) から $\Phi_\lambda(z)s=\Phi_\lambda(u_1)s$ $=\langle u_1,\lambda\rangle s=\langle B_2(z),\lambda\rangle s=\langle\psi(z),\lambda-\rho\rangle s=\chi_{\lambda-\rho}(z)s$。以下で示された。

<u>Step 5</u> <u>定理 3.1 の証明</u>

$$\begin{cases} I_m = \operatorname{Ker}\chi_{\lambda-\rho}\cap U(\mathfrak{g})_m \\ J_m=\displaystyle\bigoplus_{k+l=m}U(\mathfrak{g})_k I_l \\ K_m = S(\mathfrak{g})S(\mathfrak{g})^G_+\cap S(\mathfrak{g})_m=\displaystyle\bigoplus_{\substack{k+l=m\\ l>0}}S(\mathfrak{g})_k S(\mathfrak{g})^G_l \end{cases}$$

とおく ($I_0=0$ に注意)。

定理3.1より強く次を示す。

$$(*)\left[\, J_m \longrightarrow U(\mathfrak{g})_m \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_{\lambda,m}) \to 0 \quad \text{は exact} \quad (\forall m \geq 0) \,\right]$$

Lemma 3.5により，これがcomplexになっていることは明らか。$(*)$をinductionで示す。$m=0$なら明らか（$J_0=0$，$U(\mathfrak{g})_0=\mathbb{C}$，$\Gamma(X,\mathcal{D}_{\lambda,0})=\mathbb{C}$）。$m>0$で$m-1$まで正しいとする。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
J_{m-1} & \longrightarrow & U(\mathfrak{g})_{m-1} & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{D}_{\lambda,m-1}) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
J_m & \longrightarrow & U(\mathfrak{g})_m & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{D}_{\lambda,m}) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
K_m & \longrightarrow & S(\mathfrak{g})_m & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathrm{gr}_m \mathcal{D}_\lambda) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

可換性は明らか。各行，各列がcomplexになっていることも明らか。右端の列がexactなことは $0 \to \mathcal{D}_{\lambda,m-1} \to \mathcal{D}_{\lambda,m} \to \mathrm{gr}_m \mathcal{D}_\lambda$ のexactnessから明らか。真中の列がexactなことは明らか。上の行がexactなことはinductionの仮定。下の行がexactなことはLemma 3.4の帰結。

$J_m \to K_m$ がsurjectiveであることをみよう。$I_\ell \to S(\mathfrak{g})_\ell^G$ $(\ell>0)$ のsurjectivityをみればよい。まず $\mathfrak{z} \cap U(\mathfrak{g})_\ell = U(\mathfrak{g})_\ell^G \xrightarrow{\sigma_\ell} S(\mathfrak{g})_\ell^G$ のsurjectivityを示そう。$U(\mathfrak{g})_\ell \to S(\mathfrak{g})_\ell$ はG-equivariant surjectiveであるが，Gはsemisimpleなので連続の有限次元G-moduleは完全可約。よって明らか。そこで $a \in S(\mathfrak{g})_\ell^G$ とすると $\sigma_\ell(z') = a$ となる $z' \in \mathfrak{z} \cap U(\mathfrak{g})_\ell$ が

ある。$z = z' - \chi_{\lambda-\rho}(z')1$ とおくと明らかに $z \in I_\ell$, $\alpha_\ell(z) = a$。よって示された。

あとは diagram chase で証明が出来るある。

$\boxed{3.5}$ 定理 3.2 の証明

$\nu \in P^-$ のとき G-module として $\Gamma(X, \mathcal{O}(\nu)) \simeq V_\nu$ であった（§2.4）。

よって自然な $\mathcal{O}_X$-homomorphism

$$\left(\begin{array}{lll} \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} V_\nu \xrightarrow{p_\nu} \mathcal{O}(\nu) & \cdots\cdots & (3.8) \\ \mathcal{O}_X \xrightarrow{i_\nu} \mathcal{O}(\nu) \otimes_{\mathbb{C}} V^{-\nu} & \cdots\cdots & (3.9) \end{array}\right.$$

が定まる（(3.9) は (3.8) の dual に $\mathcal{O}(\nu)$ を tensor したもの。$(V_\nu)^* \simeq V^{-\nu}$）。

p_ν, i_ν は G-equivariant な $\mathcal{O}_X$-homomorphism で p_ν は surjective，i_ν は injective である。

さて $\lambda \in P^-$ として，$\mathcal{M}$ を coherent D_λ-module とする。(3.8), (3.9) に $\mathcal{M}$ を tensor して

$$\left(\begin{array}{lll} \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} V_\nu \xrightarrow{\overline{p_\nu}} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\nu) & \cdots & (3.10) \\ \mathcal{M} \xrightarrow{\overline{i_\nu}} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\nu) \otimes_{\mathbb{C}} V^{-\nu} & \cdots & (3.11) \end{array}\right.$$

が定まる。これらは $U(\mathfrak{g})$-equivariant で，$\overline{p_\nu}$ は surjective，$\overline{i_\nu}$ は injective である。

Lemma 3.6 (Key lemma)

Iの記号のもとで $\bar{p}_\nu$, $\bar{i}_\nu$ は split する。すなわち $U(\mathfrak{g})$-homomorphism

$$\begin{cases} \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}(\nu) \xrightarrow{\bar{j}_\nu} \mathcal{M}\otimes_{\mathbb{C}} V_\nu \\ \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}(\nu)\otimes_{\mathbb{C}} V^{-\nu} \xrightarrow{\bar{q}_\nu} \mathcal{M} \end{cases}$$

であって $\bar{p}_\nu\circ\bar{j}_\nu = id$, $\bar{q}_\nu\circ\bar{i}_\nu = id$ となるものがある。■

Lemma 3.6 はひとまず認めて、これから定理 3.2 が導かれる事をみておこう。

$H^i(X,\mathcal{M})=0$ $(\forall i>0)$ の証明

D_λ は $\mathcal{O}_X$-module として locally free なので $\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}_X$-module として quasi-coherent。よって coherent $\mathcal{O}_X$-submodule たちの union になる（quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-module が coherent $\mathcal{O}_X$-submodule たちの union になることは EGA にある）。従って

$$H^i(X,\mathcal{M}) = \varinjlim_{\mathcal{M}_0} H^i(X,\mathcal{M}_0)$$

（$\mathcal{M}_0$ は coherent $\mathcal{O}_X$-submodule の全体をうごく）

よって任意の coherent $\mathcal{O}_X$-submodule $\mathcal{M}_0$ に対して

$$H^i(X,\mathcal{M}_0)\longrightarrow H^i(X,\mathcal{M})$$

が zero map であることを示せばよい。定理 2.4 (iii) により ある $\nu\in P^-$

が存在して $H^i(X, \mathcal{M}_0 \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}(\nu)) = 0$ $(\forall i > 0)$ となる。そこで diagram

$$\begin{array}{ccc} H^i(X, \mathcal{M}_0) & \longrightarrow & H^i(X, \mathcal{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(X, \mathcal{M}_0 \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}(\nu) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V^{-\nu}) & \longrightarrow & H^i(X, \mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}(\nu) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V^{-\nu}) \end{array}$$

を考えると $H^i(X, \mathcal{M}_0 \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}(\nu) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V^{-\nu}) = H^i(X, \mathcal{M}_0 \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}(\nu)) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V^{\nu} = 0$ $(i > 0)$,

また key lemma により $H^i(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}(\nu) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V^{-\nu})$ は injective。

以上より明らか。

<u>$\mathcal{M}$ が $\Gamma(X, \mathcal{M})$ で生成される事の証明</u>

$\Gamma(X, \mathcal{M})$ で生成される $\mathcal{M}$ の D_X-submodule を $\mathcal{M}'$ として

$$0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{N} \to 0 \quad (\text{exact})$$

により $\mathcal{N}$ を定める。$H^i(X, \mathcal{M}') = 0$ $(\forall i > 0)$ だったので

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{M}') \to \Gamma(X, \mathcal{M}) \to \Gamma(X, \mathcal{N}) \to 0 \quad (\text{exact})$$

$\mathcal{M}'$ の定義から $\Gamma(X, \mathcal{N}) = 0$。$\mathcal{N} \neq 0$ として矛盾を導く。$\mathcal{N}$ の coherent $\mathcal{O}_X$-submodule $\mathcal{N}_0 \neq 0$ をとる。定理2.4 (iii) から $\nu \in P^-$ で

$\Gamma(X, \mathcal{N}_0 \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}(\nu)) \neq 0$ なるものがある。よって $\Gamma(X, \mathcal{N} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}(\nu)) \neq 0$。

Key lemma により $\Gamma(X, \mathcal{N}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V_\nu = \Gamma(X, \mathcal{N} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V_\nu) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{N} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}(\nu))$ は surjective。よって $\Gamma(X, \mathcal{N}) \neq 0$ となり矛盾。

Lemma 3.6 の証明にうつる。

「**Lemma 3.7** $\chi_1, \cdots, \chi_r$ を相異なる central character とする。
$\mathcal{N}$ が $U(\mathfrak{g})$-module (の層) で $k_1, \cdots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\prod_{i=1}^{r} (z - \chi_i(z))^{k_i} \cdot \mathcal{N} = (0)$$

が成立すれば, $U(\mathfrak{g})$-module としての直和分解

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{N}^{(i)}$$

$$\mathcal{N}^{(i)} = \{ m \in \mathcal{N} \mid (z - \chi_i(z))^{k_i} m = 0 \}$$

がある。」

(証明) $\mathfrak{Z}$ は有限生成かつ可換なので 仮定から $\mathcal{N}$ は $\mathfrak{Z}$-module として locally finite。すなわち ${}^{\forall} m \in \mathcal{N}$ に対して $\mathfrak{Z} \cdot m$ は $\mathbb{C}$ 上有限次元である。よって明らか ■

さて V_ν は B-module として次のような filtration をもつ。

$$\begin{cases} V_\nu = V^{(1)} \supset V^{(2)} \supset \cdots\cdots \supset V^{(r)} = 0 \\ V^{(i)}/V^{(i+1)} \text{ は1次元で } \mu_i \in P \text{ に対応する既約B-module に同型} \\ \mu_i < \mu_j \Rightarrow i < j \\ \mu_i = \nu \Leftrightarrow i = 1 \end{cases}$$

§2.1 により $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} V_\nu$ は G-equivariant $\mathcal{O}_X$-module として次のような G-equivariant filtration をもつ。

$$\begin{cases} \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} V_\nu = \mathcal{V}^{(1)} \supset \mathcal{V}^{(2)} \supset \cdots\cdots \supset \mathcal{V}^{(r)} = 0 \\ \mathcal{V}^{(i)}/\mathcal{V}^{(i+1)} \simeq \mathcal{O}(\mu_i) \end{cases} \qquad \cdots (3.12)$$

また $\mathcal{O}(\nu) \otimes_{\mathbb{C}} V^{-\nu}$ も次のような G-equivariant filtration をもつ。

$$\begin{cases} \mathcal{O}(\nu) \otimes_{\mathbb{C}} V^{-\nu} = \mathcal{U}^{(r-1)} \supset \mathcal{U}^{(r-2)} \supset \cdots \supset \mathcal{U}^{(0)} = 0 \\ \mathcal{U}^{(i)}/\mathcal{U}^{(i-1)} \simeq \mathcal{O}(\nu-\mu_i) \end{cases} \quad \cdots (3.13)$$

よって $\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} V_\nu$ 及び $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\nu) \otimes_{\mathbb{C}} V^{-\nu}$ は次のような $U(\mathfrak{g})$-equivariant filtration をもつ

$$\begin{cases} \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} V_\nu = \overline{\mathcal{V}}^{(1)} \supset \overline{\mathcal{V}}^{(2)} \supset \cdots \supset \overline{\mathcal{V}}^{(r)} = 0 \\ \overline{\mathcal{V}}^{(i)}/\overline{\mathcal{V}}^{(i+1)} \simeq \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\mu_i) \end{cases} \quad \cdots (3.14)$$

$$\begin{cases} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\nu) \otimes_{\mathbb{C}} V^{-\nu} = \overline{\mathcal{U}}^{(r-1)} \supset \overline{\mathcal{U}}^{(r-2)} \supset \cdots \supset \overline{\mathcal{U}}^{(0)} = 0 \\ \overline{\mathcal{U}}^{(i)}/\overline{\mathcal{U}}^{(i-1)} \simeq \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\nu-\mu_i) \end{cases} \quad \cdots (3.15)$$

$\bar{p}_\nu$, $\bar{i}_\nu$ はそれぞれ $\overline{\mathcal{V}}^{(1)} \longrightarrow \overline{\mathcal{V}}^{(1)}/\overline{\mathcal{V}}^{(2)}$, $\overline{\mathcal{U}}^{(1)} \longrightarrow \overline{\mathcal{U}}^{(r-1)}$ と一致する。

一般に $\mu \in P$ のとき $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\mu)$ は $D_{\lambda+\mu}$-module なので, Lemma 3.5 から $(z - \chi_{\lambda+\mu-\rho}(z)) \cdot (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\mu)) = 0$ $(\forall z \in \mathfrak{z})$。従って(3.14), (3.15) から

$$\prod_{i=1}^{r-1} (z - \chi_{\lambda+\mu_i-\rho}(z)) \cdot (\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} V_\nu) = 0 \qquad (\forall z \in \mathfrak{z})$$

$$\prod_{i=1}^{r-1} (z - \chi_{\lambda+\nu-\mu_i-\rho}(z)) \cdot (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\nu) \otimes_{\mathbb{C}} V^{-\nu}) = 0 \quad (\forall z \in \mathfrak{z})。$$

よって Lemma 3.7 により次の2つを示せばよい。

$$\chi_{\lambda+\mu_i-\rho} = \chi_{\lambda+\nu-\rho} \Rightarrow i=1 \quad \cdots (3.16)$$

$$\chi_{\lambda+\nu-\mu_i-\rho} = \chi_{\lambda-\rho} \Rightarrow i=1 \quad \cdots (3.17)$$

まず (3.16) を示す。$\chi_{\lambda+\mu_i-\rho} = \chi_{\lambda+\nu-\rho}$ とすると §3.2 から ある $w \in W$ が存在して $\lambda+\nu-\rho = w(\lambda+\mu_i-\rho)$。よって $(w(\lambda-\rho) - (\lambda-\rho)) + (w\mu_i - \nu) = 0$。$\lambda \in P^-$ なので $\lambda-\rho \in P^-$。よって $w(\lambda-\rho)-(\lambda-\rho) \geqq 0$。また $w\mu_i$ は V_ν の weight なので $w\mu_i - \nu \geqq 0$ 従って $w(\lambda-\rho) = (\lambda-\rho)$ から $w\mu_i = \nu$。

よって $w=1$, $\mu_i=\nu$ となり結局 $i=1$。

次に (3.17) を示す。$\chi_{\lambda+\nu-\mu_i-\rho}=\chi_{\lambda-\rho}$ とすると $w(\lambda-\rho)=\lambda+\nu-\mu_i-\rho$ となる $w\in W$ が存在する。よって $(\mu_i-\nu)+(w(\lambda-\rho)-(\lambda-\rho))=0$。同様の議論から $\mu_i=\nu$ となりやはり $i=1$。

以上で定理 3.2 が示された。

§4. 群作用をもつ Lie 環の表現と群作用をもつ D 加群

$\boxed{4.1}$ 群作用をもつ Lie 環の表現

G を $\mathbb{C}$ 上の連結半単純代数群, K を G の (Zariski topology に関する) 閉部分群として $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\,G$, $\mathfrak{k}=\mathrm{Lie}\,K$ とする。

「定義 4.1 $\mathbb{C}$-vector space M に $U(\mathfrak{g})$-module structure と K-module structure が与えられていて, 次の条件がみたされるときに M を $(\mathfrak{g},K)$-module という。

(i) K の M への作用は locally finite, algebraic。すなわち, 任意の $m_0\in M$ に対して, M の K-stable な有限次元部分空間 M_0 であって

$$\begin{cases} m_0\in M_0 \\ K\longrightarrow GL(M_0) \text{ は代数群の準同型} \end{cases}$$

なるものが存在する。

(ii) (i) により K の M への作用は微分できて M は $U(\mathfrak{k})$-module と

思えるが，これは与えられた $U(\mathfrak{g})$-module structure を制限したものと一致する。

(iii) $k\cdot(A\cdot m)=(\mathrm{Ad}(k)A)\cdot(k\cdot m)$　　$({}^\forall k\in K, {}^\forall A\in\mathfrak{g}, {}^\forall m\in M)$」

つまり，$U(\mathfrak{g})$-module であって $\mathfrak{g}$ の作用と compatible な K の作用をもつものを $(\mathfrak{g},K)$-module という。category $M(\mathfrak{g},K)$ を

$$M(\mathfrak{g},K)=\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{g},K)\text{-module であって } U(\mathfrak{g})\text{-module として有限生成}\\ \text{かつ trivial central character をもつもの}\end{array}\right\}$$

により定義する。表現論で重要なのは次の2つの場合である。

(a) $K=B$ (Borel 部分群)

(b) $K=G^\theta=\{g\in G\mid \theta(g)=g\}$ 但し θ は G の involutive automorphism

(a) の場合は §5, §6 で考える highest weight module に対応する。(b) の場合は実半単純 Lie 群の admissible 表現に対応する。

$\boxed{4.2}$ 群作用をもつ D 加群

Y を $\mathbb{C}$ 上の non-singular algebraic variety，K を $\mathbb{C}$ 上の代数群として K の Y への (algebraic な) 作用が与えられているものとする。

$K\times Y\xrightarrow{p_2}Y$，$K\times Y\xrightarrow{\sigma}Y$，$K\times K\xrightarrow{m}K$ を $p_2(k,y)=y$，$\sigma(k,y)=ky$，$m(k_1,k_2)=k_1k_2$ で定める。

「<u>定義 4.2</u>　$\mathcal{M}$ を D_Y-module とする。$D_{K\times Y}$-module としての同型 $p_2^+\mathcal{M} \xrightarrow[\sim]{\varphi} \sigma^+\mathcal{M}$ であって cocycle condition をみたすものが与えられているとき，$\mathcal{M}$ を (D_Y, K)-module という。ここで cocycle condition とは次の diagram の可換性である。

$$
\begin{tikzcd}
f_1^+\mathcal{M} = p_{23}^+ p_2^+\mathcal{M} \arrow[rr, "p_{23}^+\varphi", "\sim"'] & & p_{23}^+\sigma^+\mathcal{M} = f_2^+\mathcal{M} \\
(m\times 1_Y)^+ p_2^+\mathcal{M} \arrow[d, "(m\times 1_Y)^+\varphi"', "\wr"] & & (1_K\times\sigma)^+ p_2^+\mathcal{M} \arrow[lld, "(1_K\times\sigma)^+\varphi", "\wr"'] \\
(m\times 1_Y)^+\sigma^+\mathcal{M} = f_3^+\mathcal{M} = (1_K\times\sigma)^+\sigma^+\mathcal{M} & &
\end{tikzcd}
$$

$f_i : K\times K\times Y \longrightarrow Y \quad (i=1,2,3)$

$f_1(k_1,k_2,y) = y$,　$f_2(k_1,k_2,y) = k_2 y$,　$f_3(k_1,k_2,y) = k_1k_2 y$ 」

(D_Y, K)-module であって，D_Y-module として coherent なもののつくる category を $M(D_Y, K)$ とかく。

「<u>Lemma 4.3</u>　Y 上の K-orbit の数が有限個であるとする。このとき $\mathcal{M}\in M(D_Y,K)$ ならば，$\mathcal{M}$ は D_Y-module として regular holonomic になる。」

筆者はこの事実を柏原氏に教わった。証明はさほど難しくはない（例えば[T4]を参照）。なお analytic category では成立しない事に注意されたい（holonomic であることはいえる。）。

証明について簡単に説明する。

<u>Step1</u> <u>$Y=K$ のとき</u> $\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}_Y$ の何個かの直和になることがわかる。よってOK。

<u>Step2</u> <u>Y がひとつの orbit からなるとき</u> smooth morphism $K \xrightarrow{p} Y = K/K_1$ を考えると $p^*\mathcal{M}$ が regular holonomic なので $\mathcal{M}$ も regular holonomic。

<u>Step3</u> <u>一般の場合</u> $\mathcal{M}$ は各 orbit 上の regular holonomic system を "くっつけて" 得られる。よってOK。

analytic category での regularity は無限遠点での regularity を含まないので，Step3 で "くっつける" ときに orbit の closure での挙動が問題になって証明がうまくいかないのである。

$\boxed{4.3}$ <u>equivariant version of Beilinson-Bernstein correspondence</u>

G を $\mathbb{C}$ 上の連結半単純代数群，K を G の閉部分群，X を G の旗多様体とする。

「<u>Lemma 4.4</u> Beilinson-Bernstein 対応（系1.5）により次の category 同値：

$$M(\mathfrak{g}, K) \simeq M(D_X, K)$$

が導びかれる。」

（証明） $\mathcal{M}$ を coherent D_X-module とする。$K\times X$ は D-affine なので $D_{K\times X}$-module の homomorphism

$$p_2^+\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \sigma^+\mathcal{M}$$

を与えることは，$\Gamma(K\times X, D_{K\times X})$-module の homomorphism

$$\Gamma(K\times X, p_2^+\mathcal{M}) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \Gamma(K\times X, \sigma^+\mathcal{M})$$

を与えることと同値である。

さて $\Gamma(K\times X, D_{K\times X}) \cong \Gamma(K\times X, D_K \boxtimes D_X) \cong \Gamma(K, D_K) \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma(X, D_X)$，また $\Gamma(K, D_K) \cong \Gamma(K, \mathcal{O}_K) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{k})$ ($\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}\,K$) である。

$$\Gamma(K\times X, p_2^+\mathcal{M}) \cong \Gamma(K\times X, \mathcal{O}_K \boxtimes \mathcal{M})$$
$$\cong \Gamma(K, \mathcal{O}_K) \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma(X, \mathcal{M}) \qquad \cdots\cdots (4.1)$$

$K\times X \xrightarrow{\varepsilon_i} K\times X$ $(i=1,2)$ を $\varepsilon_1(k, x) = (k, k\cdot x)$，$\varepsilon_2(k, x) = (k, k^{-1}\cdot x)$ で定めるとき，$\varepsilon_1 = \varepsilon_2^{-1}$，$p_2 \circ \varepsilon_1 = \sigma$ なので，

$$\Gamma(K\times X, \sigma^+\mathcal{M}) \cong \Gamma(K\times X, \varepsilon_1^+ p_2^+\mathcal{M})$$
$$\cong \Gamma(K\times X, \varepsilon_{2\downarrow} p_2^+\mathcal{M})$$
$$\cong \Gamma(K\times X, p_2^+\mathcal{M})$$
$$\cong \Gamma(K, \mathcal{O}_K) \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma(X, \mathcal{M}) \qquad \cdots\cdots (4.2)$$

となる。ただし $\Gamma(K, \mathcal{O}_K) \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma(X, \mathcal{M})$ を (4.1) により $\Gamma(K, D_K) \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma(X, D_X)$-module とみたものと，(4.2) により $\Gamma(K, D_K) \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma(X, D_X)$-module とみたものは

ちがうことに注意。

$\Gamma(K,\mathcal{O}_K)$ の作用はどちらでも同じなので，$\mathcal{D}_{K\times X}$-module の homomorphism $p_2^+\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} a^+\mathcal{M}$ を与えることは

$$\tilde{\varphi} \in \mathrm{End}_{\Gamma(K,\mathcal{O}_K)}(\Gamma(K,\mathcal{O}_K) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \Gamma(X,\mathcal{M}))$$

であって $U(\mathfrak{g})$ の作用及び $U(\mathfrak{k})$ の作用に関にある compatibility condition（ここでは書き下さない）をみたすものを与えることと同値になる（$U(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \Gamma(X,\mathcal{D}_X)$, $\Gamma(K,\mathcal{D}_K) \cong \Gamma(K,\mathcal{O}_K) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} U(\mathfrak{k})$ ）。

さて φ が同型で cocycle condition をみたすことは，$\Gamma(X,\mathcal{M})$ の K-module structure で定義 4.1 (i) をみたすものが

$$k\cdot m = \sum_i f_i(k)\, m_i \qquad \text{if} \quad \tilde{\varphi}(1\otimes m) = \sum_i f_i \otimes m_i$$

により入る事と同値である。このとき，$U(\mathfrak{g})$ の作用に関する compatibility condition は定義 4.1 (iii) と同値，また $U(\mathfrak{k})$ の作用に関する compatibility condition は定義 4.1 (ii) と同値。以上で示された。

さて表現論で重要な場合（§4.1 の (a), (b) のとき）には X 上の K-orbit の数は有限である事が知られている。(a) のときはよく知られた Bruhat 分解，(b) のときは松本氏の結果。従って Lemma 4.3, 4.4 により，

「表現論で重要な$U(\mathfrak{g})$-moduleに対応するD_X-moduleはregular holonomicである。」

そこでregular holonomic D-moduleに関する強力な一般論を用いて表現論の研究を行うことができる訳である。

§5. Kazhdan-Lusztig予想とは何か?

5.1 Verma moduleとその simple quotient

Gを$\mathbb{C}$上の連結半単純代数群，BをGのBorel部分群，TをBに含まれるGの極大torusとしてG, B, TのLie環をそれぞれ$\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}$とする。$(G, T)$の正root系を$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha)$となるようにとり，$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$，$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$とおく。

「定義5.1　$\lambda \in \mathfrak{t}^*$に対して$U(\mathfrak{g})$-module $M(\lambda)$を

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) / \left(U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+ + \sum_{H \in \mathfrak{t}} U(\mathfrak{g})\,(H - (\lambda - \rho)(H)1) \right)$$

により定義して，これをhighest weight $\lambda - \rho$をもつVerma moduleという。」

以下Verma moduleに関する基本的性質をのべる。

(1) $M(\lambda)$のnon-zero quotientで既約なものがただ一つある。
(これを$L(\lambda)$とかく。)

(2) $M(\lambda)$, $L(\lambda)$ は $\mathfrak{h}$-module として semisimple で $\mathfrak{b}$-module として locally finite。

(3) $M(\lambda)$, $L(\lambda)$ は central character χ_λ をもつ。

(4) $M(\lambda)$ は 有限の組成系 をもち, 各組成因子は ある $w \in W$ に対する $L(w\lambda)$ と同型。

$M(\lambda)$, $L(\lambda)$ を扱うのに 手頃な category を 定義しよう。central character χ を ひとつ 決めて

$$A_\chi = \left\{ \begin{array}{l} \text{central character } \chi \text{ をもつ 有限生成 } U(\mathfrak{g})\text{-module で} \\ \mathfrak{h}\text{-module として semisimple, } \mathfrak{b}\text{-module として locally finite なもの} \end{array} \right\}$$

とおく。$M(\lambda)$, $L(\lambda)$ は A_{χ_λ} の object であるが さらに

(5) $K(A_\chi) = (A_\chi$ の Grothendieck 群$)$

$$= \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathfrak{h}^* \\ \chi_\lambda = \chi}} \mathbb{Z}[M(\lambda)] = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathfrak{h}^* \\ \chi_\lambda = \chi}} \mathbb{Z}[L(\lambda)]$$

そこで

問題 5.2 $K(A_\chi)$ の 2つの basis $\{[M(\lambda)] \mid \lambda \in \mathfrak{h}^*, \chi_\lambda = \chi\}$, $\{[L(\lambda)] \mid \lambda \in \mathfrak{h}^*, \chi_\lambda = \chi\}$ の 関係を 与えよ。

この問題は $M(\lambda)$ の組成列に $L(\lambda)$ が何回でてくるかを決める事と同値である。また指標を考えるという立場からは次のような見方もできる。

$M \in \mathcal{A}_\chi$ に対してその指標を

$$\mathrm{ch}(M) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \dim M(\mathfrak{h}, \mu) e^{\mu}$$

ただし $M(\mathfrak{h}, \mu) = \{m \in M \mid H \cdot m = \mu(H) m \quad (\forall H \in \mathfrak{h})\}$

で定義する。定義からただちに

$$\mathrm{ch}(M(\lambda)) = \frac{e^{\lambda-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+}(1-e^{-\alpha})} = e^{\lambda-\rho} \prod_{\alpha \in \Delta^+}(1+e^{-\alpha}+e^{-2\alpha}+e^{-3\alpha}+\cdots\cdots)$$

がわかる。よって $K(\mathcal{A}_\chi)$ 中で

$$[L(\lambda)] = \sum_{\mu} a_{\mu,\lambda} [M(\mu)] \qquad (a_{\mu,\lambda} \in \mathbb{Z})$$

と書けるとすると，

$$\mathrm{ch}(L(\lambda)) = \frac{\sum_{\mu} a_{\mu,\lambda} e^{\mu-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+}(1-e^{-\alpha})}$$

となる。従って問題5.2は $\mathrm{ch}(L(\lambda))$ を求めよという問題とも同値である。

$\mu \in P^+$ のとき $V^{\mu} = L(\mu+\rho)$ であるが（§2.3），Weyl の指標公式（定理2.3）から

$$\mathrm{ch}(V^{\mu}) = \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)} e^{w(\mu+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})},$$

よって

$$[L(\mu+\rho)] = \sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}[M(w(\mu+\rho))] \qquad (\mu\in P^+)$$

となるので，Weylの指標公式は問題5.2の部分的解答を与えている。言い換えれば，我々の問題はWeylの指標公式の一般化をもとめよという事である。

さて $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ について $\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbb{Z}$ となる $\alpha\in\Delta$ がないときは $M(\lambda)=L(\lambda)$ となり問題はtrivial。$\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbb{Z}$ となる α が増えれば増えるほど問題は複雑になる。一番面倒なのは $\lambda\in P$ のときであるが，この場合はTranslation principleというものにより，χ =(trivial central character) $=\chi_\rho=\chi_{-\rho}$ のときに帰着される。そこで $\chi=\chi_\rho$ のときを考えよう。このとき§4.1の記号で

$$A_{\chi_\rho} = M(\mathfrak{g}, B)$$

となることがすぐわかる。また $M_w=M(-w\rho)$，$L_w=L(-w\rho)$ とおくとき，

$$K(M(\mathfrak{g},B)) = \bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[M_w] = \bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[L_w]$$

となる。$y, w\in W$ に対して $a_{y,w}\in\mathbb{Z}$ を

$$[L_w] = \sum_{y\in W} a_{yw}[M_y]$$

で定める。このa_{y,w}を求めるのが我々の問題である。

例5.3 $G=SL(2,\mathbb{C})$のとき。例1.7の記号を用いる。

$\mathfrak{b}=\mathbb{C}H\oplus\mathbb{C}E_+$, $\mathfrak{t}=\mathbb{C}H$, $\mathfrak{n}^+=\mathbb{C}E_+$ととれる。$W=\{1,s\}$で

$$M_e=U(\mathfrak{g})/(U(\mathfrak{g})E^+ + U(\mathfrak{g})(H+2))$$

$$M_s=U(\mathfrak{g})/(U(\mathfrak{g})E^+ + U(\mathfrak{g})H)$$

となる。よって

$$M_e=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_{\leq -1}}\mathbb{C}v_j \quad (v_j\neq 0)$$

$$M_s=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_{\leq 0}}\mathbb{C}u_j \quad (u_j\neq 0)$$

で

$$H\cdot v_j=2jv_j\ ,\ E_-\cdot v_j=v_{j-1}\ ,\ E_+\cdot v_j=-j(j+1)v_{j+1}$$

$$H\cdot u_j=2ju_j\ ,\ E_-\cdot u_j=u_{j-1}\ ,\ E_+u_j=-j(j+1)u_{j+1}$$

と書ける。従って $N=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_{\leq -1}}\mathbb{C}u_j$ とおくと，NはM_sの$U(\mathfrak{g})$-submoduleでM_eと同型になる。また$M_s/N\cong\mathbb{C}=$(trivial $U(\mathfrak{g})$-module)である。

M_eの既約性も簡単にわかって

$$L_e=M_e\ ,\ L_s=M_s/N\cong\mathbb{C}$$

となる。従って

$$[L_e]=[M_e]\ ,\ [L_s]=[M_s]-[M_e]$$

がわかった。∎

ここで問題の解答を書いておこう。

「<u>定理 5.4</u>（[BK], [BB1], Kazhdan-Lusztig 予想 [KL1]）

$$a_{yw} = (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)$$ 」

証明は §6 で述べる。$P_{y,w}$ の定義は §5.2 で与える。

$\boxed{5.2}$ Kazhdan-Lusztig 多項式

Weyl 群 W は S を生成系とする Coxeter 群なのでその Hecke 代数 $H(W)$ が定義される。これは Laurent polynomial ring $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 上の algebra であって $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 上の free basis $\{T_w \mid w \in W\}$ をもち、次の関係式をみたすものである。

$$\begin{cases} (T_s+1)(T_s-q)=0 & (s \in S) \\ T_{w_1} T_{w_2} = T_{w_1 w_2} & (\ell(w_1)+\ell(w_2)=\ell(w_1 w_2)) \end{cases}$$

W 上の半順序（Bruhat order）を次で定義する。$w \in W$, $\ell(w)=k$ のとき $w = s_1 \cdots s_k$ ($s_i \in S$) とかける。このとき

$$y \leqq w \iff \begin{cases} 1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqq k \text{ で} \\ y = s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_r} \text{ となるものがある。} \end{cases}$$

これは w を S の k 個の元の積でかく書き方によらない。

「<u>Lemma 5.5</u> ([KL1])

$y, w \in W$ に対して $P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ で次をみたすものが唯一つ定まる。

$$\begin{cases} P_{y,w}(q) = 0 & (y \not\leq w) \\ P_{w,w}(q) = 1 \\ \deg P_{y,w}(q) \leq \frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(y) - 1) & (y < w) \\ \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q) T_y = q^{\ell(w)} \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q^{-1}) T_{y^{-1}}^{-1} \end{cases}$$ 」

この $P_{y,w}(q)$ を Kazhdan-Lusztig 多項式という。

「<u>例 5.6</u> $W = \{e, s\}$ が $G = SL(2, \mathbb{C})$ の Weyl 群のとき

$P_{e,e}(q) = P_{s,s}(q) = P_{e,s}(q) = 1 \qquad P_{s,e}(q) = 0$ 」

次に Kazhdan-Lusztig 多項式の幾何学的意味を述べる。

Bruhat 分解 $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$ により，旗多様体 $X = G/B$ は $X = \bigsqcup_{w \in W} X_w$ $(X_w = BwB/B)$ なる B-orbit への分解をもつ。さらに次のことが知られている。

$$\begin{cases} X_w \text{ は次元 } \ell(w) \text{ の affine space } \mathbb{C}^{\ell(w)} \text{ と同型} \\ \overline{X_w} \supset X_y \iff w \geq y \end{cases}$$

X_w を Schubert cell, $\overline{X_w}$ を Schubert variety と呼ぶ。さて X_w 上の constant sheaf $\mathbb{C}_{X_w}$ の $\overline{X_w}$ への minimal extension を ${}^{\pi}\mathbb{C}_{X_w}$ とおく。

これは $\mathbb{C}_{\overline{X}_w}$－module の bounded complex（正確には derived category の object）で

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{H}^i({}^\pi\mathbb{C}_{X_w})|X_w = \begin{cases}\mathbb{C}_{X_w} & i=0\\ 0 & i\neq 0\end{cases} & D({}^\pi\mathbb{C}_{X_w}) \simeq {}^\pi\mathbb{C}_{X_w}[2\dim \overline{X}_w] \\ \mathcal{H}^i({}^\pi\mathbb{C}_{X_w})=0 \quad (i<0) & \text{ここで } D({}^\pi\mathbb{C}_{X_w}) \text{ は } {}^\pi\mathbb{C}_{X_w} \text{ の Verdier dual} \\ \mathcal{H}^i({}^\pi\mathbb{C}_{X_w}) \text{ は constructible} & \\ (\mathcal{H}^i({}^\pi\mathbb{C}_{X_w}) \text{ の support の次元}) < \dim \overline{X}_w - i \quad (i>0) & \end{array}\right.$$

をみたすものとして特徴づけられる。$\overline{X_w}=\bigsqcup_{y\leq w} X_y$ は $\overline{X_w}$ の Whitney stratification なので $\mathcal{H}^i({}^\pi\mathbb{C}_{X_w})|X_y$ は任意の i と任意 $y\leq w$ に対して locally constant である。

定理 5.7（[KL2]） $y\leq w$ のとき

$$\sum_j \dim \mathcal{H}^j({}^\pi\mathbb{C}_{X_w})_{yB}\, q^{\frac{j}{2}} = P_{yw}(q)。$$

よって特に $\mathcal{H}^j({}^\pi\mathbb{C}_{X_w})=0$（$j$:odd）。また

$$\sum_j (-1)^j \dim \mathcal{H}^j({}^\pi\mathbb{C}_{X_w})_{yB} = P_{yw}(1)$$ ∎

定理の証明は次のようにしてなされる。G, X 等は有限体上での対応物をもつので，有限体上で $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$－sheaf に関する対応する結果を示せばよい。これは Weil 予想等の Deligne による $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$－sheaf の weight に関する深い定理を用いて示される。

なお Deligne－Gabber－Beilinson－Bernstein の分解定理を認めれば $\mathbb{C}$ 上での簡明な証明を与えることもできるが（[Sp]），分解定理の証明

自体はやはり有限体にもっていって行なわれる。また斉藤盛彦氏の Hodge module の理論を使えば完全に $\mathbb{C}$ 上での証明もできる。

いずれにしろ例5.6の大道具を用いる必要はある。

「$\underline{\underline{\text{例} 5.8}}$　$G=SL(2,\mathbb{C})$, $X=\mathbb{P}^1$ のとき。$B=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} a\in\mathbb{C}^* \\ b\in\mathbb{C}\end{matrix}\right\}$ ととると例 1.7 の記号で

$$X = X_e \sqcup X_s$$

$$X_e = \{x=0\} = \{z=\infty\} = (1\text{点})$$

$$X_s = X - X_e \cong \mathbb{C}$$

この場合 ${}^{\pi}\mathbb{C}_{X_e} = \mathbb{C}_{X_e}$, ${}^{\pi}\mathbb{C}_{X_s} = \mathbb{C}_X$ となる。G が $SL(2,\mathbb{C})$ 以外のときは Schubert variety の singularity はそう簡単ではないので ${}^{\pi}\mathbb{C}_{X_w}$ はこう簡単にはならない。」

§6. Kazhdan–Lusztig 予想の証明

$\boxed{6.1}$　Beilinson–Bernstein category 同値（系1.5）で M_w, L_w に対応する D_X-module をそれぞれ $\mathcal{M}_w$, $\mathcal{L}_w$ とする。すなわち

$$\mathcal{M}_w = D_X \otimes M_w \qquad \mathcal{L}_w = D_X \otimes L_w \ .$$

$K(M(\mathfrak{g},B))$ の2つの basis $\{[M_w] \mid w\in W\}$, $\{[L_w] \mid w \in W\}$ の変換行列を求めるのが目標であった。Lemma 4.4 により $M(\mathfrak{g},B) \simeq M(D_X,B)$

なので、これは $K(M(D_X, B))$ の2つの basis $\{[\mathcal{M}_w] \mid w \in W\}$, $\{[\mathcal{L}_w] \mid w \in W\}$ の変換行列を求める事と同じである。この問題を考えるには $\mathcal{M}_w$, $\mathcal{L}_w$ がどのような D_X-module であるかを知る必要がある。Lemma 4.3 によりこれらが regular holonomic であることはわかっている。

「<u>例6.1</u>　$G = SL(2,\mathbb{C})$, $X = \mathbb{P}^1$ のときに $\mathcal{M}_w$, $\mathcal{L}_w$ を求めてみよう。

例5.3により

$$M_e = L_e = U(\mathfrak{g})/(U(\mathfrak{g})E^+ + U(\mathfrak{g})(H+2))$$

$$M_s = U(\mathfrak{g})/(U(\mathfrak{g})E^+ + U(\mathfrak{g})H)$$

$$L_s = U(\mathfrak{g})/(U(\mathfrak{g})E^+ + U(\mathfrak{g})H + U(\mathfrak{g})E^-)$$

よって

$$\mathcal{M}_e = \mathcal{L}_e = D_X/(D_X\Phi(E^+) + D_X(\Phi(H)+2))$$

$$\mathcal{M}_s = D_X/(D_X\Phi(E^+) + D_X\Phi(H))$$

$$\mathcal{L}_s = D_X/(D_X\Phi(E^+) + D_X\Phi(H) + D_X\Phi(E^-))$$

例1.7により、x-座標では

$$\mathcal{M}_e = \mathcal{L}_e = D_X/(D_X x^2\frac{d}{dx} + D_X(x\frac{d}{dx}+1)) = D_X/D_X x$$

$$\mathcal{M}_s = D_X/D_X x\frac{d}{dx}$$

$$\mathcal{L}_s = D_X/D_X\frac{d}{dx}$$

z-座標では

$$\mathcal{M}_e = \mathcal{L}_e = D_X/(D_X\frac{d}{dz} + D_X(z\frac{d}{dz}-1)) = 0$$

$$\mathcal{M}_s = D_X / D_X \frac{d}{dz}$$

$$\mathcal{L}_s = D_X / D_X \frac{d}{dz}$$

となる。よって

$$\begin{cases} \mathcal{M}_e = \mathcal{L}_e = D_X \delta & (\delta \text{ は } x=0 \text{ に support をもつデルタ関数}) \\ \mathcal{L}_s = \mathcal{O}_X & \\ \mathcal{M}_s = D_X Y & (Y \text{ は } \frac{d}{dx}Y = \delta \text{ となるヘビーサイド関数}) \end{cases}$$

がわかった。┛

$\boxed{6.2}$ $\mathcal{N}_w$ について

$\mathcal{N}_w = \mathcal{H}_{X_w}^{\operatorname{codim} X_w}(\mathcal{O}_X)$ とおく。$\mathcal{O}_X \in M(D_X, B)$, X_w は B-stable なので $\mathcal{N}_w \in M(D_X, B)$ である。$\mathcal{M}_w, \mathcal{L}_w$ を調べるための補助として，まず $\mathcal{N}_w$ の性質をみる。

$\mathfrak{n}_w = \bigoplus_{\alpha \in w(\Delta^-)} \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{n}_w^1 = \bigoplus_{\alpha \in w(\Delta^-) \cap \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ として $V_w = \exp(\mathfrak{n}_w) wB/B \subset X$ とおく。V_w は X の affine open subset で

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{n}_w & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & V_w \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ \mathfrak{n}_w^1 & \xrightarrow{\sim} & X_w \end{array} \qquad \varphi(E) = \exp(E) wB \qquad \cdots\cdots (6.1)$$

となることが知られている。

┏**Lemma 6.2**

(i) $\mathcal{H}_{X_w}^i(\mathcal{O}_X) = 0 \quad (i \neq \operatorname{codim} X_w)$。

(ii) $\mathcal{H}^i_{\partial X_w}(\mathcal{N}_w) = 0 \quad (\forall i)$ 　ただし $\partial X_w = \overline{X_w} - X_w$

(iii) $ch(\Gamma(X, \mathcal{N}_w)) = ch(M_w)$。┘

(証明) (i) Beilinson-Bernstein category 同値は derived category にのびるので、$\mathbb{H}^i(X, \mathbb{R}\Gamma_{X_w}(\mathcal{O}_X)) = 0 \quad (i \neq \mathrm{codim} X_w)$ を示せばよい。

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{H}^i(X, \mathbb{R}\Gamma_{X_w}(\mathcal{O}_X)) \\
&= H^i(\mathbb{R}\Gamma(X, \mathbb{R}\Gamma_{X_w}(\mathcal{O}_X))) \\
&= H^i(\mathbb{R}\Gamma_{X_w}(X, \mathcal{O}_X)) \\
&= H^i(\mathbb{R}\Gamma_{X_w}(V_w, \mathcal{O}_{V_w})) \\
&= H^i_{X_w}(V_w, \mathcal{O}_{V_w})
\end{aligned}
$$

よって (6.1) から明らか。

(ii) (i) より $\mathbb{R}\Gamma_{\partial X_w}(\mathcal{N}_w) = \mathbb{R}\Gamma_{\partial X_w}\mathbb{R}\Gamma_{X_w}(\mathcal{O}_X) = 0 \quad (\partial X_w \cap X_w = \phi)$。よって明らか。

(iii) (i) の証明より $\Gamma(X, \mathcal{N}_w) = H^{\mathrm{codim} X_w}_{X_w}(V_w, \mathcal{O}_{V_w})$。$ch\,\Gamma(X, \mathcal{N}_w)$ をみるには $\Gamma(X, \mathcal{N}_w)$ の T-module としての構造のみをみればよい。(6.1) の φ は T-equivariant なので T-module $H^{\mathrm{codim} X_w}_{\mathfrak{n}_w^!}(\mathfrak{n}_w, \mathcal{O}_{\mathfrak{n}_w})$ を考えればよい。$w(\Delta^+) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, $w(\Delta^+) \cap \Delta^+ = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ として $E_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\alpha_i} - (0)$ を固定する。Killing form により $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を同一視するとき

$$
\left\{
\begin{aligned}
&A = \Gamma(\mathfrak{n}_w, \mathcal{O}_{\mathfrak{n}_w}) = \mathbb{C}[E_{\alpha_1}, \cdots, E_{\alpha_m}] \\
&\mathfrak{n}_w^! = \{x \in \mathfrak{n}_w \mid E_{\alpha_j}(x) = 0 \ (j = 1, \cdots, k)\}
\end{aligned}
\right.
$$

となる。よって T-module として

$$\Gamma(X, \mathcal{N}_w) \cong A_{E_{\alpha_1}\cdots E_{\alpha_k}} \Big/ \sum_{j=1}^{k} A_{E_{\alpha_1}\cdots \hat{E}_{\alpha_j}\cdots E_{\alpha_k}}$$

$$\cong \frac{\bigoplus_{\substack{j_p \in \mathbb{Z} \\ i_q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \mathbb{C}\, E_{\alpha_1}^{j_1} \cdots E_{\alpha_k}^{j_k} E_{\alpha_{k+1}}^{i_{k+1}} \cdots E_{\alpha_m}^{i_m}}{\bigoplus_{\substack{j_p \in \mathbb{Z} \\ i_q \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ \exists p \text{ s.t. } j_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \mathbb{C}\, E_{\alpha_1}^{j_1} \cdots E_{\alpha_k}^{j_k} E_{\alpha_{k+1}}^{i_{k+1}} \cdots E_{\alpha_m}^{i_m}}$$

$$\cong \bigoplus_{\substack{j_p \in \mathbb{Z}_{<0} \\ i_q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \mathbb{C}\, E_{\alpha_1}^{j_1} \cdots E_{\alpha_k}^{j_k} E_{\alpha_{k+1}}^{i_{k+1}} \cdots E_{\alpha_m}^{i_m} \text{。}$$

また $w\rho + \rho = \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha \in \Delta^+} w\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha \in w\Delta^+ \cap \Delta^+} \alpha + \sum_{\alpha \in w\Delta^+ \cap \Delta^-} \alpha + \sum_{\alpha \in w\Delta^+ \cap \Delta^+} \alpha + \sum_{\alpha \in w\Delta^- \cap \Delta^+} \alpha\right)$$

$$= \sum_{\alpha \in w\Delta^+ \cap \Delta^+} \alpha$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$$

従って $\operatorname{ch}(\Gamma(X, \mathcal{N}_w)) = \dfrac{e^{-(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}}{\prod_{i=1}^{k}(1-e^{-\alpha_i}) \prod_{i=k+1}^{m}(1-e^{\alpha_i})}$

$$= \frac{e^{-w\rho-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+ \cap w\Delta^+}(1-e^{-\alpha}) \prod_{\alpha \in \Delta^+ \cap w\Delta^-}(1-e^{-\alpha})}$$

$$= \frac{e^{-w\rho-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+}(1-e^{-\alpha})}$$

$$= \operatorname{ch}(M_w) \qquad \blacksquare$$

$\boxed{6.3}$ $\mathcal{M}_w$, $\mathcal{L}_w$ について

定理 6.3

(i) $\mathcal{L}_w \simeq \mathcal{L}(X, X_w)$

(ii) $\mathcal{M}_w \simeq \mathcal{N}_w^*$

ここで $\mathcal{L}(X,X_w)$, $\mathcal{N}_w^*$ について簡単に説明しておく。

$\mathcal{L}(X,X_w)$ は $\mathcal{H}^{\mathrm{codim}\, X_w}_{X_w}(\mathcal{O}_{X-\partial X_w})$ —— これは $X-\partial X_w$ 上の regular holonomic system —— の X 全体への minimal extension である。すなわち，$\mathcal{L}(X,X_w)$ は regular holonomic D_X-module であって

- $\mathcal{L}(X,X_w)|X-\partial X_w \cong \mathcal{H}^{\mathrm{codim}\, X_w}_{X_w}(\mathcal{O}_{X-\partial X_w})$
- $\mathcal{L}(X,X_w)$ は ∂X_w に support をもつ coherent quotient, coherent submodule をもたない。

で特徴づけられる。

$\mathcal{N}_w^*$ は $\mathcal{N}_w$ の dual すなわち，$\mathcal{N}_w^* = \mathcal{E}xt^{\dim X}_{D_X}(\mathcal{N}_w, D_X)\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega_X^{-1}$。ここで Ω_X は最高次の微分形式の層，Ω_X^{-1} はその $\mathcal{O}_X$-dual。D_X-module $\mathcal{N}$ の dual として思い浮ぶのは $\mathcal{H}om_{D_X}(\mathcal{N}, D_X)$ であるが，derived category で考えたほうがよいので $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{D_X}(\mathcal{N},D_X)$ を考える。これは右 D_X-module の complex なので左に直して $\mathbb{D}(\mathcal{N}) := \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D_X}(\mathcal{N},D_X)\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega_X^{-1}$ を考える。このとき $\mathcal{N}$ が holonomic ならば $\mathcal{H}^i(\mathbb{D}(\mathcal{N}))=0$ $(i\neq \dim X)$。そこで $\mathcal{H}^{\dim X}(\mathbb{D}(\mathcal{N})) = \mathcal{E}xt^{\dim X}_{D_X}(\mathcal{N},D_X)\otimes_{\mathcal{O}_X}\Omega_X^{-1}$ を holonomic D_X-module $\mathcal{N}$ の

dual と呼び $\mathcal{N}^*$ と書く。$\mathcal{N}^*$ も holonomic，また $\mathcal{N}$ が regular holonomic なら $\mathcal{N}^*$ も regular holonomic である。$\mathcal{N} \rightsquigarrow \mathcal{N}^*$ は contravariant な exact functor になる。さらに dual をとる操作は Riemann-Hilbert 対応では，constructible sheaf (の complex) の Verdier dual + shift に対応する。また $\mathcal{N}^{**} \simeq \mathcal{N}$ である。

(定理 6.3 の証明)

(i) $\ell(w)$ に関する induction で示す。

<u>$\ell(w)=0$ すなわち $w=e$ のとき</u> $\partial X_e = \phi$ なので $\mathcal{L}(X, X_e) \simeq \mathcal{N}_e$ である。$ch(\Gamma(X, \mathcal{N}_e)) = ch(M_e)$ であるが Verma module の一般論から M_e は既約で $M_e = L_e$。よって明らか。

<u>$\ell(w)>0$ のとき</u> $ch(\Gamma(X, \mathcal{N}_w)) = ch(M_w)$ なので Verma module の一般論から $\Gamma(X, \mathcal{N}_w)$ は組成因子として L_w を重複度 1 で含み，その他の因子は $y<w$ に対する L_y と同型。よって induction の仮定から

$$\mathcal{L}_w|X-\partial X_w \simeq \mathcal{N}_w|X-\partial X_w \simeq \mathcal{H}^{\operatorname{codim} X_w}_{X_w}(\mathcal{O}_{X-\partial X_w})$$

L_w は既約なので $\mathcal{L}_w$ は non-trivial な submodule，quotient を含まない。また Lemma 4.3 により $\mathcal{L}_w$ は regular holonomic。よって明らか。

(ii) (i) により $M(\mathcal{D}_X, B)$ の simple object は $\mathcal{L}_w \simeq \mathcal{L}(X, X_w)$ と同型。$\mathcal{L}(X, X_w)$ は self-dual なので任意の $\mathcal{N} \in M(\mathcal{D}_X, B)$ に対して $\mathcal{N}$ と $\mathcal{N}^*$ の組成因子は重複度をこめて一致する。特に $ch(\Gamma(X, \mathcal{N})) = ch(\Gamma(X, \mathcal{N}^*))$。よって特に $ch(\Gamma(X, \mathcal{N}_w^*)) = ch(\Gamma(X, \mathcal{N}_w)) = ch(M_w)$。Verma module

の一般論から

$$\begin{cases} M_w \xrightarrow{\exists f_1} \Gamma(X, \mathcal{N}_w^*) \longrightarrow {}^{\exists}N \to 0 \quad (\text{exact}) \\ N\text{の組成因子は } y<w \text{ に対する } L_y \text{ と同型} \end{cases} \quad \cdots (6.2)$$

よって D_X-module にうつって

$$\begin{cases} \mathcal{M}_w \xrightarrow{\exists f_2} \mathcal{N}_w^* \longrightarrow {}^{\exists}\mathcal{N} \to 0 \quad (\text{exact}) \\ \mathcal{N}\text{の組成因子は } y<w \text{ に対する } \mathcal{L}_y \text{ と同型} \end{cases} \quad \cdots (6.3)$$

(i)により $\mathrm{supp}\,\mathcal{N} \subset \partial X_w$。(6.3) の dual をとって

$$\begin{cases} \mathcal{M}_w^* \xleftarrow{\exists f_3} \mathcal{N}_w \longleftarrow \mathcal{N}^* \leftarrow 0 \quad (\text{exact}) \\ \mathrm{supp}\,\mathcal{N}^* \subset \partial X_w \end{cases} \quad \cdots (6.4)$$

ところが Lemma 6.2 (ii) により $\mathcal{H}^0_{\partial X_w}(\mathcal{N}_w) = 0$。よって $\mathcal{N}^* = 0$。よって f_3 は injective。よって f_1, f_2 は surjective。$\mathrm{ch}(M_w) = \mathrm{ch}(\Gamma(X, \mathcal{N}_w^*))$ なので、f_1 は同型写像。従って f_2 は同型写像。■

6.4 定理5.4の証明

Riemann-Hilbert 対応により

$$\{\text{regular holonomic } D_X\text{-module}\} \underset{\sim}{\xrightarrow{DR}} \{\text{perverse sheaf on } X\}$$

$$DR(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) = \Omega_X \overset{\mathbb{L}}{\underset{D_X}{\otimes}} \mathcal{M}[-\dim X]$$

§6.2, §6.3 から

$$DR(\mathcal{L}_w) = {}^{\pi}\mathbb{C}_{X_w}[-\mathrm{codim}\, X_w]$$

$$DR(\mathcal{N}_w) = \mathbb{C}_{X_w}[-\mathrm{codim}\, X_w]$$

$$DR(\mathcal{M}_w) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbb{C}_{X_w}[-\mathrm{codim} X_w], \mathbb{C}_X)$$
$$= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbb{C}_{X_w}, \mathbb{C}_X)[\mathrm{codim} X_w]$$

${}^{\pi}\mathbb{C}_{X_w}$, $\mathbb{C}_{X_w}$ はそれぞれ $\overline{X_w}$, X_w 上の complex あるいは sheaf であるが外側では zero として拡大して X 上の complex あるいは sheaf と思う。

$\mathbb{Z}$-linear map $f : K(M(D_X, B)) \longrightarrow \mathbb{Z}[W]$ を

$f([M]) = \sum_{y \in W} \left(\sum_i (-1)^{\dim X - i} \dim \mathcal{H}^i(DR(M))_{yB} \right) y$ で定める。

このとき

$$f([\mathcal{M}_w]) = f([\mathcal{N}_w])$$
$$= \sum_{y \in W} \left(\sum_i (-1)^{\dim X - i} \dim \mathcal{H}^i(\mathbb{C}_{X_w}[-\mathrm{codim} X_w])_{yB} \right) y$$
$$= (-1)^{\ell(w)} w$$

よって f は $\mathbb{Z}$-module としての同型を与える。一方 定理 5.7 により

$$f([\mathcal{L}_w]) = \sum_{y \in W} \left(\sum_i (-1)^{\dim X - i} \dim \mathcal{H}^i({}^{\pi}\mathbb{C}_{X_w}[-\mathrm{codim} X_w])_{yB} \right) y$$
$$= \sum_{y \in W} (-1)^{\ell(w)} P_{yw}(1)\, y$$
$$= \sum_{y \in W} (-1)^{\ell(w) - \ell(y)} P_{yw}(1)\, f([\mathcal{M}_y])$$

従って示された。

参考文献

まず本文と直接関係するものをあげる。

[BB1] Beilinson, A., Bernstein, J. : Localisation de g-modules. Comptes Rendus 292, 15-18 (1981)

[BK] Brylinski, J.-L., Kashiwara, M. : Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems. Invent. Math. 64, 387-410 (1981)

[KL1] Kazhdan, D., Lusztig, G. : Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. Invent. Math. 53, 165-184 (1979)

[KL2] Kazhdan, D., Lusztig, G. : Schubert varieties and Poincaré duality. Proc. Symp. in Pure Math. 36, 185-203 (1980)

定理3.1の証明で用いられたKostantの結果については

[Ko] Kostant, B. : Lie group representations on polynomial rings. Amer. J. Math. 85, 327-404 (1963)

Verma moduleに関する基本的な事柄については

[Ja] Jantzen, J. C. : Moduln mit einem höchsten Gewicht. Springer Lecture Notes in Math. 750, 1979.

Hecke algebraについては[KL1]の他に

[I] Iwahori, N. : On the structure of the Hecke ring of a Chevalley group over a finite field. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec 1A 10, 215-236 (1964)

次にD加群の理論の表現論への応用に関する論文を思いつくままにあげる。

[BB2] Beilinson, A., Bernstein, J. : A generalization of Casselman's submodule theorem, Progress in Math. 40, pp.35-52, Birkhauser, 1983.

[B] Beilinson, A. : Localisation of representations of reductive Lie algebras. Proc. International Congress of Math. Warszawa, 1983.

[BoB] Borho, W., Brylinski, J.-L. : Differential operators on homogeneous spaces. I. II. III. Invent. Math. 69, 437-476 (1982), preprint, Invent. Math. 80, 1-68 (1985)

[CC] Cassian, L., Collingwood, D. : Complex geometry and the assymptotics of Harish-Chandra modules for real reductive groups. I. II. Trans. Amer. Math. Soc. to appear, Invent. Math. 86, 255-286 (1986)

[G1] Ginsburg, V. : Characteristic varieties and vanishing cycles. Invent. Math. 84, 327-402 (1986)

[G2] Ginsburg, V. : g-modules, Springer's representations and bivariant Chern classes. Adv. Math. 61, 1-48 (1986)

[G3] Ginsburg, V. : Lagrangean construction for representations of Hecke algebras. Adv. Math. 63, 100-112 (1987)

[HK1] Hotta, R., Kashiwara, M. : The invariant holonomic systems on a semisimple Lie algebra. Invent. Math. 75, 327-358 (1984)

[HK2] Hotta, R., Kashiwara, M. : Quotients of the Harish-Chandra systems by primitive ideals. Progress in Math. 60, Birkhauser, 1985.

[KT] Kashiwara, M., Tanisaki, T. : The characteristic cycles of holonomic systems on a flag manifold. Invent. Math. 77, 185-198 (1984)

[LV] Lusztig, G., Vogan, D. : Singularities of closures of K-orbits on flag manifolds. Invent. Math. 71, 365-379 (1983)

[Sp] Springer, T. A. : Quelque applications de la cohomologie d'intersection. Séminaire Bourbaki, exposé 589. Astérisque 92-93, 249-273 (1982)

[T1] Tanisaki, T. : Holonomic systems on a flag variety associated to Harish-Chandra modules and representations of a Weyl group. Adv. St. in Pure Math. 6, 139-154 (1985)

[T2] Tanisaki, T. : Hodge modules, equivariant K-theory and Hecke algebras. preprint.

[T3] Tanisaki, T. : Characteristic varieties of highest weight modules and primitive quotients. Adv. St. in Pure Math. to appear

[T4] Tanisaki, T. : Twisted differential operators and affine Weyl groups. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math. to appear

[V] Vogan, D. : Irreducible characters of semisimple Lie groups. III. Invent. Math. 71, 381-417 (1983)