数理解析研究所講究録
第668巻 1988年 120-214

$\mathcal{D}$加群と微分方程式

数理研　佐藤幹夫述
東北大　近野俊明記

$\mathcal{D}$-加群と微分方程式 Contents

1. $\mathcal{D}$-加群と非線型可積分系

1. intrinsic な微分方程式の捉え方 (coherent $\mathcal{D}$-module)

2. 微分方程式の解の表現 — Hom と Ext —

3. Soliton 解が線型微分方程式の無限小変形として捉えられる事

2. 微分方程式系の代数解析

7/1
1. 歴史及び雑談
2. 代数幾何 (可換な場合) の analogy による微分方程式の捉え方
   - 可換な場合
   - 非可換環の局所化について (その1)
     特に Ore - 浅野の場合

7/2
   - 図形 $\begin{tikzcd} A \arrow[d] \arrow[dr, "\sim"] & \\ R \arrow[r] & V \end{tikzcd}$ (53p 参照) が、ある有限性の仮定を置いて微分方程式を表現する事

7/3
   - 差分と微分

   補足 仮定2 (60p) が intrinsic な条件で置き換えられる事

3. 非線型微分方程式の解の無限小変形
   - tangent, cotangent の代数的定義
   - 微分方程式の解の無限小変形
   - tangent, cotangent による、微分方程式の解の無限小変形の intrinsic な捉え方 (その表現が coherent $\mathcal{D}$ 加群になる事)

7/4
4. 局所化の代数的理論
   - von Neumann 環 特に Boole 環の局所化
   - 一般の非可換環の局所化について (その2)
     特に Johnson - 内海の場合

   - Grothendieck category と R 加群の category について

「$\mathcal{D}$加群と非線型可積分系」

去年、談話会やScience Seminor で、いろいろ同じような話をしましたが、基本的に私の考えは若い時から、ちっとも進歩がありません。

最初に若い頃に勉強した本の影響で考えができてしまったのか、解析をやるにも大体、代数の延長という考えが基本でして。科学の歴史も私流に見ていると、自分の考えは変える必要がないと、今でも頑固に思っているわけです。

自然科学の方が、── 物理帝国主義という言葉があるそうなんですが ── 何でもかんでも物理化してくる、という傾向があります。そのためか、他の分野まで、例えば天文学という言葉がだんだん天体物理学とか宇宙物理学になったり、生物学が、今、分子生物学とか何とか言ってますが、----。とにかく、何とか物理学という言葉がたくさんできています。

数学でも、ギリシャ時代の数学は、あまり代数的な面が少なかったのかもしれませんけれども。いずれにしても、中世の数学、アラビアから来てるのだそうですが。私、あまり歴史は知りませんが、代数の長い歴史があって、Descartes 更には解析学のNewton のような人の中で近代的な解析学が

生まれてきたのだけれど、やっぱり代数の延長という特徴があると思うんで。それが日本でも関孝和を初めとする和算家の仕事というのは、やはり代数的な仕事が多いと思います。

だから、幾何学の問題にしても、Europe ですと、自然現象科学の問題にしても、方程式というか、代数的な方法で扱うということが多かったわけで。そのせいか old - fashioned な考え方というか、18・19世紀的な考え方が出られません。

そういう見地から、微分方程式というものも代数的に捉える方が、ぼくには自然に思える。最初にそういうことを体系的に話したのは、1960年の春に、東京大学で毎年2回、春、秋に大談話会というのをやりますので、その時に話させていただきました。

昔、超函数の話を、58年の数学会の総合講演で話をさせていただいたんですが、先だっての総合講演の時にも、また同じような話をしたものだから、小松さんから、「その話は、聴いたことがある。」、と言われてしまいました。

明日からの講義は、非線型微分方程式については、ぼくは代数的に記述すべきだという風に考えているわけで、そのことをお話しさせていただくつもりなんですが、今日の話は、その前奏として聴いていただけると思います。

特に、線型微分方程式に限定して申しますと、Pという線型微分作用素というものをもってくる。uを、未知関数あるいは従属変数として、Pをuに作用させて0になるような関数を求めよ、というのが、一番簡単な形の単独な線型微分方程式です。

常微分とか偏微分とかいうのは、変数が1コかあるいはそれ以上か、という違いしかありませんから、別に区別する必要はないと思いますが。

で、未知関数もたくさんある場合。例えば、u_i $(0\leq i<m)$とmコあるとすると、方程式もたくさん必要になってくる。

$$\sum_i P_{ji}u_i = 0 \qquad (0\leq j<n) \quad \text{----} \;①$$

というような方程式を、同時に満たすようなu_i $(0\leq i<m)$を求めよ。これが線型微分方程式の問題ですね。まだ、いろんな問題が出てきます。局所的な問題もあれば、大局的な問題もある。

それから、解を求めよ、と言ってもどんな範囲で解を求めるか。解析関数の範囲で解を求める場合もあれば、もっと緩い族の中で、例えば超函数という範囲で解を求めるように、解の領域を広げて考えることも必要になる。また、可換環における局所化にあたることをやる。まあ、解析的な場合、それに当るものが非可換環になるわけですが。

微分作用素全体は、非可換環をつくるわけですが、それに対する一種の局所化の理論がございます。これは、局所理論と言わないで、超局所理論という。（幾何学的な image から言うと、局所化と違う側面が非可換性の方から出てまいりますので、超局所化と申しております。）

それは、多様体、代数幾何における、あるいは、可換環論における、局所化、あるいは、局所環をつくったり、完備化したり、というような一連の process、と同様に代数的には理解できます。その場合、解も、超局所的な関数概念というものが、適切な対象となってきます。

代数方程式でも、いろいろに変換して解くというので、私がいつも持ち出すのが、Tschirnhaus 変換というものですが、代数方程式に限らず、代数的な枠組の中で記述できる理論において、未知関数、代数的に言えば代数系の generator、をいろいろに選び直すというような操作を、私は広い意味での Tschirnhaus 変換と理解しておりますので、その言葉を使います。

方程式の見かけの形ではなしに、方程式の本質を考えたいわけです。一般的な場合で申しますと、方程式①を解くかわりに、この方程式が仮に空想的に解けたとして、その解けた関数 u_i $(0 \leq i < m)$ から、新しい関数 v_k を、

$$v_k = \sum_i A_{ki} u_i \quad (0 \leq k < \nu) \quad \text{-----} ②$$

で定義してやります。これは、実際に①を解く必要はなくて、形式的に、今までの従属変数に、適当に A_{ki} という微分作用素を施したものの一次結合として、新しい v_k を導入してやるわけです。勝手に。

そして、①②から u_j を消去してやるわけです。そうすれば、いくつ方程式が出てくるかわかりませんが、v_k だけに関する方程式が出てくる。 i.e.

$$\sum_{0 \leq k < \nu} Q_{\ell k} v_k = 0 \quad (0 \leq \ell < s) \quad \text{--} ③$$

（係数域が、例えばlocalな解析関数、あるいは、多項式環などを考えてみると、ネター性があって、有限なbaseがあって、方程式は有限個で間に合う。）

そうするとこれは、v_k に関する線型微分方程式系ですけど、一般には、①③は平等じゃない。しかし、十分方程式が多いような場合、v_k 達から u_i 達が計算できるということが起こります。v_k を十分たくさんとってやればよいわけです。そういうときには、

$$u_i = \sum_k B_{ik} v_k \quad (0 \leq i < n) \quad \text{-----} ④$$

というように求まるわけです。

例えば、単独な常微分方程式の場合、K を有理型関数、有理関数などのつくる体として、

$$, \quad P = \left(\frac{d}{dx}\right)^M + a_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{M-1} + \cdots\cdots + a_M(x)$$

$$(a_\mu(x) \in K)$$

という微分作用素を考えます。この場合、もちろん非可換ですが、Euclid の互除法が使えまして、ちょうど Dedekind domain の非可換判に当り、hereditary ring というものになります。むしろもっと強い、割り算ができるような環になっております。

②でAに当るものを

$$A = \left(\frac{d}{dx}\right)^L + b_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{L-1} + \cdots\cdots + b_L(x)$$

$$(b_\lambda(x) \in K)$$

と選んだとすると、係数が generic であれば、P と A、それぞれから生成された左 ideal を考えると

$$\mathcal{D}\cdot P + \mathcal{D}\cdot A = \mathcal{D}\cdot 1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

となります。この場合には、逆が成り立つ。つまり、①②から③が出てくる他に、u について解けてしまう。実際⑤から、

$$^\exists C,\ ^\exists B \quad \text{s.t.} \quad C\cdot P + B\cdot A = 1$$

(Euclid 互除法から、C, B が求められる。)

これを u に作用させて

$$C\cdot\underbrace{Pu}_{=0} + B\cdot\underbrace{Au}_{=v} = u$$

つまり、 $u = B\cdot v$

vの満たす、③に当る方程式も簡単につくれる。

Euclidの互除法から

$$A' \cdot P + P' \cdot A = 0$$

というA', P'で $\mathrm{ord}\,A' = \mathrm{ord}\,A$, $\mathrm{ord}\,P' = \mathrm{ord}\,P$

となるような作用素が見つかります。

これをuに施すと、

$$A' \cdot \underbrace{Pu}_{=0} + P' \cdot \underbrace{Au}_{=v} = 0$$

つまり $P'v = 0$ となる。

この場合には、①と③の方程式は同等である。①の方程式が解ければ、それを②に代入することによってvはすぐに計算できる。逆に、③が解ければ、④に代入してuも求まる。つまり、未知関数をuにするかvにするかのchoiceの問題に過ぎない。要するに、この方程式が、物理から来ているのか微分幾何から来ているのか知らないけれども、本質的に我々が解こうと思っている問題を、①と表現しようと③のように表現しようと関係ない。

そうすると、見かけの陰にある本質は何であるかというと、$\mathcal{D}$加群というものになる。uというものを、何か具体的な関数を表わしているとは考えないで、$\mathcal{D}$の作用する対象であって、それにPを作用させると0となる左$\mathcal{D}$加群の性質を

記述していると考える。だから、考える $\mathcal{D}$ 加群は、

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}u_0 + \cdots\cdots + \mathcal{D}u_{n-1} \quad \text{s.t.}$$
$$\sum_i P_{ji} u_i = 0$$

別の言葉で言うと、$\mathcal{M}$という左 $\mathcal{D}$ 加群は、m個の元で生成される自由加群 $\mathcal{D}^m$ からの上への写像がある。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}^m & \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & 0 \\ \Psi & & \Psi & & \\ (A_0, \cdots, A_{m-1}) & \longmapsto & A_0 u_0 + \cdots + A_{m-1} u_{m-1} & & \end{array}$$

更には、$(P_{j0}, \cdots, P_{j,m-1}) \in \mathcal{D}^m$ は、この写像で 0になってしまうというのが①の関係式なわけです。しかも、その条件で $\mathcal{M}$ が定義されているということは、

$$(P_{j0}, \cdots\cdots, P_{j,m-1}) \qquad (0 \leq j < n)$$

で生成される左 $\mathcal{D}$ 部分加群が、写像の kernel になる、ということです。base を並べると

$$\mathcal{P} = \begin{array}{c} \overleftrightarrow{\quad m \quad} \\ n \updownarrow \begin{pmatrix} \\ P_{j0} \cdots\cdots P_{j,m-1} \\ \\ \end{pmatrix} \end{array} \in \mathrm{Mat}(n \times m)$$

という行列が決まります。その横ベクトルの $\mathcal{D}$ 上の左一次結合が kernel を与えているわけですから、その左 $\mathcal{D}$ 部分加群は、$\mathcal{D}^m$ からの image、と定義してもいいわけです。その写像は、

$$\mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}^m \qquad (\text{左}\mathcal{D}\text{ hom})$$
$$\Psi$$
$$(B_0, \cdots, B_{n-1}) \longmapsto (B_0, \cdots, B_{n-1}) \cdot P$$

この image は、P の横ベクトルの勝手な左一次結合ですから、正に kernel ($\mathcal{D}^m \longrightarrow \mathcal{M}$) を生成しているわけです。これで、exact sequence

$$\mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}^m \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0 \qquad ⑥$$

ができるわけです。

これは、有限個の generator と有限個の relation を持った左 $\mathcal{D}$ 加群で、所謂「coherent 左 $\mathcal{D}$ 加群」である。

それがつまり、我々にとっての方程式であって、今言った Tschirnhaus 変換

$$v_k = \sum_i A_{ki} u_i \iff u_i = \sum_k B_{ik} v_k$$

というのは、exact sequence ⑥ の中に吸収されているわけで、2組の generator $\{u_i\}$, $\{v_k\}$ で、

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{D} u_0 + \cdots\cdots + \mathcal{D} u_{n-1} \\ &\underset{(\star)}{=} \mathcal{D} v_0 + \cdots\cdots + \mathcal{D} v_{r-1}\end{aligned}$$

と表わせ、relation の方も変わってくるわけです。これは、$\mathcal{M}$ に対する resolution の与え方を変えることに他ならないわけで、$\{v_k\}$ の方では

$$\mathcal{D}^s \longrightarrow \mathcal{D}^r \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

となります。

(☆)のイコールの意味は、u_i 達は v_k 達の一次結合で書け、逆もいえる、ということです。もし、逆の変換ができない場合には、(☆)は、“＝”ではなく、“⊃”となります。

つまり、⑥の exact sequence が、線型偏微分方程式の一般の system というものを、代数的に解釈したものです。

この立場から、方程式を解くということ、または、Cauchy－kowalevski の定理であるとか、初期値問題、境界値問題、とかを全部、代数の言葉で捉えることができる訳です。話を引っ繰り返して、一種の非可換環上の加群の理論は、見方を変えれば微分方程式を扱っている、と寧ろ、言いたいと思います。

これは、ちょうど可換環の理論が、幾何学的に表現すれば、多様体の理論になっていることと同じで、どっちを主として考えてもよろしいが、数学の方法論として言えば、多様体を直接扱うよりも寧ろ、環とか加群の理論として扱うのが、実際の研究方法になってる訳です。

それと同じような意味で、微分方程式を研究することは、結局、$\mathcal{D}$ という微分作用素の環、及び、その作用する加群というものの問題として捉え、そしてそれを解析的な問題（或いは、幾何学的な問題と言ってもいいかも知れない。）として解釈したときに、具体的な微分方程式の問題に解釈で

きる、と逆転して考える方が自然であろうと思うわけです。

あと例えば、方程式を解くと云うことはどう云うことかと申しますと、代数的に言えば、加群におけるHom、それから問題に因ってはHomのderived functor（所謂、Extと云うような物）というような形で理解できる訳です。

①でのu_iは、具体的な関数を表わしている訳ではなく、それはちょうど、多様体を表わす代数方程式で、（2次曲線なら、2元2次方程式）、xとかyとか云うものは不定文字であって、具体的な数を表わしているわけではないことと同じことです。そして、具体的に設定した数の体系（実数、複素数、有理数、代数的数体、p進数、有限体、等）の中で、方程式に当て嵌まる数を見つける事が、方程式を解くことであり、多様体上の点を特定することに当たるわけです。①も同様に、解析関数であるようなsolutionを求める場合には、解析関数であって①が成り立つように、u_iを見つけるわけです。

解析関数$\mathcal{O}$は、それ自身$\mathcal{D}$加群である訳ですが、だから$\mathcal{O}$だってある意味で、微分方程式と言ったってよろしい訳です。それは、de-Rham系と云うものに当たります。超局所的に研究すると、どんな微分方程式も、ある意味で、これに帰着されるとgenericに言える訳です。

それで、$\mathcal{O}$と云うものが、我々の設定した、よく判った$\mathcal{D}$加群で、よく判らない$\mathcal{D}$加群から、よく判った$\mathcal{D}$加群$\mathcal{O}$へのhomomorphismを考えよう。

例えば、localに考えて、複素多様体上の一点の近傍での収束巾級数（localな解析関数のgerm）は、$\mathcal{O}$の典型的な例です。そう云う$\mathcal{O}$に係数を持つ微分作用素の作る非可換環を設定し、その非可換環が$\mathcal{O}$に左から作用している訳です。

我々の問題としている$\mathcal{M}$と云う微分方程式に対し、

左$\mathcal{D}$ hom. $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{O}$ を考えると、

これは、base u_i のimageを考えればよいから、

$u_i \longrightarrow f_i$ として、homが決まります。u_i の間には、①の関係があって、homで、0は0に行かなければならないので、

$$\sum_i P_{ji} f_i = 0 \quad (0 \leq j < n) \qquad ⑦$$

となる。それがhomである必要十分条件です。即ち、hom（$\mathcal{M} \to \mathcal{O}$）を決定すると云うことは、⑦が成り立つような f_i を見つけてやる事に他ならない訳で、これは正に、$\mathcal{D}$加群を微分方程式と理解した時のsolutionに他ならない訳です。言い換えれば、微分方程式を$\mathcal{O}$の中で解く事は、$\mathcal{M}$から$\mathcal{O}$への左$\mathcal{D}$ homを求める事で、

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}左}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ が解の全体を表わす訳です。

もちろん、Hom と云うのは特別な場合を除いて不完全な functor でありまして、これと、所謂 derived functor である Ext とかを込みにして、この全体を所謂 derived category で扱う方が完全なわけです。

普通言っている解が $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ の事で、$\mathrm{Ext}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ が何を表わしているかと云うと、解の不完全さを補う、言わば障碍類を表わしている訳です。$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ は分かり易く、高次元の場合もある意味で $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ に帰着する。これは、非斉次な方程式

$$\sum_i P_{ji} u_i = f_j \,, \quad \begin{pmatrix} \vdots \\ f_j \\ \vdots \end{pmatrix} \neq 0 \,, \quad (0 \leq j < n) \qquad \text{------ ⑧}$$

の事を表わしている訳です。これは何の事かと云うと、

$\mathcal{M}$ の resolution をとる。

$$\cdots\cdots \longrightarrow \mathcal{D}^{m_2} \xrightarrow[(m_2 \times m_1)\text{行列}]{P'_{\text{右乗}}} \mathcal{D}^{m_1} \xrightarrow[(m_1 \times m_0)\text{行列}]{P_{\text{右乗}}} \mathcal{D}^{m_0} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0 \qquad \text{---- ⑨}$$

これに、functor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(*, \mathcal{O})$ を施してやる。

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots\cdots \xleftarrow{P'_{\text{左乗}}} & \mathrm{Hom}(\mathcal{D}^{m_1}, \mathcal{O}) & \xleftarrow{P_{\text{左乗}}} & \mathrm{Hom}(\mathcal{D}^{m_0}, \mathcal{O}) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{O}) & \longleftarrow & 0 & \\ & \wr\Vert & & \wr\Vert & & \Vert & & & \text{---- ⑩} \\ & \mathcal{O}^{m_1}_{\text{タテ}} & & \mathcal{O}^{m_0}_{\text{タテ}} & & V & \text{(とおく。)} & & \end{array}$$

$\mathcal{O}$ を constant C 上の関数環とすると、V は C－加群になっています。⑩は、一般には exact にはなりません。この第 0 番目の cohomology 群が V で、一般に、

$$, \quad V^{(p)} = H^p(\cdots \to \mathcal{D}^{m_0} \to \mathcal{M} \to 0)$$

が出てくるわけですね。それで、$V^{(0)} = \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ で、$V^{(1)} = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ となっています。

$V^{(p)}$ が $V^{(0)}$ 以外 0 の場合は、方程式が完全に解けた場合で、解が十分たくさんある場合に当たる。

ところが、同じ微分方程式で解析関数で解いた場合でも、（一般に Kowalevskian なんて云う場合には解けるけれども）例えば線型常微分方程式でも、確定特異点、不確定特異点などがありまして、そう云う所では、$\mathcal{O}$ の範囲では解けない訳です。そこでは、$V^{(0)}$ は在るべき次元より小さくなります。その残りの部分が Ext の方に、補完するものとして出てくる訳です。

Hom, Ext の全体で解と云うものを捉えますと、逆に解から元の方程式に戻ることができます。特に holonomic system と言われている場合が最も大事なわけで、常微分方程式と似た様な構造を持つ、つまり、解空間が有限次元になる様な場合です。要するに、どんな場合でも、完全な設定をすると、方程式と解の対応は、contravariant で、全く同型な category を作る訳です。$\mathcal{D}$ 加群の作る category と、solution の方の category が同型になる訳です。一番一般的な場合にきちんとやっているのが、柏原さん達の reconstruction theorem

という形で在ります。

とにかく、$\mathcal{D}$加群と云う代数解析的な概念とsolutionと云う幾何学的な概念が、ちゃんと1対1に対応している。それはちょうど代数幾何における、多様体のcategoryと、可換環のcategoryが同値になっているのと同じです。非線型の方程式を考える時にも同じことが言える。

それで、なぜ非斉次な方程式がExt^1であるかと申しますと、⑧を考えます。

$$P = (P_{ji}), \quad u = \begin{pmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \vdots \\ f_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

とすると⑧は、 $Pu = f$ と書けます。これに対し⑨のexact性から、$P' \circ P = 0$ で、また逆に、Pを右から掛けて0になるような横ベクトルの一次結合は、P'で尽くされている。方程式にP'を左から掛けると、

$$\underbrace{P'P}_{\substack{\| \\ 0}} u = P'f$$

で、「$P'f = 0$」が、f_jについてのcompatibility conditionな訳です。(i.e. $\sum_j P'_{kj} f_j = 0 \quad (0 \leq k < m_2)$)

つまり、⑧を解くことは、⑩を考えると、$f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{D}^{m_1}, \mathcal{O})$で、$P'f = 0$、即ち$f \in \mathrm{Ker}\, P'_{左乗}$は、$P_{左乗}$のimageになるか、と云う事で、⑩の第1番目cohomology群H^1が消えているか、と云う問題で、即ち、$H^1 = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}) = 0$なら、必ず⑧

は解ける事になります。

最近、非線型の問題、例えば、数理物理で話題になっているソリトンとか、もっと高次元の問題、Yang－Mills 場、特にその中でself－dual と呼ばれているもの、あとEinsteinの方程式（4次元時空におけるRiemann－Yang metric に対する条件。Ricci tensor が消えるというもの。この中にも self－dual 型がある。）、そう云う物について、一種の線型系のdeformation と結びついていることが理解されてきて、そう云う物の解がよく判ってきている訳です。特にSolitonの場合には、完全に、そのdeformation の立場から解全体の構造が判ってきているんですが、その事をちょっとだけ説明します。

我々は、線型微分方程式を⑥のように解釈している訳ですが、解であるところのHom（厳密に言うと derived category としての $\mathbb{R}$Hom）は、重要な場合、つまり generic な場合、だいたい綺麗になってる訳で、例えば常微分方程式の場合でも、特異点はポツポツとしかない。特異点では、$\mathcal{O}$で解いたんではダメで、拡大したmodule に移る必要がある。例えば、realな変数の範囲で扱う時には、超函数などをもってくる。（超函数自身も$\mathcal{O}$を元にして homology 的に、相対 cohomology

と云う形で構成される訳ですから、もちろん相性はたいへん良い。)或いは、超局所的に扱う場合には、microfunctionと云う様な所で扱う。

しかし、代数的な方から言うと、いきなりそこまで拡張してしまわないで（超函数にしてもmicrofunctionにしても、有限生成でなくなり代数的な所から離れる。もちろんcoherentでない。)、個々の方程式に応じて、ちょっと広げてやる、ということも必要な訳です。

しかし、localに扱った場合のgeneric pointでは、solutionと云った場合には、Homだけでよくて Extと云うものは全部消えてしまう。Ext^1 が消えない所が所々に出てきて、Ext^2が消えない所はもっと少なくなり、全体がstratificationにより階層を作って、それがまた、ホモロジー的な構造をもっている訳です。

$V = Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ と書きましたが、特にholonomicの様に、Vが有限次元になっている場合には、$\mathcal{M} = Hom_{C}(V, \mathcal{O})$ と逆に書けます。$V \cong C^m$ ですから、本質的には $\mathcal{M} \cong \mathcal{O}^m$ となってしまう訳です。これは、解が考えている所で求まる場合には、その解を元にして Tschirnhaus 変換してやると、方程式は de Rham 系になることを意味しています。これは、あたり前で、①を正則関数の範囲で考えると、具体的な正則

関数 ${}^t(\varphi_{0k}, \cdots, \varphi_{m-1\,k})$（$0 \leq k < r$）という幾つかの縦ベクトルで解が尽されている場合には、matrix $\Phi = m\updownarrow\overset{\longleftrightarrow r}{(\varphi_{ij})}$ を使って変換してやれば良い訳で、$u = \Phi u'$, $u' = {}^t(u_0', \cdots, u_{r-1}')$（新しい未知関数）としてやりますと、$u'$についての答は何かと云うと任意定数な訳で、$\dfrac{\partial}{\partial x_i} u' = 0$ という方程式に変換される。

これは代数的な構造を議論する上では大事な訳で、要するに、究極的に分解していけば、どんな方程式でも簡単になる。これを一般的な扱いをする為には、microlocalな扱いをしなければなりませんが。

それはさておき、solutionから逆に方程式が作れる。解析の方の言葉で言えば、solutionが与えられれば、Wronskianというような方法で方程式を作る事に当る訳です。良い条件の下では、方程式と解は完全に対応している訳です。但し、Homで移りますからcontravariantな対応です。

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{M} & \xleftrightarrow{\text{対応}} & V & \\ \boxed{\text{方程式}} & \downarrow & & U\ (\text{部分空間}) & \boxed{\text{解}} \\ & \mathcal{M}' & & V' & \end{array}$$

記号は今まで通りで、Vの部分空間V'を取りますと、方程式の方でも$\mathcal{M}$からsurjectiveに写った$\mathcal{M}'$というものが対応してくる訳です。で、Vを固定して、V'を動かす。例えば、

$V \cong \mathbb{C}^N$, $V' \cong \mathbb{C}^m$ とすると、それは、N次元空間の中で、m次元部分空間を動かす事で、Grassmann多様体$GM(m, V)$の点を動かす事です。$GM(m, V)$は、$m \times (N-m)$次元の射影多様体です。それを$\mathcal{M}$の方で言いますと、$\mathcal{M}$のresidue class moduleをいろいろ変型してやる事に当る訳です。で、こういう事から線型微分方程式の問題、又、変形を扱うと非線型微分方程式の問題が自然と生じる訳です。それが、Solitonなどを説明する鍵になる訳です。

高次元の場合でも似た様な事ができますが、時間がありませんので、単独線型常微分方程式の場合に、お話しします。$Pu = 0$という単独常微分方程式は、$\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot P$という形で書ける訳です。($P = \left(\frac{d}{dx}\right)^N + a_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{N-1} + \cdots + a_N(x)$) これは、Euclid互除法のできるhereditary環と云う物になっており、又、環の大局次元が1である様な環です。

これに対して、$\mathcal{M}'$を作るっていう事は、$\mathcal{M}' = \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot W$という形に書け、$\mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{M}'$がsurjectiveになっているという事は、左idealが

$$\mathcal{D}\cdot W \supset \mathcal{D}\cdot P$$

となっている事を表わしている。これは、PがWで右側から割り切れる事を意味しており、

$$\exists W^* \in \mathcal{D} \quad \text{s.t.} \quad W^* \cdot W = P$$

となる。逆に、その時、$\mathcal{D}\cdot W \supset \mathcal{D}\cdot P$となる。もちろん、$W^*$が存在すれば、割り算でuniqueに決まります。

言い換えれば、Vを固定して、m次元部分空間V'をいろいろ動かしてやる事は、PというN階の微分operatorを、

$P = W^* W$ （W：m階微分operator, W^*：$(N-m)$階op.）

といろいろ分けてやる事に当る。（$N = m + n$とおいて、W^*はn階op.と考えます。）だから、N階微分operator Pをfixしておいて、より低階の常微分operatorに因数分解する操作が、Grassmann多様体上の一点を表わす訳です。

一番簡単な例として、$P = \left(\frac{d}{dx}\right)^N$を持って来ます。係数として体をとれば、$W$をmonicとしても一般性は失わない訳で、

$$W = \left(\frac{d}{dx}\right)^m + w_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} + \cdots + w_m(x)$$
$$W^* = \left(\frac{d}{dx}\right)^n + (\text{低階の項})$$

こうなってます。

非可換の場合には、素因数分解の一意性というのは成り立たず、continuousにdeformできる訳です。その変型を記述する方程式を考えたい。Wの各係数がconstantであれば、Wと$\frac{d}{dx}$は可換と言ってもいい訳で、その場合が実は、ソリトンと関係します。

$P u = 0$の解空間は、明らかに、高々$(N-1)$次の多項式全体の作るn次元vector spaceです。

$$V = \mathbb{C}\cdot 1 \oplus \mathbb{C}\cdot\frac{x}{1!} \oplus \mathbb{C}\cdot\frac{x^2}{2!} \oplus \cdots\cdots \oplus \mathbb{C}\cdot\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$
$$\simeq \mathbb{C}^N$$

この元を、N次縦ベクトルで表わします。部分空間V'の点というのは、その中からm個持ってくれば張られますから、所謂、

$$\begin{array}{cc} \xleftrightarrow{\;m\;} & \\ \left(\quad \xi \quad\right) & \updownarrow N \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{N次元縦ベクトルで}\\ \text{一次独立なものを}\\ m\text{個並べたもの。}\end{array}\right)$$

という、m－frameというものになる訳です。そういう(ξ)を1つ持って来る。（frame は unique ではなく、右から $GL(m)$ で割り算するだけの ambiguity がある。）それと W というものが1対1に対応している。(ξ)で表わされるm次元部分空間を解とする方程式は、Wronskian の方法で作られ、Wになる。

この(ξ)に対して、deformation してやる。どういうのかと云うと、

$$\underbrace{t_1\Lambda + t_2\Lambda^2 + \cdots\cdots}_{\text{(実際、(N−1)番目で切れる。)}}, \quad \Lambda = \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{\;N\;} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} & \updownarrow N \end{array}$$

これの exp. は、

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad t_1, t_2 \text{ の多項式}$$

となる。こういう三角行列を(ξ)に左から掛けて、できたものをξ_tとします。（$\xi_0 = \xi$）tをdeformation parameter

と思う。これは、Vでは微分する操作に当りますから、Vという空間に、

$$e^{t_1\left(\frac{d}{dx}\right)+t_2\left(\frac{d}{dx}\right)^2+\cdots+t_{N-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{N-1}}$$

という無限小演算子で生成された operator を施してやることである。(定数項はあってもしょうがないので、t_0は省略する。) これは infinitesimal には微分 operator で、t と x は無関係ですから、P とは可換です。微分演算子を作用させても、V 全体は変化がない訳で、parameter t を動かして V'を deform してやる訳です。そうすると W の方も変わってくる訳です。V'に operator を施したものをV_t'とおく。そうすると、$V_t' \longleftrightarrow \xi_t$ と対応している訳ですが、更に、$V_t' \longleftrightarrow W_t$ と対応しているとすると、これは、t と共に deform されていく微分 operator で、その deformation を記述してやる方程式は、

$$\frac{\partial W_t}{\partial t_\nu} = B_\nu \cdot W_t - W_t \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^\nu \quad \text{---} \quad ⑪$$

というものになります。W_t と $\left(\frac{d}{dx}\right)^\nu$ は非可換です。B_ν は ν 階の微分 operator で結果的に monic である事が言えます。この様な B_ν が存在する訳です。B_ν が unique に決まる事がすぐに言えます。⑪の左辺は、W_tの係数を t_ν で微分する訳ですから、高々$(m-1)$階の微分 operator ですね。

$$B_\nu \cdot W_t = \frac{\partial W_t}{\partial t_\nu} + W_t \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^\nu$$

と変形すると、この右辺は明らかに、($m+\nu$)階のmonicな微分operatorです。それが右側から W_t で割り切れる事を意味する訳で、割ったものは、$w_1(x)$, $w_2(x)$, ---- というものを使って計算できて、それで B_ν の係数が決まります。ある所から先は、割り切れるという条件が出て来る訳で、その割り切れるという条件が w_1, w_2, ---- に関するたくさんの非線型の連立方程式になります。それが実は、Soliton方程式と言われるものです。

ここで実は、

$$P = \left(\frac{d}{dx}\right)^N = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^m$$

とも書ける訳ですね。$P = W^* W$ と書けますから、

$$W^* W = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^m$$

です。この両辺に左から $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-n}$、右から $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-m}$ を掛けると、

($\mathcal{D}$ の代数的商環 [擬微分作用素と云うもの] をつくる。

そう云う拡大された環 $\mathcal{E}$ の中で、$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-n}$、$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-m}$ は意味をもつ。)

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-n} \cdot W^* \cdot W \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^{-m} = 1$$

となる。ここで、

$$W \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^{-m} = 1 + w_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} + \text{----} + w_m(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{-m}$$

，（$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-n}\cdot W^*$ も同様。）

$\widetilde{W} = W\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^{-m}$ とすると、これは、monicな0階の擬微分作用素になります。で、その逆operatorが、$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-n}\cdot W^*$ という訳です。ただ、$\widetilde{W}$ に対しては、$\widetilde{W}\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^{-m}\in\mathcal{D}$、$\widetilde{W}^{-1} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{-n}\cdot W^*$ に対しては、$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\cdot\widetilde{W}^{-1}\in\mathcal{D}$ という2つの正規化条件があります。

⑪の両辺に、右から $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-m}$ を掛けると、これは t_ν に無関係ですから、容易に、

$$\frac{\partial\widetilde{W}_t}{\partial t_\nu} = B_\nu\cdot\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_t\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^{\nu} \quad \text{----} ⑫$$

が成り立つ事が判ります。（$\widetilde{W}_t = W_t\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^{-m}$）

$N = m+n$ ですが、m，n を大きくしていくと、Grassmann多様体がembedされ、拡大されていきます。そのunionをとると、無限次元Grassmann多様体の中のあるdenseなsubsetを作る訳で、closureをとると、普遍的な構造を持った無限次元Grassmann多様体が得られて、closureをとって完備化すると、付帯条件が完全に消えてしまう。つまり⑫を満たすような、0階の擬微分作用素のdeformation equationが無限次元Grassmann多様体上のあるdynamical motionと1対1に対応している事になる。⑫が実は、Soliton方程式をちょっと書き直したものです。

今、$\widetilde{W}_t^{-1}\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)\cdot\widetilde{W}_t = L$ とおいて、L について⑫を書き直すと、

$$\frac{\partial L}{\partial t_\nu} = B_\nu\cdot L - L\cdot B_\nu \quad ---- ⑬$$

となり、これが所謂、Lax equation と言われているものです。それで、⑫と⑬は本質的に同等です。⑬から⑫へもある種の trivial な factor を除いて unique に $\widetilde{W}_t$ に戻れます。（Lax 自身は擬微分作用素の場合を扱った訳ではありませんが。）

擬微分作用素まで話を拡張すると、少なくとも私の知っている限り、（今は、1成分の場合を言ったけど、それを行列化した高次元の場合まで広げて）少くとも Soliton 方程式で調べた限り、例外なく⑬の様な物から導ける。

Grassmann 多様体上の、ある linear な section を時間発展と compatible である様に取ってやると、いろんな方程式が出て来る。その section 上を動く事によって。あの KdV 方程式であるとかいろいろ。

高次元の場合でも resolution ⑨を適当に normalize してやると話は同じです。

私、大分前に考えたんですが、大事な問題が在って、さっき言った高次元の Einstein 方程式（self-dual 型の）とか Yang-Mills 方程式とかが今の様に説明できるだろうと思う

んですが、まだ最後まできっちりと詰めてはいない。所謂、可積分系ってものは、私の考えでは、$\mathcal{D}$-moduleのdeformationから全て出て来る。$\mathcal{D}$-moduleそのものではないけれど、擬微分作用素の様な拡張された所で、純粋に代数的なstructureのdeformationとして出てくるものと、僕はそういう風に考えている訳です。

集中講義

「微分方程式系の代数解析」

［7月1日］

1960年の夏、超函数の論文を発表した後、あまり反響があった訳じゃないけど、一部の方が興味を持ってくださった。Franceでは、Martineauと云う人がBourbakiで紹介されたり、PrincetonでAndré Weilが興味を持ってくださり、それを佐武先生（その頃ちょうどPrincetonにおられた。）が彌永先生を通じて、Princetonに来ないか、と云うお話しがあって、60年から2年間Princetonに行っておりました。で、その直前まで、東京大学の方で、河田敬義先生の勧めで、私の考えをしゃべるSeminorを開いていただきました。

微分方程式の私なりのprogramは、60年の6月だったかに、東大の大談話会の時に話しました。確か、私と志村さんとが、その時1つずつ話をした記憶があります。microfunctionというのは、その時には具体化していませんでしたが、線型の場合でもholonomic system（その頃は、極大過剰決定系という言葉を使っていた。）が、微分方程式論で基本的であるという様な事を話していた訳です。その頃ま

では私、非線型微分方程式論の一般論をどういう風にやるのが一番有効か、という事で迷っていた。というのは、その頃の現状は、非線型の理論は断片的なものばかりだったんです。

例えば、非線型常微分方程式についてのいろいろな局所理論が在りました。それから、偏微分方程式で一番体系化されていたのは、解析力学の方の、所謂、Hamilton－Jacobi の理論があった。それは、1階の非線型偏微分方程式の理論と言える。それは、bicharacteristic と云うものを決める常微分方程式で本質的に解けてしまう。

力学の方では逆に、常微分方程式は Hamilton の運動方程式と言われているもので、これが解析力学で、Newton の理論を一番整理したものですが、その一般解を求めるときに、偏微分方程式に翻訳できる、と逆の行き方をします。

数学的な内容において、それとほぼ等価な理論が微分幾何の方でもあって、Lagrange－Charpit の理論があります。変換論の方で言うと、微分幾何では、接触変換の理論、解析力学の方では、正準変換の理論と言われています。方程式論から言えば、一種の、生成元を取り換える Tschirnhaus 変換の思想圏に入っていると言ってよい訳です。

何れにせよ、ある代数的な体系で生成元を与え、その間の relation を指定すれば、代数的構造は決まる訳です。微分方

程式の場合にも、ある独立変数と従属変数、導関数まで含んだ広い変換をする。見かけは変わっても、方程式としては等価です。

そういう理論は、未知関数が多い様な場合も、Yacobi の involutive system の理論と云うのが在ります。これも接触変換で扱われる理論です。

もっと難しい場合となると、例えば一番よく研究されているのが Monge−Ampère 型の微方方程式と云うもので、応用上で、物理や工学にも出て来ます。電信方程式でそういう型の方程式が出て来ます。

そういう研究以後、一番突っ込んだ研究をしたのは、多分 Elie Cartan でしょう。他にも、例えば、Veblen, Eisenhart と云う人がいる。特に昔の微分幾何は、非線型微分方程式の立場から、局所的な構造を研究した。例えば、ある Riemann 空間を Euclid 空間の中で表現するのに、何次元の空間で表現できるか、という様な事です。元来、微分幾何の走りは、Gauss の曲面論ですが、これは、3次元 Euclid 空間の中に、$f(x, y, z) = 0$ で与えられた曲面を考える。そこには、metric、所謂、第一基本量が定まる。逆に、2次元 Riemann 空間を与えると、それは3次元 Euclid 空間に入る。local に。それは、微分方程式論的に扱える訳です。

n次元Riemann空間の場合、一番genericな場合には、$\frac{1}{2}n(n+1)$次元（だったと思う。）のEuclid空間の中に入る事が、微分方程式を解いて言える。つまり、Euclid空間の部分多様体は、曲面を決める代数的な方程式から、metricが決まる。基本量を外側のもので表わした式は、微分方程式な訳で、それが局所的に解けるかどうかというのは、方程式の代数的構造だけで決まる訳です。

そういう問題や、Riemann空間が局所的に同型になる為の条件とか、Riemann空間がflatになる為の条件とか、そういう事が、昔、微分幾何で盛んになされていました。

Sine-Gordon方程式と数理物理学者が呼んでいるものは、ソリトン方程式以前に、微分幾何で研究されていた方程式です。Gauss-WeingartenやGauss-Codazziの方程式というものとして表われてくる。

要するに、そういう幾何学的な問題の必要から、そういう方程式の構造論が研究されていた。しかし、何れにせよ、ある意味で断片的だった。

ところで、代数多様体は、所謂、有限生成の多元環が出て来て、Affine空間にembedされたAffine多様体となり、一般の場合なら、sheaf的に翻訳し直せばいい。或いは、projectiveな場合だったら、graded ringというものを考えてやると

射影多様体と云うものも考える事ができる。何れにしても、それは、可換環という代数的な概念と等価です。それは元々は、Descartesの考え方です。

もっと極端な例で、位相空間、測度空間がありますが、一番素直な位相空間は、その上に十分、連続関数が存在する様な空間で、これは完全正規空間と呼ばれていたと思いますが、これは、Cěch とかTikhonovという人達が考えた。その分離公理を満足する位相空間は、あるcompact Hausdorff 空間の中の部分空間と同相であり逆も言える。その場合に、Cěch compactification と言ってますが、Cěch、Tikhonov、あるいはGelfand の$\mathbb{C}^*$環の表現論などに関係してきます。その上の実数値有界連続関数全体のつくる環を考えると、それは、無限生成でrelation も無限個出て来るので、代数的には扱い難いけど、簡単な性質がいろいろある。

話が脱線してしまいましたが、可換環の場合、有限生成な環に対応する、Descartes的な意味での幾何学的表現として、多様体というものが定まりますが、今の場合、実数値有界連続関数に対応するものとして、compact Hausdorff空間というものが決まります。逆も言えます。しかも、その環の構造は、その環の純枠に代数的な構造だけから決まります。だから、ある特殊な性質を持った、$\mathbb{R}$又は$\mathbb{C}$上の可換環をもって来れ

ば、位相空間を表現できる訳です。

可換な$\mathbb{C}^*$環で、radicalが0のもので、Gelfandらの有名な研究があります。それの非可換な場合は、場の量子論とか、統計物理の方とかの問題を数学的に表現するときに使われます。

物理の問題でも最近、ごく特殊な場合に完全なsolutionが得られる、という例が少しずつ増えています。私も少し前に、三輪さん、神保さんと一緒に、ある非常に特殊な場合に、多変数解析関数で厳密な解が書ける、という事をやった事がある。最近、Moscowで、ランダウinstituteの人達がおもしろい結果を出している。それから、AustraliaのBaxterという人が、統計物理の方で、非常に重要な結果を次々と出しています。しかし、全部2次元のmodelです。現実の空間はもっと大きく、4次元とか、最近のsupergravityとかsupersymmetryとか或いはsuperstring theoryとかで言うと、もっと高次元の宇宙が考えられる。

物理が、この頃、非常に数学化している訳で、Topologyや、整数論におけるTheta関数（Manin、Polyakov等がやっている。）、Selbergのzeta関数、またはそういうものを拡張したものが出てくるなど、非常に数学化している。物理もやっと本物になってきたと思います。Newtonの時以来、僕

は、物理は数学化する宿命にあった、と思っていました。

実際の問題で、統計物理だったら、三次元結晶の中の格子状の頂点にある性質を考える。例えばmagnet の場合なら、spinの方向という変数が分布している。それは、連続の場合、確率場となり、確率変数が何次元かの空間に一様に分布してくる。1次元の場合が確率過程(stochastic process)で、高次元の場合がstochastic field というもので、それが統計物理の数学的表現といえる。それを、$\mathbb{C}^*$algebra とか operator algebra の形で厳密にやれる。そういう作用素環で厳密に扱うというのも進歩しています。

ただ、私言いたいのは、具体的に最終的な答まで計算を進めようという場合には、operator 全体のつくる完備な$\mathbb{C}^*$環を考えるより、それ以前にそのoperator から、有限的な操作でつくられた範囲の比較的代数的なoperator algebra (pre $\mathbb{C}^*$algebra と言うべきもの。適当なnorm について完備化すれば、$\mathbb{C}^*$環 になる。)の中で問題を理解した方がいいだろうと思っている。

これから話すのは、有限生成的な非可換環の場合です。それが代数幾何の非可換判で、即ち、非線型微分方程式論だということを言いたい訳です。

非可換環は、具体的に表現していくと、微分環というもの

が出て来ます。

これは、Picard－Vessiot theory というものがあり、アメリカの Ritt 学派の研究があり、Kolchin とかそういう人達がやっているし、日本でも、奥川光太郎先生がそういう事をやっている。

Galois 理論の analogy みたいな事を、線型常微分方程式の理論でやるとか、それをもっと一般化するとかされている。それは、微分方程式論全体の流れの中では、比較的特殊な研究で、正統的な研究は主として、微分幾何や数理物理、特に解析力学の方でなされてきた。maxwell 方程式、流体の方程式、それから、このごろ Navier－Stokes 方程式ということもよく聞きます。Soliton がはっきり認識されたのは、数理物理の研究で、Boussinesq 方程式とか KdV 方程式が切っ掛けになって出て来た訳です。

そうすると、微分方程式論の主な流れの中で研究されてきた方法というのは、非可換環的な方法ではなかった訳です。Erie Cartan が、そういう流れを統一して一般論を作ろうとして、外微分方程式系という考えを述べている。それは非常に興味深い考えで、私も６０年の頃には、そっちの遣り方で遣った方がいいのかと迷っていました。

私自身、その後、線型微分方程式や数理物理の方をやって

いましたが、70年代中頃から、微分方程式の一般論を、$\mathcal{D}$加群という形で非可換環の立場で、構築しなければいけないとだんだん強く思う様になりました。

線型微分方程式論は即ち$\mathcal{D}$加群の理論である、と云う考え方は認める方が増えてきたし、21世紀には、非線型微分方程式論は非可換環の理論である、と今よりは普及すると思います。あるいは、数理物理の場の理論も非可換環の理論である、とC^*環と似た様な意味で、言える様になると思います。

微分方程式も、存在定理や一意性定理が目的ではなく、具体的に解く事が重要です。その解ける意味は考えなければいけない。ちょうど、代数方程式を解くのに、一次方程式だったら加減乗除で解け、二次方程式だったら平方根が必要になるし、五次以上なら、何か特殊関数を導入しないといけない、という様に、広げられていったのと同様に。

まあ、方程式の構造に因っては高次の場合でも解ける。例えば、円分方程式 $x^n=1$ というのは根号だけで解ける。所謂、Abel型の方程式です。特に、nが素数で$n-1$が2の巾である（所謂、Fermat型の素数）場合、平方根だけで解ける。所謂、Gaussの少年時代の円分論です。そう云う事を拡張したのがKroneckerであり、更に類体論まで発展している。

ただ、一般の相対Abel拡大を解析的に十分analyseする事は、まだ完成しているとは言えないと思います。それは、多分、代数方程式だけを切り離していてはだめで、関数概念まで込めた、Euler的な、解析と代数が渾然一体となった世界、そう云うものが十分開発されなければいけないでしょう。

昔は、代数幾何の人達は、Abel関数とか楕円関数とかTheta関数と云うものを、解析的な背景を切り落して、代数的な側面だけにスポットライトを当てる様にした訳です。それはそれで大事だけれど、しかし片手落ちな訳で、同じAbel多様体でも、Weilが考えた超Yacobi多様体とか、志村さんがやられている所に出て来るAbel多様体にしても、純粋に代数的には構成できない訳です。多分、解析的な概念まで含めた理論が整備されないと、完全な解決には到達できないだろうと思います。

可換な世界でも、可換環を考えた場合、その上のderivationはLie環ですが、それから生成されるemveloping algebraとして非可換環 $\mathfrak{D}$ が出てくる。だから、非可換環自身を正面から取り上げないと、可換なものも完全にはcontrolできない訳です。

要するに、数学のuniverseと云うのは、どこか一ヶ所だけ切り離して扱うのは大抵、不自然な訳で、広いuniverseの

中でものを考えるのが自然でしょう。そういう意味で、代数的な構造に着目した意味での analysis、微分方程式、そう云うものを込めた代数学、Euler 的な意味での代数解析を目標としたい。

話の切っ掛けとして、可換環 A を考える。これが C 上 ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$, 等) 有限生成とする。generator を $x_0, x_1 \cdots, x_{n-1}$ として、これの間の関係式の作る ideal を $\mathcal{J}$ とすると、

$$A = C[x_0, \cdots, x_{n-1}] \big/ \mathcal{J} \quad \cdots\cdots ⑭$$

と書ける。(Hilbert の基底定理が成り立つから、関係式の個数は有限個になる。i.e. $\mathcal{J} = \langle f_0(x), \cdots, f_{r-1}(x) \rangle$)

これは、C 上定義されたAffine 多様体を与え、Descartes 座標で表現できて、n 次元 Euclid 空間の部分多様体になる。但し、C - rational point と云うのが、一般に十分在るとは限らない。

これが、別の generator で

$$A = C[y_0, \cdots, y_{m-1}] \big/ \mathcal{J}' \quad \cdots ⑮$$

$$(\quad \mathcal{J}' = \langle g_0(y), \cdots, g_{s-1}(y) \rangle \quad)$$

と表わされているとする。

即ち、$x_0, \cdots, x_{n-1}$ は、A の中で考えると

$$f_0(x) = 0, \quad \cdots \quad , f_r(x) = 0 \quad \cdots ⑯$$

で定義されたものという訳です。Aが$y_0, \cdots, y_{m-1}$でも生成されるので、まず、定義から

$$g_0(y) = 0, \cdots\cdots, g_{s-1}(y) = 0 \qquad \cdots\cdots ⑰$$

で、次に、

$$y_\mu = \varphi_\mu(x) \qquad (0 \leq \mu < m,\ \varphi_\mu \text{は} x \text{の多項式}) \cdots ⑱$$

と書けなければならないし、逆に

$$x_\nu = \psi_\nu(y) \qquad (0 \leq \nu < n,\ \psi_\nu \text{は} y \text{の多項式}) \cdots ⑲$$

とも書けなければならない。

これがどういう事を意味してるかというと、基本関係式⑯に対して、新しくyという元を導入すると、⑰という関係式が導かれる。即ち、⑯という方程式が⑲によって⑰という形に変形された訳です。逆に、⑰は、⑱により⑯に戻る。これを、一般化されたTschirnhaus変換と呼んでいいと思います（Tschirnhausが考えたのは、生成元1個、関係式が1個の場合ですが。）。変換を通じて不変な構造としてAが在る訳です。幾何学的に言えば、多様体の、Euclid空間へのembedの仕方を取り換えてやる事に他ならない訳です。

それで、点が十分在るかどうかですが、例えばCが有理数体や実数体であり、円 $x_0^2 + x_1^2 + 1 = 0$ の場合は、C-rational point はない訳です。$x_0^2 + x_1^2 = 0$ の場合は、一点$(0, 0)$しかない。

C－rational point は何かというと、自然にCはAにembedされている訳ですが

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, hook, "\text{embed}"'] \arrow[dr, "\text{id.}"] & \\ A \arrow[r, "\eta"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & C \end{tikzcd} \qquad \text{－－－} \quad ⑳$$

この様なhomomorphism ηを与えてやることです。つまり、ηを与えることは、Aの生成元x_ν達の行き先を決めてやればいい訳で、x_νがηで、それぞれa_νに写るとします。一方、$f_\rho(x)=0$で、これはhom. ηで0に行かなければなりませんから、$f_\rho(a)=0$となります。つまりhom. ηを与える事はCの中で、方程式$f_\rho(a)=0$ $(0\leq\rho<r)$の解を求めるという事になる訳です。これはつまり、代数多様体上のC－有理点を求める事になる訳です。

ところが、前の例の$x_0^2+x_1^2+1=0$の場合の様に、C－有理点だけでは、元の多様体を完全に捉える事ができない場合があります。可換体Cでダメな時に、拡大体C′を持って来ます。そうすれば、C′－有理点が十分出て来るという事がありえます。この時⑳に当たるものは、

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, hook, "\text{embed}"', "\text{(i)}"] \arrow[dr, hook, "\text{標準的な埋め込み}", "\text{(ii)}"'] & \\ A \arrow[r, "\eta", "\text{(iii)}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & C' \end{tikzcd} \qquad (\text{C}'\text{－有理点}) \quad \text{－－－} \quad ㉑$$

だからもちろん、C'を大きくすればする程点は増えていくけれど、Aの幾何学的表現として十分な所まで大きくすればいい訳で、例えば代数的閉拡大までいくと十分です。但し、その場合、genericでなくなって、㉑の様に求めた座標は、元の方程式以外の方程式も満たしてしまう訳です。例えば、C'では $h(a)=0$ という関係式を満たす点 a が在るとします。しかし、Aの方では、h はideal $\mathfrak{J}$ には入らないという事が起ります。だから、そういう事まで表現しようとすると、代数拡大では不十分な訳で、超越拡大をとる必要がある。

例えば、Weilはどう考えたかというと、Cに対して、超越次数 ∞ とする超越拡大をとる。そういうΩを1つ決めて、全宇宙と思う。あらゆる数の集合、universal fieldというか、万有体というか、普遍体というか、そういうものを持って来る。(pure algebraistから見ると強引な感じがしないでもない。)

方程式に出て来る係数は有限個ですから、素体の上に有限個の元を添加すれば、方程式は実際表現できる訳です。

Weilのformulationを考えると、まずgeneric pointと云うのは、Aで成り立たない関係式は、C'でも一切成り立ちません、と云うものです。つまりAがC'の中に同型に入っていることを意味するに過ぎない。ところが、C'がuniversal fieldであった場合、このembed $A \hookrightarrow C'$の仕方はいくらでもある

訳です。特に㉑の場合、(i)(ii)を止めておいても、(iii)のembedの仕方は、一般には幾通りかある。例えば、C'の中でCを動かさない様なautomorphismをC'にapplyしてやると、(iii)は動く。しかし(i)(ii)は変わらない訳です。

例えば、$x_0^2+x_1^2+1=0$を扱うためには、Cが有理数や実数ではダメだから、iを添加します。そうすれば、実数だったら複素数になるし、有理数だったらGaussの数体になる。その場合、$x_0^2+x_1^2+1=0$は、拡大体で有理点を持ちます。例えば、$(i,0),(0,i),(\pm\frac{4}{5}i,\pm\frac{3}{5}i),(\pm\frac{12}{13}i,\pm\frac{5}{13}i)$, ------。ここで、$(i,0)$と$(-i,0)$は、円$x_0^2+x_1^2+1=0$上の点だけど、この2点は、$i\longmapsto -i$とする$C'$のautomorphismで写る点ですから、$C$上共役な点です。それから、generic pointの場合には全部等価です。あらゆる可能なものが全部表現しされる様な、十分大きなC'をとった上で、等価な点をidentifyしてしまえば、それ以上広げる必要はなくなって、universal fieldの選び方によらない表現が得られる訳です。それが、Grothendieck流の考え方です。

C'で新しく生じる関係式hの全体を、Aの元のrelationに添加してやると、元のidealより大きなidealが得られます。この場合、hom. $A\longrightarrow C'$がinjectiveではなく、C上の多元環としてのhom.になる訳ですが、$\{h\}$はこのkernelに

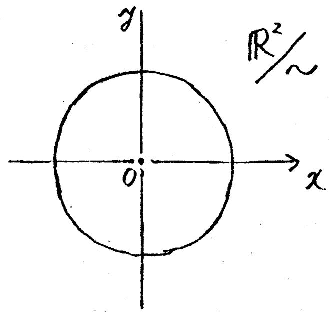
なる訳です。

$$\{\mathfrak{p}\} \hookrightarrow A \longrightarrow C'$$

C'は体ですから、Aのideal $\{\mathfrak{p}\}$の行く先は可換整域になる。整域という事は言い換えれば$\{\mathfrak{p}\}$は素ideal になる訳です。だからAの中の素ideal が等価であれば、行った先の点は共役な点と考えられる。だから、一つの点にまとめてしまえば$A/\mathfrak{p}$というものになる。$A/\mathfrak{p}$は整域ですから、商体をとるとCの拡大体に入る。Weil 的な意味での多様体の表現で、同値な点を全部一点につぶしてしまう訳です。そうすれば、universal field のchoiceによらない幾何学的表現が得られ、Grothendiek 式のSpec A と云う形で捉えられる訳です。

これは、位相空間の場合、商空間と言いますが、一般に、これは悪い位相になります。

例えば、2次元Euclid空間で、原点以外で直線上の点をidentifyする（$\exists c \in GL(1)$ s.t. $x' = cx$ のときxとx'を同一視する。)。こうすると初めは滑らかな空間でも、割った空間は所謂、射影直線が出て来て、その他に原点が出て来る。$\mathbb{R}^2$での原点の近傍は、まわりの点も全部入ってくるから、割った空間では、原点の近傍は全空間になる。これは、general topology の良い分離公理を満足しない。



もう一つ、今は体でやりましたが、整数$\mathbb{Z}$の場合には、$p\mathbb{Z}$（p：素数）が素idealで、これで割ったものは、pが変わる事に標数が変わります。このときのSpec A と云うのはあらゆる素数の集合と言ってもいい。

脱線したけれど、そう云うわけで、どう解釈するにせよ、幾何学的イメージ、代数的イメージ、方程式、みんなつながっている訳です。

商空間でも、genericな点では正則であって、正則な点は正則局所環というもので表現できて、局所環はhomology的に、global dimentionが有限という条件で完全に特徴づけられる。乱暴に言えば、正則な点は、Euclid空間と同じ様な構造を持っている。

微分方程式の場合にも、そういう事を言う為には、局所化をちゃんとやらないといかん。micro-local化という事が、非可換環の局所化になる訳です。そこまでいくと、genericな点では、微分方程式は、標準的な易しいde Rham方程式と同等になる事がいえる。$\mathbb{C}$上では。$\mathbb{R}$上ではそれがまた3つに分裂します。要するに局所化していくと、物事が非常に簡単になる。一番要素的なものまでいって単純な記述をして、寄せ集めていけ、というのがDescartesの哲学と言っていいと思います。

一つの多様体を研究する時に、その上の linear system とか、line bundle 、あるいは vector bundle が必要になる。その vector bundle も更に、所々に degenerate したものは coherent sheaf というものになりますが、そういうものを考える事が重要な訳です。

何れにしても大雑把に言えば、環 A が多様体 V に対応している時、それを研究する基本的な手段は、A 加群の category (これは abelian category)、そういうものの構造に反映していると言ってよろしいと思います。

振り返りますが、rigid な局所化というのは、A を素 ideal $\mathfrak{p}$ で割ってやる。$\mathfrak{p}$ が極大 ideal でない時は $A/\mathfrak{p}$ というのは、Weil 的な同値な点を一まとめにしたものですから、点ではない訳です。それは、ある意味で部分多様体に対応している。だから、最終的な点までは分解していない訳です。maximal ideal の場合、割ったものは体になる。特に C - rational point に対応する様な maximal ideal の場合、$A/\mathfrak{m} = C$ な訳です。それで A は直和 $A = C \oplus \mathfrak{m}$ となっている。これが本当の意味の最終的な局所化です。考えている点における値をとる homomorphism $A \longrightarrow A/\mathfrak{m} = C$ を考えると、遠くの方は忘れる訳ですから、遠くに pole が在っても構わない。言い換えれば、$\mathfrak{m}$ は、考えている点で 0 という値をとる関数全

体であると考えられる。そうすると、$\mathfrak{m}$の元の逆元は存在しないけれど、$S = A - \mathfrak{m}$とすればこの元は、考えている点で0にならない。homomorphism $A - \mathfrak{m} \longrightarrow C$は0には行きませんから、Cの中に逆元を持つ訳です。

考えている点での局所的な振舞を許す第一段階として、$\mathfrak{p}$に含まれない元を分母とした分数を許そうというのが$\mathfrak{p}$における局所化で、補集合$A - \mathfrak{p}$は積について閉じた乗法系になっている。$A_{\mathfrak{p}} = A[S^{-1}]$とすると、$A \longrightarrow A[S^{-1}]$は、embedding、或いはhomomorphismです。sheafの言葉で言えば、考えている点でのstalkを与えている訳です。

遠くの方を、もっと徹底的に忘れる事もできる訳で、いろんな段階がある。一番極端なのは、遠くの方を忘れる為、完備化をする。$\mathfrak{m}$の中、$\mathfrak{p}$の中で近傍系を定義して。

商環の理論を非可換化しようという試みは昔から在って、最初にやったのがOreという人です。1930年代に。浅野啓三先生がそれを一般化した。

(ここでは、環とか半群とかの場合、単位元の存在を仮定します。)

非可換環の場合もやはり、Aの中に乗法で閉じた集合を与えます。これに、Ore－浅野条件を与えます。右左の区別が必要ですから、右商環を考えます。$A \ni a$、$S \ni s$に対し、

as^{-1}が定義できて、環を作る条件を与える訳です。積が定義できれば、足し算の通分もうまくいきます。

$$\text{積} \qquad (as^{-1})(a's'^{-1}) \qquad\qquad a, a' \in A,\ s, s' \in S$$

で、$s^{-1}a'$の部分が、$b \in A$ と $t \in S$があって

$$s^{-1}a' = bt^{-1}$$

と書き直せたとすると、

$$(as^{-1})(a's'^{-1}) = (ab)(t^{-1}s'^{-1}) = \underbrace{(ab)}_{\substack{\cap \\ A}}\underbrace{(s't)}_{\substack{\cap \\ S}}{}^{-1}$$

となり、積も同じ様に書き表わせた事になります。だから、$a \in A$、$s \in S$に対していつでも、$s^{-1}a = bt^{-1}$ $(b \in A, t \in S)$と書き表わせる事が大事な訳で、これでは意味を成しませんから、sを左から、tを右から掛けて、$at = sb$ です。だから条件は

「$\forall a \in A$, $\forall s \in S$, $\exists b \in A$, $\exists t \in S$ s.t.

$$at = sb \qquad \text{」} \qquad \cdots (22)$$

これが、右Ore－浅野条件です。逆($ta = bs$ となる場合)が左条件です。これが成り立てばうまくいくことは、商環の construction を考えれば分かる。

これが成り立たない様な場合は幾らでもあって、所謂、非可換な自由環は零因子を持ちませんが、条件は成り立たない。だから、この条件を拡張できないかと云う疑問は当然生じる

訳で、50年代にJohnsonと云う人が特殊な場合をやり、後に内海さんが一般の場合に商環の構成をやられた。㉒を特殊な場合として含むもの。

Sの中に零因子が含まれる事もあって、Sの中の零因子全体$\mathfrak{J}$は両側idealになって、この場合、

$$\begin{tikzcd} & A/\mathfrak{J} \arrow[dr, hook] & \\ A \arrow[ur, two heads, "\text{onto}"] \arrow[rr, dotted] & & A[S^{-1}] \end{tikzcd}$$

と、2つの操作$A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{J}$、$A/\mathfrak{J} \hookrightarrow A[S^{-1}]$に分ける事ができます。だから、$A/\mathfrak{J}$から出発すれば、零因子を含まない$S$で商環を作る事になります。

だから問題は、与えられた非可換環Aに対して、Aを自然にembedする様な商環のうちで、一番大きなものは何か、という事です。内海さんがやられたのは、全く一般の場合に、最大なものがcanonicalに作れるという事です。でも、それが本当に役に立つ概念かどうか、というと今の所、何とも言えない。

私の環論の知識というのは、学生の頃、海賊判で読んだ、van der Waerdenとか、正田先生や中山先生の著作を拾い読みした程度で、或いは、浅野先生の本や、中山－東屋の本は読んだ事がありますが、非可換環でもC^*環は別ですが、代数的な非可換環に関する本はあまりなく、原田学さんという

大阪市大の方の、環論入門(共立全書)にも幾つか新しい事が書いてあって、例えば、category論的に環を扱う時に重要な概念ですが、森田equivalanceの理論、それから、injective moduleの理論、injective envelopの話とか。

非可換体、又はその上の有限次元の行列環、又はその有限個の直和、そう云うものは、大局的に0次元の環であると完全に特徴づけられます。大局次元というのは元々topologyから発展したhomology代数からのものです。cohomologyの概念を一般化したderived categoryの理論は、50年終わりから60年にかけて、河田先生のセミナーで話をしたんですが、Grothendieck、Hartshorneの講義録に、それに当る事がやられてあった。兎に角、homology代数が構築される切っ掛けになったのが、topologyの方から来ている。

話が脱線しましたが、大局次元は2つの流儀があって、1つはHomの方から出発する次元と、1つはTensor積⊗から出発する次元です。一般の環の場合、これがexact functorにはならなくて、それぞれ、左exact、右exactになる。Homの方では、右におつりとしてExtが出て来て、⊗の方は、Torというものが必要になって来る。Torは⊗の左derived functorで、ExtはHomの右derived functorで、不完全さを補うものとして出て来る。

Ext に比べて Tor の方が極限操作が stable です。inductive limit などに対して保存されるという性質がある。Ext が消える事が、環が0次元である事の定義で、それの表現する多様体が0次元である事にほぼ相当する。Tor の方は、極限として出て来るものも許されるから、行列環の極限として無限 size の行列で、ある種の条件を満足するものなどが出て来る。それは、昔、von Neumann が量子力学の研究から始まって、lattice theory とか何かやった中で導入した概念で、正則環というのがあります。（可換環でいう正則局所環とは全然別のもの。）。これはどう云うのかというと、環Aに対し、

「 $\forall a \in A$、$\exists b \in A$ s.t. $aba = a$ 」

という性質です。簡単な条件ですが、自然な条件であって、Hom の方で定義した弱い意味の次元が0という条件と、この正則環の条件が同等になる。それを証明したのが原田さんです。

そういう訳で、非可換環と Homology 代数との関係は大事です。この仕事を読んだのは、Bo Strenström という人の、「Rings of Quotients」（Springer）という本です。この人は、多分、北欧の、ノルウェーかどこかの人だと思います。Strenström というのは、北欧の言葉はドイツ語と似てますから、「石・川」という意味だと思います。この人も、パリの

Gabriel という人の仕事を中心に、仕事をしています。Gabriel の仕事は、60年代で、Strenströmの本が出たのは72〜3年頃だと思います。それ以後は、Jategaonkor という人の、非可換環の局所化を議論している本があります。要するに、Ore－浅野条件では十分ではないけれど、Gabriel topology の様に拡張してもなにもならないと言っているみたいです。

要するに、整数論とか代数幾何と結びつけていく時に環論としての発展もできた訳で、同じ事が非可換環でも言えると思う。代数解析というか、微分方程式を含んだ関数方程式に対する代数的な理論というものが、その方向づけを与える筈だと、私は主張している訳です。そうすれば、どう云う局所化の理論がいいのか悪いのか、自ずから明らかになると思います。

兎に角、一般の代数方程式を解く時でも、巾根だけで解けない場合、強引に解ける様に、特殊関数を導入してもあまり意味がない訳で、自然な形で、解析的な理論の中に代数学を吸収していって、その中で特殊関数とか特殊値とかを導入して、代数方程式が解ける様にしなければいけない。

しかし、我々の持っている特殊関数は、そんなに多くない。有名なAbel関数とか、Theta関数の他に、Gauss などが研究

した超幾何型の関数があり、また、それも拡張されていますが、不十分です。最近、私がちょっと関係したけれども、Painlevé 型の monodromy 理論に関係して出て来る超越関数というものもありますが、それも不徹底です。楕円関数は割と特殊な場合として出て来るけれども、一般の Abel 関数に対応した、一般の Painlevé 型はまだ十分調べられているとはいえない。

もちろん、そういう個々のものを追求する事は意味があるけれども、微分方程式の代数的理論の本質がまだ formulate されていないのはおかしい。

言い忘れたけど、一つの環を調べる事は一つの多様体を調べる事だけど、それは A-module の category の構造論に問題を置き換えてやるのが、一つの standard な方法である。それは、幾何学的には、多様体を止めておいて vector bundle などを調べるという事です。その他、多様体を動かしていく事もある訳で、fibre space の理論というものになります。そういう situation は非可換でも同様な訳です。$\mathcal{D}$-module の理論になる訳です。よく分かった $\mathcal{D}$ の場合は線型微分方程式の理論で、よく分からない $\mathcal{D}$ の場合の $\mathcal{D}$-module の理論は、非線型微分方程式の理論である。$\mathcal{D}$ 自身が非線型方程式を表わしており、$\mathcal{D}$-module の方がその上の vector bundle の

様なものです。ある種の $\mathcal{D}$-moduleは、vector bundleとして特殊なものがあって、tangent bundle、cotangent bundleはAからstandardに作られる。embedされた状態では、normal bundle、conormal bundle、それらのtensor積で作られるものなどあります。そのtangent bundleやcotangent bundleが実は、元の非線型微分方程式の無限小deformationを与えます。

[7月2日]

非可換環で、単位元を持つ環をAとします.

これが、ある程度有限性の条件を満足していると、これを適当に表示した時に、微分方程式なり差分方程式を表現している事が分かります。それは、ちょうど、可換環である種の有限性の条件(可換体上有限生成)があれば、有限次元Euclid空間の中で、代数的関係で記述されるAffine多様体というもの与える、のと同じです。

可換環が数の抽象化だったとすれば、非可換環はoperatorの抽象化です。

可換環がどうして幾何学的な対象と結びつくかというと、多様体上の関数の集合というimageで捉えた。今度はそれか

ら点を再現しないといけない。⑳の図式が、C－有理点を与えた訳です。$\mathfrak{p}$ = kernel ι は極大idealで、Aは、直和 $A = C \oplus \mathfrak{p}$ となっている。このとき、ι で与えられる点において局所環を作る。

非可換環の場合、Cは数ではなくて、どこかに作用している線型operatorの様なものです。

図形

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, "\mathrm{hom}"'] \arrow[dr, "\text{bijective}", "\sim"'] & \\ \mathcal{R} \arrow[r, "\text{左}\mathcal{R}\text{-hom}"'] \arrow[ur, phantom, "\supset"] & \mathcal{V} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{R}$：よくわからない環
K：可換体
$\mathcal{V}$：$\mathcal{R}$ 左加群 ---- ㉓

を考えます。これが関数方程式を与えます。これは⑳と同じ様なsituationです。$\mathcal{J} = \ker(\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{V})$ は $\mathcal{R}$-submoduleで、⑳と同様、$\mathcal{R} = K \oplus \mathcal{J}$（直和）となっている訳です。$\mathcal{V}$ は、$\mathcal{R}/\mathcal{J}$ に当る訳です。もっと分かり易い場合でいうと、

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] \arrow[dr, "\text{bijective}", "\sim"'] & \\ \mathcal{R} \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\supset"] & \mathcal{V} \end{tikzcd}$$

A: 可換環で C-algebra
（㉓のKは、Aの商体に当たる。）
---- ㉓'

で、Aが多項式環なら、$\mathcal{V}$ はAffine空間を表わしているし、Aは、幾何学的な図形に対応している。

$$\begin{aligned} \Theta &= \{ \text{derivations of } A \longrightarrow A \} \\ &= \{ \delta \in \mathrm{Hom}_C(A, A) \mid \delta(ab) = \delta(a)\cdot b + a\cdot\delta(b),\ {}^{\forall}a, b \in A \} \end{aligned}$$

とおきます。これはLie環になっていて、その自然な意味で

の enveloping algebra として、$\mathrm{Hom}_{c}(A, A)$ の部分環 $\mathcal{D}$ というものがつくられる。これが A に作用する differential operator です。

$\mathcal{D}$ を㉓' の $\mathcal{R}$ ととる訳です。A は 0 階の微分作用素として $\mathcal{D}$ の中に入っている訳です。A は左 $\mathcal{D}$ 加群です。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\text{identity}", "\sim"'] & \\
\mathcal{D} \arrow[r, "左\mathcal{D}\,\mathrm{hom}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & A \\
P \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r, mapsto] & P(1)
\end{tikzcd} \qquad \text{-----㉔}$$

(P(1) は微分作用素 P を $1 \in A$ に作用させたもの。)

$\mathcal{D} = A \oplus \mathcal{D}\Theta$ と直和になっている。$f \in A$ に対し、$f(1) = f$ ですから、合成 $A \hookrightarrow \mathcal{D} \twoheadrightarrow A$ は identity です。hom $\mathcal{D} \longrightarrow A$ の kernel は何かというと、1 に作用して 0 に行くということですから、掛け算で作用する部分がない訳ですから、$\mathcal{D}\Theta$ に当る。これが㉓' の一例です。A は、C-algebra で、その指定された数体上の多様体を考えている事になります。C を必要に応じて拡大する事もあります。

可換な場合をやたらと拡張しても意味がなく、operator に適した概念構成がある筈です。

超局所化すると、cotangent bundle 上の変化を考え、空間と fibre 方向がごちゃ混ぜになり、$\mathcal{D} = A \oplus \mathcal{D}\Theta$ の様な分解は壊れてしまいます。例えば 1 次元の例で言うと、

$$\mathcal{D} = \left\{ P = a_0(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^m + a_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} + \cdots + a_m(x) \;\middle|\; a_\mu(x) \in C[x] \right\}$$

（多項式係数線型常微分 operator）

Aは、多項式環$C[x]$です。Θは、1階微分 operator $A\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)$です。Aを切り離して考えると、

$$\mathcal{D} = C[x, \delta] \big/ ([\delta, x] - 1) \qquad \left(\begin{array}{l} \delta = \frac{d}{dx} \\ [\delta, x] = \delta\cdot x - x\cdot\delta \end{array} \right)$$

で、交換子積$[\delta, x]$は物理の言葉で言えば正準交換関係ということです。$\mathcal{D}$は、$\delta\cdot x - x\cdot\delta = 1$という関係式だけを仮定した非可換多項式環です。

$\mathcal{D}$の automorphism は例えば、

$$\begin{cases} x \longmapsto \delta \\ \delta \longmapsto -x \end{cases}$$

で、これは、解析の方で言えば Laplace 変換とか Fourier 変換に、ほぼ相当します。（Fourier 変換をすれば、微分作用素が掛け算作用素に、掛け算は微分に変わる事は、良く知られている。）。そういう事がありますから、微分方程式を表現する時は、xとδを fix して考えます。

本当の global な Fourier 変換に当るものは許されなくて、局所性を保つ接触変換をする事になる。兎に角、$\mathcal{R}$だけでは abstruct な意味での方程式で、掛け算部分と微分の部分が分離されていない situation です。㉓′でのAは、$\mathcal{R}$の極大可換部分環になっている。非可換な場合には、そういうAを1つ

fix する事が、舞台を設定する事に当る。超局所化すれば、そういう事が緩和されてくる。

㉔がなぜ方程式なのかというと、与えられたよく分からないschemeからよく分かったschemeへのhomomorphism

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, hook] \arrow[dr] & \\ \mathcal{R} \arrow[r, "\text{左}\mathcal{R}\text{-hom}"'] \arrow[ur, phantom, "2"] & \mathcal{V} \end{tikzcd} \quad \text{図形 1} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{tikzcd} A_0 \arrow[d, hook] \arrow[dr] & \\ \mathcal{D} \arrow[r, "\text{左}\mathcal{D}\text{-hom}"'] \arrow[ur, phantom, "2"] & A_0 \end{tikzcd} \quad \text{図形 2}$$

を考える。AからA₀へ、$\mathcal{R}$から$\mathcal{D}$へ、図形1から図形2へのそっくりそのままのhomです。左$\mathcal{R}$-homも左$\mathcal{D}$-homに写る。

㉓、㉓′のsituationを考える。Aを整域として、㉓のKはAの商体です。環上で定義された微分演算は、その商体まで、uniqueに拡張される事が知られている。$\mathcal{R}$はKという関数体に作用する訳ですが、㉓′を考えます。$\mathcal{J} = \mathrm{kernel}(\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{V})$は$\mathcal{R}$の左idealですが、これに対し、$\mathcal{J}$に含まれる最大の両側idealを$\tilde{\mathcal{J}}$とすると、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}} &= \{ P \in \mathcal{R} \mid P\mathcal{R} \subset \mathcal{J} \} \\ &= \{ P \in \mathcal{R} \mid PA \subset \mathcal{J} \} \end{aligned}$$

∵（最初の等号）

$P \in \{ P \in \mathcal{R} \mid P\mathcal{R} \subset \mathcal{J} \}$に対し、$P \cdot 1 \in \mathcal{J}$ゆえ

$\{ P \in \mathcal{R} \mid P\mathcal{R} \subset \mathcal{J} \} \subset \mathcal{J}$

任意の$Q \in \mathcal{R}$に対し、

$PQ\mathcal{R} = P(Q\mathcal{R}) \subset P\mathcal{R} \subset \mathcal{J}$　ゆえ右ideal

$QP\mathcal{R} = Q(P\mathcal{R}) \subset Q\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$　ゆえ左ideal

Pがある両側idealに入っていて、それが$\mathcal{J}$に含まれていたとすると、Pで生成された最小の両側idealは$\mathcal{R}P\mathcal{R}$である。

$$\{P \in \mathcal{R} \mid P\mathcal{R} \subset \mathcal{J}\} = \{P \in \mathcal{R} \mid \mathcal{R}P\mathcal{R} \subset \mathcal{J}\}$$

で、これは、Pを含む最小の両側idealが$\mathcal{J}$に含まれる様なPの全体で、これは自然に両側idealになるから、これが最大なもの。

（二番目の等号）

$\mathcal{R} = A \oplus \mathcal{J}$だから trivial　//

この$\mathcal{J}$は、$\mathcal{R}$を$\mathcal{V}$に作用する線型operatorと考えた時に、零operatorとして表現される部分を表わしている。$\mathcal{J}$は無駄な部分で、$\mathcal{R}/\mathcal{J}$としてreduceして考える。constant Cは、

$$C = \{f \in A \mid \mathcal{J}f = 0\}$$

で、これは$\mathcal{R}$のsubringです。

Aと$\mathcal{V}$は同じものですが、Aは掛け算operatorとして作用する$\mathcal{R}$の一部で、$\mathcal{V}$は、operatorが作用する関数空間です。Cは$\mathcal{R}/\mathcal{J}$のcenterになっている。$\mathcal{R}/\mathcal{J}$が$\mathcal{V}$にeffectiveに作用する。reduceして$\mathcal{J} = 0$として考える。Θは$\mathcal{J}$に含まれるsubmoduleです。Θのenveloping algebraは$\mathcal{R}$とは関係なしに

作れて、$\mathcal{R}$の中にinjectiveに入る。

$$\mathcal{D} = \Theta \text{から生成される} \mathcal{R} \text{の subring}$$

これは一般に、$\mathcal{R}$より真に小さくなる。微分の他に、ある種の差分operatorを導入すると、ある種の有限的な条件の下に全体$\mathcal{R}$になる事は言えますが。

$\mathcal{D}=\mathcal{R}$となる場合が、"微分的"な場合で微分方程式の場合です。この場合を考えます。

<u>仮定0</u>　　<u>$\mathcal{D} = \mathcal{R}$</u>

$\mathcal{R}$がΘから生成されるというsituationです。そうすると、本当に非線型微分方程式を表現している事になる。

まず、Θには$\mathcal{R}$が作用していなくて、部分環のAが左から作用している。（$f \in A$, $\delta \in \Theta$ に対し、$f\delta \in \Theta$）。また、これはLie環をつくる。（$\delta, \delta' \in \Theta$に対し、$\delta\delta' - \delta'\delta \in \Theta$）derivation のcommutator product は、またderivation になる。但し、A上のLie多元環ではない。Aの元はderivationに関してconstant ではありませんから。Θには左A加群（K加群でもある）で、Lie環であるという2つの性質がある。

今後、標数は0の場合を念頭において、A上ではなく、その商体K上で考えます。Kは体ですから、ΘがK加群であるという事は、K上のvector spaceという事です。

<u>仮定 1</u>　　<u>Θ：K上有限次元（n次元）　i.e.</u>

<u>$\Theta = K\delta_0 + \cdots + K\delta_{n-1}$　（直和）</u>

このとき

<u>$\exists f_0, \cdots, \exists f_{n-1} \in K$　s.t.　$\det(\delta_i(f_j)) \neq 0$</u>

となる。

$\because$　Kに属するあらゆるfの集合を縦に並べ、横ベクトルが（$\delta_0(f), \cdots, \delta_{n-1}(f)$）である様に縦に無限次元の行列をつくる。$\delta_i$が一次独立という事は、この縦ベクトルが一次独立という事を意味するから、あるn次小行列式は0でない。このnコのfに番号をつければよい。　//

今度は、$(\delta_i(f_j))^{-1}$を掛けてδ_i（$0 \leq i < n$）を変換してやる。

$$(\delta_i(f_j))^{-1}\begin{bmatrix}\delta_0\\ \vdots\\ \delta_{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\delta_0'\\ \vdots\\ \delta_{n-1}'\end{bmatrix}$$

こうすれば、

$$\delta_i'(f_j) = \begin{cases} 1 & (i = j)\\ 0 & (i \neq j)\end{cases}$$

となり、$\Theta = K\delta_0' + \cdots + K\delta_{n-1}'$（直和）で、新たなbasisになる。こうすれば、$f_i$を改めて$x_i$とすると、$\delta_i'$が$x_i$に関する偏微分に相当する。また、$\delta_i'$同志は可換です。

$$[\delta_i', \delta_j'] = 0$$

（元のδ_iに対しては可換とは限らない。）。

仮定2　K（又はA）が"弱い意味"で有限生成

（つまり、f_jをx_jに変えて、プライムは略して、

$$\delta_i(x_j) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \qquad (i, j = 0, \cdots, n-1)$$

という表示を与えた時、

$$\underbrace{\delta_0^{\alpha_0} \cdots \delta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}_{\substack{\cap \\ R = \mathcal{D}}}(y_\nu) = y_\nu^{(\alpha)}$$

をy_νのα次のderivativeとすると、

ある有限個の$y_0 \cdots y_{N-1}$が存在して、それと、それの

derivativesを全部持ってくれば、Aが、また、割り算

まで許せばKが、生成される、という事です。　）.

この仮定はbaseの取り方に因らない事が言えます。

$\{ y_\nu^{(\alpha)} \mid 0 \leq \nu < N, \ \alpha \in \mathbb{N}^{(\alpha)} \}$によってKが生成されますが、この

$\{y_\nu^{(\alpha)}\}$は<u>微分環</u>と呼ばれています。Aは、$\{y_\nu^{(\alpha)}\}$をC上に添

加した多項式環$C[(y_\nu^{(\alpha)})]$のsurjective imageになっている

訳です。

$$C[(y_\nu^{(\alpha)})_{\substack{0 \leq \nu < N \\ \alpha \in \mathbb{N}}}] \twoheadrightarrow A \qquad \text{surjective}$$

このkernelを$\mathfrak{l}$とします。δ_iが多項式環$C[(y_\nu^{(\alpha)})]$に、

$$\begin{array}{ccc} \delta_i : & C[(y_\nu^{(\alpha)})] \longrightarrow & C[(y_\nu^{(\alpha)})] \\ & \underset{\text{free generator}}{\underset{\sim\sim}{y_\nu^{(\alpha)}}} \longmapsto & y_\nu^{(\alpha+\varepsilon_i)} \end{array}$$

$$\varepsilon_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)$$

として作用します。これがAにおけるδ_iの作用とcompatibleである事は明らかです。$\mathcal{I}$は、derivations $\delta_0, \cdots, \delta_{n-1}$で閉じた、$C[(y_\nu^{(\alpha)})]$のidealです。($\mathcal{I}$の元は、微分したものも$\mathcal{I}$に入る。)。これは、微分idealとよばれるものです。

微分環の理論というのは、言わば、代数体のGalois理論の拡張で、線型常微分方程式の解の性質を議論する目的で作られた訳です。

基底定理　微分ideal $\mathcal{I}$はδ_iを許して有限生成

つまり、$\exists F_\kappa((y_\nu^{(\alpha)})) \in C[(y_\nu^{(\alpha)})] \quad (0 \leq \kappa < k)$

s.t. $\mathcal{I}$は、F_κ及び、そのderivativesで

左idealとして生成される。

F_κのderivativeは、

$$\delta_i F_\kappa = \sum_{\substack{0 \leq \nu < N \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} y_\nu^{(\alpha+\varepsilon_i)} \underbrace{\frac{\partial F_\kappa}{\partial y_\nu^{(\alpha)}}}_{y_\nu^{(\alpha)}\text{を変数とみての形式的微分}}$$

で、F_κは多項式で$y_\nu^{(\alpha)}$の有限個の不定文字しか含まないので、上の和は、実際は有限和である。

Aの構造は、$F_\kappa((y_\nu^{(\alpha)})) = 0 \quad (0 \leq \kappa < k)$の関係式で与えられる訳です。

$\mathcal{D}$を記号で書くと、$\mathcal{D} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{\oplus} K\delta^\alpha$　(直和)　(αはmulti-index)。

仮定2での$y_0, \cdots, y_{N-1}$の選び方で、$y_0, \cdots, y_{n-1}$が独立変数

で、残りの $y_n, \ldots, y_{N-1}$ が従属変数、即ち未知関数であると解釈できる訳です。これは Tschirnhaus 変換で、独立変数も従属変数も自由に変換しうる。Θ の base を取り換える事も有る。

	$x_0, \ldots, x_{n-1}$	$y_n, \ldots, y_{N-1}$	
独立変数	Tschirnhaus $\downarrow$	$\downarrow$ 変換	従属変数
	$x'_0, \ldots, x'_{n-1}$	$y'_n, \ldots, y'_{N-1}$	

独立変数に当るものは、K 上の次元ですから、個数 n は変わらない。変換では、独立変数と従属変数がそっくり入れ変わる事もあるし、独立変数として、従属変数もその微分も入ってくるものを取る事もある。Tschirnhaus 変換で見かけは変わりますが、具体的には、それを適当に選んで解く、という事がなされている訳です。

[7月3日]

昨日は、非可換環というものを通して、非線型微分方程式が記述されているという事情を少し説明した。R が derivation だけから生成される場合、微分的な場合を取り上げましたがその場合、多少の有限性の条件をおくと、(23)(23)′ の situation を具体的な生成元を使って表わせば、非線型微分方程式の問題として理解できる事を説明した訳です。

$\mathrm{Hom}_C(K, K)$の中に$\mathcal{D}$の様なものを取る仕方は他にもあって、例えば差分的な場合。差分方程式は、どう解釈できるかというと、Kを、constant Cの拡大体として、Cの元を動かさない様なKからKへのring homomorphism σを持って来る。 i.e.

$$\sigma(cf) = \sigma(c)\sigma(f) = c\,\sigma(f) \qquad \left(\begin{array}{l} c \in C \\ f, g \in K \end{array}\right.$$
$$\sigma(f \cdot g) = \sigma(f)\,\sigma(g)$$

δの場合は、$\delta(f \cdot g)$の方が変わってくる。ご承知の様に、微分というものは、automorphismの無限小変換の様なものを表現している。つまり、σがidentity mapに無限に近い場合を考える。εをparameterとして、

$$\sigma_\varepsilon(f) \equiv f + \varepsilon\,\delta(f) \qquad \mathrm{mod}\ \varepsilon^2$$

というsituationを考えるとこれはautomorphismである。

$$\left(\begin{array}{lll} & \sigma_\varepsilon(fg) = fg + \varepsilon\,\delta(fg) & \mathrm{mod}\ \varepsilon^2 \\ \text{一方} & \sigma_\varepsilon(f)\sigma_\varepsilon(g) = (f + \varepsilon\,\delta(f))(g + \varepsilon\,\delta(g)) & \\ & \qquad = fg + \varepsilon\,\delta(fg) & \mathrm{mod}\ \varepsilon^2 \end{array}\right)$$

この様に、微分はautomorphismのうちで、identity mapに限りなく近いものを表現している。

$$\delta = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(\sigma_\varepsilon - \mathrm{id})$$

要するに、我々の考えるoperatorのringとしては、δもσも含む様な$\mathcal{R}$を考える事もできる訳です。

$K \ni f$が、$f = p(x_0, \cdots, x_{n-1})$と表わされている場合、$f$の$\sigma$によるimageは、

$$\sigma(f) = p(\sigma(x_0), \cdots, \sigma(x_{n-1}))$$

です。つまり、ある代数多様体の(x)という座標がσによって写った点もまた同じ多様体上にある訳で、σは多様体のautomorphismを表わしている訳です。

兎に角、automorphismというのは、広い意味で、一種の有限な変位を表わす「差分」であると考えられる。それのinfinitesimalな場合が、微分的な場合です。

だから、δからenveloping algebraを作るかわりに、まずσというものから積でsemigroupを作る。(automorphismの場合、逆元もあるから群と言ってもよい。)。それのlinear closureをとってやれば、所謂、群環が作られる訳です。そういうものが$\mathrm{Hom}_C(K, K)$の中に部分環として入っている。そこで差分方程式の理論を作る事ができる訳です。

一般のC-linear mapは、かなり複雑なものもあるんじゃないか、と思えるかもしれないけど、微分的、差分的な場合が典型です。この2通りの場合が、かなり一般的なものと考えられる理由を説明したいと思います。つまり、ある種の有限的な条件を置くと、微分的、差分的な場合で尽くされる事が実際に言える。

昨日の有限性の仮定は全部忘れ、㉓のsituationを考える。昨日の様に $\tilde{g}=0$ とreduceしたmodelで考える。Cはこのreduceとは無関係で、reduceされた $\mathcal{R}$ のcenterで、Aは、$\mathcal{R}$ のmaximal commutative subringです。

仮定　任意の $P \in \mathcal{R}$ について、

$APA = \{\sum_{finite} g_i P f_i\}$ は左A加群として有限生成

これは次の様に言ってもいい。

$P_0, \cdots, P_{n-1} \in \mathcal{R}$ で生成された両側A加群 $A(P_0A + \cdots + P_{n-1}A)$ は仮定から左A加群として有限次元です。この $P_0A + \cdots + P_{n-1}A$ の部分は有限次元A右加群です。だから、仮定は、

$\mathcal{R}$ の有限次元A右部分加群は、有限生成のA左部分加群に含まれる。

と言ってもいい訳です。

この仮定を置かない場合には、この条件が成り立つ様な $\mathcal{R}$ の元Pの全体は、$\mathcal{R}$ の部分環をつくります。これがAの元、あるいはKの元を含むことは明らかですね。

◦足し算の場合、

$$A(P+Q)A = APA + AQA$$

で APA, AQA が有限次元だから、$P+Q$ も条件を満す。

◦掛け算の場合、

$$\left.\begin{aligned} AQA &= A^{\exists}B_0 + \cdots + A^{\exists}B_{n-1} \\ APA &= A^{\exists}C_0 + \cdots + A^{\exists}C_{n-1} \end{aligned}\right)$$ とかける。

この時、

$$APQA \subset AP(AQA) = AP(AB_0 + \cdots + AB_{m-1})$$
$$\subset A(C_0B_0 + \cdots + C_{n-1}B_0) + \cdots + A(C_0B_{m-1} + \cdots + C_{n-1}B_{m-1})$$

で、高々 mn 次元の A 左加群に含まれる。

だから、条件が成り立つ様な P の全体は、A を含む $\mathcal{R}$ の部分環をつくる。仮定は、$\mathcal{R}$ の元全部が条件を満たすという訳です。

$\mathcal{R}$ の有限次元 A 右 submodule $\mathcal{M}$ を持って来ます。$A\mathcal{M}$ は、A - bimodule で、

$$A\mathcal{M} = AP_0 + \cdots + AP_{n-1} \quad (P_i \text{ は左加群としての generator})$$

です。今度は、任意の $f \in A$ を持ってきた時、$P_i f \in \mathcal{M} \subset A\mathcal{M}$ 即ち、$P_0, \cdots, P_{n-1}$ の左一次結合で unique に書けます。

$$P_i f = a_{i,0} P_0 + \cdots + a_{i,n-1} P_{n-1}$$

これが、全ての i について言えます。

$$\begin{bmatrix} P_0 f \\ \vdots \\ P_{n-1} f \end{bmatrix} = (a_{ij})_{0 \le i,j < n} \begin{bmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$(a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(n \times n, A)$$

と書けます。$f \in A$ を与える事に $(a_{ij})_{i,j}$ という正方行列が決まる訳です。

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & \mathrm{Mat}(n \times n, A) \\ \Psi & & \\ f & \longmapsto & (a_{ij})_{i,j} \end{array}$$

これが、所謂、Aの表現です。但し、この写像はA-linearではなくてC-linearです。Rの元と可換なのはCの元ですから。そういう表現論の事は、昔、Emmy Noetherの時代にちゃんとやられている訳です。Aは$\mathrm{Mat}(n\times n, A)$にinjectiveに入っていますから、写像によって、Aは$\mathrm{Mat}(n\times n, A)$の可換な部分環と考えられる。$\mathrm{Mat}(n\times n, A)$は$A$上の多元環ですが、中に入っている部分環は、$A$上の多元環とは言えない。だから、それを$A$上の多元環と思いたければ、係数拡大をしなければいけない。Aの$\mathrm{Mat}(n\times n, A)$でのimageを$\mathbb{A}$とすると、$\mathbb{A}$の元は$C$一次結合については閉じてるけど、$A$一次結合については閉じてるとは言えない。係数拡大は、それをA一次結合まで拡張する訳で、$A\cdot\mathbb{A}$です。$A \sim A\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$とidentifyしている訳です。しかも、$A\cdot\mathbb{A}$は可換な部分多元環です。そうすれば、$A$の有限次拡大$A'$の中では、$\mathbb{A}$は、適当にbaseを取り直してやれば、三角化できる。Aを$\mathrm{Mat}(n\times n, A')$で表現すると、

$$A \ni f \longmapsto \begin{bmatrix} \sigma_0(f) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{n-1}(f) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_i : A \hookrightarrow A' \quad \text{ring isomorphism}$$

$\sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}$はdistinctではなくて、同じものが出てくる事は大いにありうる。

また、これは$A\mathcal{M}$から決まった表現な訳です。Aと$\mathcal{M}$の元から足し算掛け算をどんどん施す事によって$\mathcal{R}$が生成される意味で$\mathcal{R}$が有限生成の場合、σとしては、有限個のもの及びその積でつくられるautomorphismしか生じない訳です。結局、$\mathcal{M}$をどんどん大きくしていった時に表われうるσの全体が、$A \hookrightarrow A'$の様なisomorphismのspectrumを作っている訳です。差分も入ってくる。"微分的"な場合というのが、そのspectrumがidentityだけの場合($\{\sigma\} = \{id\}$)を言っている訳です。つまり、

$$\Phi : \quad f \longmapsto \begin{bmatrix} f & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f \end{bmatrix}$$

の場合です。なぜこの場合が微分的な場合かというと、Φの$*$に出てくるものが、実はfのderivativesです。

size 2のときのsituationで言うと、

$$f \longmapsto \begin{bmatrix} f & \delta(f) \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

と書いておきます。δが、linearである事は明らかで、積に対しては、Φはring isomorphismなので、

$$\begin{bmatrix} fg & \delta(fg) \\ 0 & fg \end{bmatrix} = \Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g) = \begin{bmatrix} f & \delta(f) \\ 0 & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g & \delta(g) \\ 0 & g \end{bmatrix}$$

つまり、$\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g$で、正に微分の条件です。

size 3 の場合.

$$f \longmapsto \begin{bmatrix} f & \delta(f) & \xi(f) \\ 0 & f & \delta'(f) \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

と書くと、δ, δ'は今の条件（$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$）を満足する訳で、$\xi$が問題です。$f\cdot g$ の image を計算すると、

$$\xi(fg) = f\xi(g) + \delta(f)\delta'(g) + \xi(f)g$$

となります。$\xi(f\cdot g) = \xi(g\cdot f)$から、$\delta(f)\delta'(g) = \delta(g)\delta'(f)$。

即ち、
$$\begin{vmatrix} \delta(f) & \delta'(f) \\ \delta(g) & \delta'(g) \end{vmatrix} = 0$$

つまり、この行列の1列と2列は比例します。これが勝手なf, gについて言えますから、δとδ'とは、ある$h \in A$があって、$\delta' = h\delta$ と書けます。だから前式を書き直して、

$$\xi(f\cdot g) = f\xi(g) + h\delta(f)\delta(g) + \xi(f)g$$

ここで、$\tilde{\delta} = \xi - \frac{1}{2}h\delta^2$ と定義すれば、

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(f\cdot g) &= f\xi(g) + h\delta(f)\delta(g) + \xi(f)g \\ &\quad - \frac{1}{2}h\left(f\delta^2(g) + 2\delta(f)\delta(g) + \delta^2(f)g\right) \\ &= f\tilde{\delta}(g) + \tilde{\delta}(f)g \end{aligned}$$

で、$\xi = \frac{1}{2}h\delta^2 + \tilde{\xi}$ でのおつりの部分$\tilde{\delta}$が微分写像である事が判った訳です。だから最終的には、

$$f \longmapsto \begin{bmatrix} f & \delta(f) & \xi(f) \\ 0 & f & h\delta(f) \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & \delta(f) & \frac{1}{2}h\delta^2(f) + \tilde{\delta}(f) \\ 0 & f & h\delta(f) \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

となる。

本当は、こうして出てくるδや$\tilde{\delta}$が$\mathcal{R}$の元であることを説明しなければいけませんが省略します。とにかく、そういう訳で、微分は、有限なdeformation（差分）がinfinitesimalになった時の極限として、しかもそのおつりの部分として出て来るというのが今のsituationです。それは、微分方程式は差分方程式の極限の場合であるという解釈に符合している訳です。無限小のautomorphismに当るものがoff diagonalに出て来る。解析的に一番基本的で重要なのは、spectrumがidentityだけの場合です。その場合には確かに微分で収まる。

昨日は、Θが有限次元で、Kが、有限個の元とその微分により生成されると仮定しましたが、それは一見、$\delta_0, \dots, \delta_{n-1}$の選び方に依っている訳です。実際には依らないと言いましたが、別の言い方をすれば、初めからintrinsicな条件である事を明らかにできます。仮定1はintrinsicな条件で、仮定2は次の様に言い換えられる。

<u>仮定2′</u>　<u>$\mathcal{R}$が$\mathbb{C}$上の非可換環として有限生成</u>

∵（仮定2から仮定2′が言える事）

独立変数$x_0, \dots, x_{n-1}$、従属変数$y_n, \dots, y_{N-1}$と、x_iに関する偏微分δ_iを施していったものでKが生成される

時、$\mathcal{R}$は、$x_0, \cdots, x_{n-1}, y_n, \cdots, y_{N-1}, \delta_0, \cdots, \delta_{n-1}$ で生成されます。なぜかと言うと、これで生成される$\mathcal{D}$のsubringを$\mathcal{D}_0$とおくと、

$f \in \mathcal{D}_0$ に対し、$\delta_i(f) \in \mathcal{D}_0$

（$\delta_i(f) = \delta_i \cdot f - f \cdot \delta_i$ だから。）

だから、yが$\mathcal{D}_0$に入っていれば、そのderivativesも$\mathcal{D}_0$に入る。それらによってKが生成される訳ですから、$K \subset \mathcal{D}_0$ です。だから、

$$\mathcal{D} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{\oplus} K \delta^\alpha \subset \mathcal{D}_0$$

つまり $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ です。

（仮定2′から仮定2が言える事は、レポート問題）//

昨日説明したKが弱い意味で有限生成という事で、そのgeneratorsの間の基本関係式として微分方程式が捉えられた。

可換環の場合に、ある多様体上の点からすぐ隣りの点へ無限小だけ変位するというのがtangent vectorだった。同じ様に、今度は、考えている方程式が解けた時に、その解に無限に近い別の解を見つける事は線型微分方程式の問題になる。1つの$\mathcal{D}$加群として捉えられる。

これは本当に一般のsituationで言えますが、一番分かり

易い微分的な場合で説明します。

我々にとってむしろ、algebra の方が実体ですから、tangent vector, cotangent vector なども代数的に捉えなければならない。

可換整域 A が C-algebra とすれば、これは、Affine 多様体 V に対応している。V という多様体があった時に、その上の cotangent vector を考える。$A \otimes_C A$ の幾何学的表現が、$V \times V$ になる訳です。A の商体 K をとって考える。V は、$V \times V$ に対角線多様体 $\{(x, x) \in V \times V\}$ として embed されている。それに対する contravariant な対応 $K \otimes_C K \longrightarrow K$ の方は、$K \otimes_C K$ の元 $\sum f_i(x) \otimes f_i'(x')$ (x と x' は独立変数)は、K の元 $\sum f_i(x) f_i'(x)$ に写る。つまり、$V \times V$ から、その対角線に制限写像してやる訳です。その時に、kernel ($K \otimes_C K \longrightarrow K$) ($= \mathcal{I}$ と書く)を考えます。これは、$V \times V$ 上の関数で、$\{x = x'\}$ 上で 0 になるものです。$\Omega^1 = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ が普通言われる 1-form になる。

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow K \otimes_C K \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

kernel ($K \otimes_C K \longrightarrow K$) の元は、$K \otimes_C K$ は Tensor 積で、K の元は移動できないけど、K の方では自由だから、移動することによって消えるもので、例えば、$f \otimes 1$、$1 \otimes f$ はどちらも f に行くから、差 $f \otimes 1 - 1 \otimes f$ は 0 に行く。$\mathcal{I}$ というのは、

$f\otimes 1-1\otimes f$ という形の元で生成された ideal と言ってよい。$f\otimes 1-1\otimes f\in \mathcal{I}$ を mod $\mathcal{I}^2$ で考えたものを df と書く。これは次の性質がある。

$$d(fg)=fdg+gdf$$

∵ $d(f\cdot g)=fg\otimes 1-1\otimes fg$

$$=(f\otimes 1)(g\otimes 1-1\otimes g)+(f\otimes 1-1\otimes f)(1\otimes g)$$

これを mod $\mathcal{I}^2$ で考えるという事は、

$$g\otimes 1-1\otimes g\in \mathcal{I}$$

ですから、$f\otimes 1$ を mod $\mathcal{I}$ で考えればよい。

これは、$K\otimes_C K$ (mod $\mathcal{I}$) はつまり K で考える訳で、

$f\otimes 1$ は f に写りますから、f と書いていい。

第2項も同様。前の式から、

$$d(f\cdot g)=f(g\otimes 1-1\otimes g)+(f\otimes 1-1\otimes f)g$$

$$=fdg+gdf \qquad //$$

だから、d は普通の微分と思っていいんですが、対角線に無限に近い所で考えている訳です。mod $\mathcal{I}^2$ ということは。

tangent でなく cotangent の方から、なぜ先に言ったかというて、代数的なものと、幾何学的なものは、contraravariant な関係にあるから、代数的には逆に言った方が自然な訳です。

tangent の方は、ring hom. $\eta: A\longrightarrow C$ により C を A 加群とみて、$\mathrm{Hom}_A(\Omega'_A, C)$ が、η という点における V の

tangent space $T_\eta V$ になる。

今度は、微分方程式の infinitesimal な deformation を考える。点に当るものは、solution な訳です。単に解の集合自体を考えると、無限次元的になっていますが、微分構造を考えると有限生成的です。

非線型微分方程式の solution が判った時に、それを無限小だけ deform して、新しい解をつくるという問題を考えます。

例えば、 $F_\kappa((x_i),(y_j^{(\alpha)}))=0 \quad (0\le \kappa<k)$

$(0\le i<n,\ n\le j<N,\ \alpha\in\mathbb{N}^n) \quad \cdots$ ㉕

で、独立変数 (x_i) はそのままにして、y_j を少し動かして、$y_j+\varepsilon z_j$ とする。そのとき、$y_j^{(\alpha)}$ は $y_j^{(\alpha)}+\varepsilon z_j^{(\alpha)}$ となる。この様に置き換えても、方程式が成り立つ様に、mod ε^2 で考えて、z_j を見つけたい。deform したものは、

$$F_\kappa((x_i),(y_j^{(\alpha)}+\varepsilon z_j^{(\alpha)}))=0 \quad (\mathrm{mod}\ \varepsilon^2)$$

この左辺を展開してみると、

$$F_\kappa((x_i),(y_j^{(\alpha)}))+\varepsilon\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\partial F_\kappa}{\partial y_j^{(\alpha)}}z_j^{(\alpha)} \quad (\mathrm{mod}\ \varepsilon^2)$$

（ε の係数は、effective には有限和）

これが 0 という事は、第一項は元の方程式で、0 ですから、

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\partial F_\kappa}{\partial y_j^{(\alpha)}}z_j^{(\alpha)}=0 \quad (0\le\kappa<n)$$

という事で、書き直せば、

$$\sum_j P_{\kappa j} z_j = 0 \qquad (0 \le \kappa < k)$$

ここで、

$$P_{\kappa j} = \sum_\alpha \frac{\partial F_\kappa}{\partial y_j^{(\alpha)}} \delta^\alpha \qquad \left(\delta^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^{\alpha_0} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)^{\alpha_{n-1}}\right)$$

です。係数 $\frac{\partial F_\kappa}{\partial y_j^{(\alpha)}}$ はKの元です。また $P_{\kappa j} \in \mathcal{D}$。

だから、z_j で生成された $\mathcal{D}$-moduleで、しかも有限個のrelationから成っているので、coherent な $\mathcal{D}$-加群が生ずる訳です。これが、㉕の無限小変形を表わしている訳です。これを座標を使わないで、intrinsic に言いたい訳です。どうするかと言うと、tangent, cotangent の枠組で定義できます。

Kを、$\mathcal{D}$の作用を無視して、$y_j^{(\alpha)}$を全部添加して生じたものとします。これに対して、有限一次結合 $\sum g_i df_i$ ($f_i, g_i \in K$) 全体の集合を Ω^1 とします。これは、関数方程式的なstructureを無視して、形式的に作った1-form です。

可換環の場合は、㉑もΩ^1もn次元で、K上dual です。この場合のΩ^1は、微分環の構造は全く反映していない訳です。㉕の代数的な関係式だけ考えて、$y_j^{(\alpha)}$がy_jの微分である事が全然考慮されてない訳です。一方㉑の方には、そういう構造はもちろん入っている。㉑に対して、Ω^1の方ははるかに大きくなる。ですが本当に意味のあるのは、solutionに対応し

ているもので、solutionはn変数の関数で与えられますから solution を辿って行くと、n次元の多様体になっている訳です。そのn次元多様体に対応する$\tilde{\Omega}'$というのも在る筈です。⑪はそれに対応する訳です。で、surjection $\Omega' \longrightarrow \tilde{\Omega}'$ がある。Ω'では、$F_K = 0$ の全微分から導かれる関係式は成り立ちますが、$\delta_i(y_j^{(\alpha)}) = y_j^{(\alpha+\varepsilon_i)}$ という事は考慮されていない。$y_j^{(\alpha)}$の全微分は、$\sum_i y_j^{(\alpha+\varepsilon_i)} dx_i$ で、仮にこれを$\bar{d}y_j^{(\alpha)}$とします。だから、$dy_j^{(\alpha)} - \sum_i y_j^{(\alpha+\varepsilon_i)} dx_i$ は、Ω'では0でないけど、$\tilde{\Omega}'$に行くと0になる訳です。$\tilde{\Omega}'$は、K上のn次元 vector space で、$dx_0, \cdots, dx_{n-1}$ が base になっている。

Θと直交するΩ'の部分を$\mathcal{M}$と置く。

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \Omega' \longrightarrow \tilde{\Omega}' \longrightarrow 0 \qquad \cdots\cdots (26)$$

この$\mathcal{M}$が前に言った無限小変形を与える coherent sheaf である事を説明します。

まず、$\mathcal{M}$に$\mathcal{D}$加群の構造が入る事を説明します。Ω'、$\tilde{\Omega}'$はK加群ですから、$\mathcal{M}$がK加群になる事は明らかです。$\delta \in \Theta$の$\mathcal{M}$への作用を言えば、自然な意味で enveloping algebra まで拡張できる。

$$\mathcal{M} = \{\omega \in \Omega' \mid \langle \omega, \delta \rangle = 0 \quad \text{for } {}^\forall \delta \in \Theta\}$$

1-form から外微分に依り、2-form、3-form、$\cdots\cdots$が作れる。

$\Omega' \ni \omega = \sum_i g_i df_i$ に対し、2-form $d\omega = \sum_i dg_i \wedge df_i$ となる。

外微分 d に依り、

$$0 \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ K}}{\Omega^0} \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \cdots$$

(d : C-linear)

これは、Θとの内積をとると、1つ後ろへ戻る。

$\Omega^2 \ni \omega\wedge\omega'$ ($\omega, \omega' \in \Omega^1$) と $\delta \in \Theta$ との内積は、

$$\langle \delta, \omega\wedge\omega' \rangle = \underbrace{\langle \delta, \omega \rangle}_{\in K} \omega' - \underbrace{\langle \delta, \omega' \rangle}_{\in K} \omega \quad \in \Omega^1$$

で定義される。

だから $\delta(\omega) = \langle \delta, d\omega \rangle$ と定義すれば、δ は Ω^1 から Ω^1 への写像で、これが、Θの $\mathcal{M}$ への作用を与える。

これが、derivative の性質を持つ事を証明する。

<u>Want</u> $\begin{cases} \delta(f\omega) = \delta(f)\omega + f\,\delta(\omega) \\ (f\delta)\omega = f(\delta(\omega)) \end{cases}$ $\quad f \in K,\ \omega \in \Omega^1$ ……(i) ……(ii)

((i)は、$\mathcal{M}$ が $\mathcal{D}$ 加群になるには、そうなっていないと困る訳で、逆に、この2つの条件が成り立つ様に Ω^1 に対するΘの action が定義されていると、enveloping algebra に拡張できる事が容易に分かる。)

∵(i) $\delta(f\omega) = \langle \delta, d(f\omega) \rangle = \langle \delta, df\wedge\omega + f\,d\omega \rangle$

$= \langle \delta, df\wedge\omega \rangle + \langle \delta, f\,d\omega \rangle$

$= \langle \delta, df \rangle \omega - \langle \delta, \omega \rangle df + f \langle \delta, d\omega \rangle$

$= \delta(f)\omega + f\,\delta(\omega)$ (∵ ω に対する条件より $\langle \delta, \omega \rangle = 0$)

(証) $(f\delta)(\omega) = \langle f\delta, d\omega \rangle = f \langle \delta, d\omega \rangle$
$= f\,\delta(\omega)$ //

[7月4日]

非線型微分方程式の解の無限小変形を与える方程式を、intrinsic に捉えようとすると、$\mathcal{M}$ という coherent $\mathcal{D}$ 加群になることをお話ししている訳です。

昨日与えた、Θ の $\mathcal{M}$ への action と $\mathcal{M}$ の definition から、$\mathcal{D}$ の $\mathcal{M}$ への action が自動的に決まりますが、これは研究課題にしましょう。

今日は、普通、analysis の人達が理解している解の無限小変形と、具体的に昨日話した $\mathcal{M}$ が一致する、という事を言いたい。

簡単な一階単独常微分方程式を考える。x を独立変数、y を従属変数（$y = f(x)$）で、

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \qquad \text{-----} \quad (27)$$

です。F は多項式とする。（有理関数でもいいけど。）

x、y に、高階微分を添加する必要はない訳です。$y' = F(x, y)$ という関係式がありますから。$y' - F(x, y)$ で生成された、$C[x, y, y', \cdots]$ の微分 ideal で、$C[x, y, y', \cdots]$ を割った

ものがAです。そうすると、$y', y'', \cdots$ は消去されていきますから、結果的に、$K = C(x, y)$ と書けます。

KからδKへの写像δは、

$$\begin{cases} \delta(x) = 1 \\ \delta(y) = F(x, y) \end{cases}$$

で決まります。δはxに関する常微分と見なせます。$\Theta = K\delta$ です。

このとき、xを独立変数、yを従属変数とする必要はなくて、$\Theta = K\delta'$ $\left(\delta' = F(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right)$ としてもよい。$F \neq 0$ とすると、体Kの中で逆元をもちますから、$\delta' = \frac{\partial}{\partial y}$ とおいてもいい。δ' はyに関する常微分と思える訳です。そしてxはyの関数である、と立場を転換する事もできる。

Kは2変数関数体だけど、飽くまでも1変数の未知関数を扱っている。1変数というのはΘのK上の次元で、intrinsicな意味を持つ。ところで、$\mathcal{D} = K \oplus \mathcal{J}$ と分けられますが、$\mathcal{J}$はintrinsicには分けられない。例えばδ^2 をδ' で書いてやると、

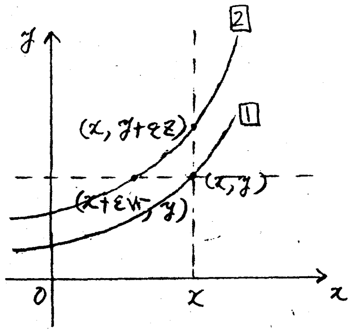
$$\delta'^2 = (F\delta)\cdot(F\delta) = F^2\delta^2 + F(\delta F)\cdot\delta$$

となって、$F(\delta F)\delta \in K\delta$ は1階のoperatonで、表現の仕方によって、高階の部分が低階へ降りてくる事もある。

今考えている微分方程式は、各点で勾配が指定されている。

この tangent vector を繋いでいくと、1次元の解曲線が ∞^1 個出てくる。∞^1 個というのは、例えば、$x=0$ で切ると、y の値を決めて constant が入る訳です。解曲線の family を表わす parameter が入る訳です。この parameter を消去したものが、$\dfrac{dy}{dx} = F(x, y)$ と考えられる。

方程式が解けて、y が判った時、ε を無限小の parameter として、$y+\varepsilon z$ が解になる様につくりたい。



解になる条件は、

$$\frac{d(y+\varepsilon z)}{dx} - F(x, y+\varepsilon z) = 0 \pmod{\varepsilon^2}$$

で、これが成り立つ様に z を求めよという訳です。ε^0 の項は元の方程式ですから、ε^1 の係数を考えればよくて、

$$\frac{dz}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y} z = 0$$

という方程式になる。線型常微分方程式です。書き直して、

$$\Bigl(\frac{d}{dx} - \underbrace{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}_{K}\Bigr) z = 0$$

これが、x を独立変数と見た場合です。

y を独立変数と見る時、x を $x+\varepsilon w$ に置き換えて考えますが、この w と z とはもちろん関係ある訳です。図の $(x+\varepsilon w, y)$

と $(x, y+\varepsilon z)$ を結ぶ直線の勾配は $-\frac{z}{w}$ で、無限小ですから $F(x,y)$ と一致します。 $w = -\frac{1}{F(x,y)} z$ と書ける訳です。

上の様に2通りの deform の仕方がありますが、実際に欲しいのは、$\boxed{1}$ の解曲線が $\boxed{2}$ の解曲線に変わった事で、deform の仕方に関係ありません。z を使っても w を使っても $\mathcal{M}$ には変化がない訳です。

$$\mathcal{M} = \mathcal{D} z = \mathcal{D} \Big/ (\delta - F_y(x,y))$$

です。$\mathcal{M} = \mathcal{D} w$ と書いても同じ事です。$\mathcal{M}$ というのは、無限小 deformation を、deform の仕方に依らない intrinsic な形で表わしている訳です。これは高階偏微分方程式でも事情には変わりがない。

今度は、generator を1つ指定した時に、$\mathcal{M}$ が、無限小 deformation を与える事を説明しましょう。設定は前と同じ、$C[(x_i), (y_j^{(\alpha)})] \Big/$ (微分 ideal) を考える。微分 ideal の generator として出て来るのが微分方程式で、㉕の様なものです。この解多様体として、n 次元多様体が出て来る。㉕の無限小変形は、74～75ページで説明しました。

主張したかったのは、exact 列㉖で定義した $\mathcal{M}$ が、z_y で生成される coherent $\mathcal{D}$ 加群である、ということだった訳で、$\mathcal{M}$ が $\mathcal{D}$ 加群である事は、76～78ページで説明した。(coherent については、8～9ページ参照)。これで、

exact列㉖で抽象的に定義した $\mathcal{M}$ が、非線型微分方程式の解の無限小変形を記述する coherent $\mathcal{D}$ 加群という具体的な内容を持つ事が判る。exact列㉖の $\mathcal{M}$ の方が、intrinsic な定義を与えている訳です。

75～76 ページでの $\mathcal{M}$ の構成を思い出してください。

㉙の例で言うと、Ω' では、dx と dy は独立な訳です。これが $\tilde{\Omega}'$ では独立ではなくて、$dy - F(x, y)dx = 0$ という関係がある。Ω' をこの relation で割ったものが $\tilde{\Omega}'$ で、$\tilde{\Omega}'$ の元は区別する為に $\tilde{d}x$、$\tilde{d}y$ と書きました。

一般の場合の Ω' と $\tilde{\Omega}'$ の違いは、76 ページ 5行目以下で説明した。Ω' で独立な元だった dx_i, $dy_j^{(\alpha)}$ は、$\tilde{\Omega}'$ では、独立なものは dx_i だけで、$dy_j^{(\alpha)}$ は dx_i の一次結合で書けた。

言い換えれば、Ω' は、dx_i で生成された submodule と、$dy_j^{(\alpha)} - \sum_i y_j^{(\alpha+\varepsilon_i)} dx_i$ で生成された submodule との直和になっている訳ですから、$\mathcal{M} = \ker(\Omega' \to \tilde{\Omega}')$ は、$\{dy_j^{(\alpha)} - \sum_i y_j^{(\alpha+\varepsilon_i)} dx_i\}_{j,\alpha}$ で生成されている事が判った訳です。これが何を意味するかと言うと、改めて

$$dy_j - \sum_i y_j^{(\varepsilon_i)} dx_i \overset{\text{def}}{\equiv} z_j \quad (\in \mathcal{M})$$

と置きます。（$y_j^{(\varepsilon_i)} = \delta_i(y_j)$）。$\mathcal{M}$ は、z_j とその微分で生成されている。（$\delta^\alpha(z_j) = dy_j^{(\alpha)} - \sum_i y_j^{(\alpha+\varepsilon_i)} dx_i$ である事は、レポート問題）。$\mathcal{M}$ は次の様に書ける。

$$\mathcal{M} = \sum_j \underbrace{\left(\sum_\alpha K\delta^\alpha\right)}_{\mathcal{D}} z_j$$

言い換えれば、$\mathcal{M}$ は、$N-n$ 個（従属変数 y_j の個数）の generator で生成される。これで $\mathcal{M}$ が有限生成である事は言えた。

以下、relation が有限個である事を言う。

今度は、㉕の式を全微分すると、

$$\sum_i \frac{\partial F_K}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j,\alpha} \frac{\partial F_K}{\partial y_j^{(\alpha)}} dy_j^{(\alpha)} = 0 \quad \cdots ㉘$$

この式を z_j の式に直したい。z_j の定義から、

$$dy_j^{(\alpha)} = z_j^{(\alpha)} + \sum_i y_j^{(\alpha+\varepsilon_i)} dx_i \quad \cdots ㉙$$

㉙を㉘に代入する訳ですが、82ページで言った様に、Ω' では、$\{z_j\}$ と $\{dx_i\}$ は直和ですから直交している。だから㉙を㉘に代入した式で、dx_i の係数と、$z_j^{(\alpha)}$ を含む項は、それぞれ 0 になる。

dx_i の係数は、

$$\frac{\partial F_K}{\partial x_i} + \sum_{j,\alpha} \frac{\partial F_K}{\partial y_j^{(\alpha)}} y_j^{(\alpha+\varepsilon_i)} = 0$$

で、これは何かというと、元あった $F_K = 0$ という式を δ_i で微分した式になっている。だから、これは関係ありません

次に、残りの $z_j^{(\alpha)}$ を含む項を取り出すと、

$$\underbrace{\sum_j \left(\sum_\alpha \frac{\partial F_k}{\partial y_j^{(\alpha)}} \delta^\alpha \right)}_{\in\, \mathcal{D}} z_j = 0 \qquad (0 \le k < \ell)$$

Ω'において成り立つ関係式は、これ以外ありませんから、relation の方も有限個である事が言えた訳です。

[局所化の代数的理論]

局所化や超局所化等を考えて、方程式の reduction をするという program と、最近、可積分系などで判った事と、局所化、超局所化とどう繋ぐか、という program があって考えておりながら、なかなか先に進まない。
(可換環、非可換環の事は、44～50 ページで言った。)

我々が考える微分作用素の場合は、Ore－浅野条件は成り立っている。大体の場合。この場合の非可換環$\mathcal{R}$は、零因子のない非可換環な訳です。(0でない2つの微分作用素P, Qに対し、積$P \cdot Q$も0でない.)。この時、乗法系として、$S = \mathcal{R} - \{0\}$を取れば、一番大きな商環、つまり商体が作れる。この時、Ore－浅野条件は、$P, Q \in S$に対し、常に右公倍元が存在するという事です。(PまたはQが0のときは、条件は trivial)。つまり、「任意の$P, Q \in S$に対し、

$P\mathcal{R} \cap Q\mathcal{R} \neq 0$ 」

であれば商体は作れる。

これは次の様に言ってもいい。

「 0でない右ideal $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ に対し、常に、$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}' \neq 0$ 」

（なぜかと言うと、$\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ の中から、それぞれ、0でない元 P, Q を勝手に取ってくると、$P\mathcal{R}$ は $\mathfrak{a}$ に含まれる右ideal、$Q\mathcal{R}$ は $\mathfrak{a}'$ に含まれる右idealで、$P\mathcal{R} \cap Q\mathcal{R} \neq 0$ なら、$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}' \neq 0$ となる。逆は、単項右idealは右idealの特殊なものだから trivial ）

これが、微分作用素の場合のOre－浅野条件の言い換えです。これが成り立たない例は、2変数非可換多項式環

$$\mathcal{R} = \sum_{\text{finite}} C_{n_0 \cdots n_{2r-1}} x^{n_0} y^{n_1} x^{n_2} \cdots\cdots y^{n_{2r-1}}$$

（x と y は非可換）

で、$x\mathcal{R} \cap y\mathcal{R} = 0$、です。この場合、商環は作れない。

Ore－浅野理論では、乗法系 S としてOre－浅野条件を満足するものを持ってくれば、右商環が作れる、と言っただけで、どんな S を持って来れば商環が作れるか、という事は何も言っていない。

それに対し、Johnsonという人は、ある特殊な条件を満足する環について商環を作った。それで、内海さんは、全く一般の非可換環の場合に、最大限どこまで右商環が作れるか、

という事を決定した。それは、Ore－浅野型商環とは違う。その Johnson－内海理論について説明したい。

von Neumann algebra については、49 ページで言いましたが、弱い意味の（$\otimes$ が exact functor になる）0 次元の環は、実は、von Neumann の意味の正則環と一致する。

von Neumann 環の一番簡単な例に、Boole 環（Boole 代数を環と考えたもの）がある。これは、集合の union, intersection が定義されて、分配律、巾等律、結合律、等の公理が成り立ち、元 A に対して complement が unique に決まる。

$$A + B \overset{\text{def}}{\equiv} A \cup B - A \cap B$$

$$A \times B \overset{\text{def}}{\equiv} A \cap B$$

で演算を定める。

Boole 環は、標数 2 の可換な von Neumann 環である。

$\because$ Boole 環の任意の元 a について、$a^2 = a$ だから

$$(a+b)^2 = a + b$$

展開して、　$ab + ba = 0$　　　(イ)

特に $b = 1$ とおけば、$2a = 0$。即ち標数 2。

だから、(イ)から $2ba$ ($= 0$) を引けば、

$$ab - ba = 0 \quad \text{即ち可換。}$$

von Neumann 条件（$\forall a \exists b$ s.t. $aba = a$）は trivial。

（b としていつでも 1 を取ればいい。）　//

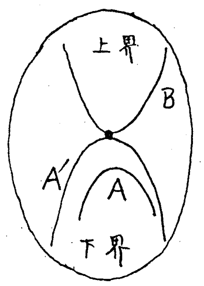
Boole環に対し、Ore－浅野条件は成り立たない。Boole環で零因子でないのは1だけです。

∵ $a^2=a$ より、$a(1-a)=0$。$a \neq 1$ の時、$1-a \neq 0$
だから a は零因子。

だから、拡大できない訳です。

しかし、一種の完備化的な考え方で言うと、この場合にもある意味での商環が作れる。内海さんの意味の最大の商環は何かというと、Boole環の切断完備化というものです。つまり、Boole環は、他方では半順序集合と思える。$\mathbb{R}$と同様にこれに対し、Dedekind式の切断を与え、完備化する。

ある集合Aに対して、そのどの元よりも大きな元を上限という。上限の全体Bのどの元よりも小さな元を下限という。このBの下限全体A'（$\supset A$）の上限全体はBに戻る。だから、ある集合に対し、上限を作り、その下限を作る操作は2回で終わる。Boole環が完備であれば、上界Bと下(か)界A'にintersectionがある。（天上界と下(げ)界と言った方がいいかもしれないけど）。唯一つの共通元がいつでも在る、ということが完備であるという事です。



切断

Boole環が完備でなくても、切断全体を取ってきて、それを元の順序集合の拡張と考え完備化する事が、切断完備化です。（Boole環の完備化がまたBoole環になる事が知ら

れている）。この場合の内海の最大商環は、割り算をする事と離れてくる訳です。

次に、一般の場合に、商環としてどう拡張されるかを言う。非可換環 R の乗法系 S が零因子を持たない場合で説明する。商環を $\overline{R} = R[S^{-1}]$ とすると、$\overline{R}$ の元は、R の元として理解できる。例えば $R = \mathbb{Z}$ の時、$\overline{R} = \mathbb{Q}$ の元 x は、$x = \frac{a}{s}$ $(a \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z} - \{0\})$ と書ける。x というのは得体の知れないものだけど、それに何か適当な s という元を掛けてやると、a という得体の知れたものになる、こういう訳でしょう。この x の正体を明らかにする元は s 一つだけではなくて、st $(t \in \mathbb{Z} - \{0\})$ を掛ければ at という判ったものになる。兎に角、$\mathbb{Q}$ の元が $\mathbb{Z}$ の元で理解できるような元 s というものが、必ず存在する。

だから、R の拡大環 $\overline{R}$ が R の商環という名前にふさわしい条件は何かというと、$\overline{R}$ に属する元 x に対して、集合

$$\mathfrak{a}_x = \{ s \in R \mid xs \in R \}$$

を考える。これは R の右 ideal です。この ideal の元で、分母の資格のあるのは、零因子でない場合です。単独ではそうだけど、集団ではどうかと考える訳です。つまり、ideal $\mathfrak{a}_x$ に、零因子でないものが含まれる事を言いたい訳です。（零

因子でなければ、$xs = a$ から x が unique に決まる。)。これは、x を決めた時に、s から a が決まる、s' から a' が決まるという process を与える事です。

逆に、その process として x が定義されていると考えると、ideal $\mathfrak{D}_x$ から R への右 R-hom. になる訳です。R の拡大環 $\bar{R}$ を与えた時に、その元 x に対しいつでも $h_x \in \mathrm{Hom}_{R\text{右}}(\mathfrak{D}_x, R)$ が決まる。今言いたいのは、$\mathrm{Hom}_{R\text{右}}(\mathfrak{D}_x, R)$ から逆に x が決まる、という事です。

$\mathfrak{D}_x$ 全体を使う時、x が unique に決まる為の条件は、もう少し緩められて、

$$\{a \in R \mid a\mathfrak{D}_x = 0\} = 0$$

つまり、$\mathfrak{D}_x$ の左零因子がないならば、$\mathfrak{D}_x$ 全体として零因子でないものがある時には、$\mathfrak{D}_x$ 全体として分母の役目が果せる、という訳です。(Boole 環の場合、そういう事が成り立つ。)。今は、右 ideal の family を考えて、その family のどれかから、R への hom として拡大環を構成しようという考えな訳です。

今度は一般化して、勝手な S を考える。どういう右 ideal の family を持ってくれば商環が作れるか、という風に問題が設定できる。それを定式化したのが Gabriel 位相というものです。非可換環 R を与えた時に、その右 ideal の family を

考える。所謂 filter です。

Gabriel 位相

非可換環 R の右 ideals の filter を $\mathcal{F}$ とする。

(i) $\mathfrak{A} \in \mathcal{F}$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$ ならば $\mathfrak{A}' \in \mathcal{F}$

(ii) $\mathcal{F}$ の有限個の元の intersection は又 $\mathcal{F}$ の元。

特に $R \in \mathcal{F}$

(iii) ${}^{\forall}\mathfrak{A} \in \mathcal{F}$, ${}^{\forall}a \in R$ に対し、

$$\{x \in R \mid ax \in \mathfrak{A}\} \in \mathcal{F}$$

(iv) $\left(\begin{array}{l} \mathfrak{A} \in \mathcal{F},\ \mathfrak{A}' : \text{右 ideal s.t.} \\ {}^{\forall}a \in \mathfrak{A},\ \{x \in R \mid ax \in \mathfrak{A}'\} \in \mathcal{F} \end{array}\right)$

ならば、 $\mathfrak{A}' \in \mathcal{F}$

((i)(ii) が filter というものの条件です。ある空間において、filter は位相を定義する訳で、filter $\mathcal{F}$ は、原点の近傍系と考えられる。他の近傍はこれを平行移動したもので、これにより R は位相加群に成る。しかし、乗法が位相に関して連続とは限りませんので その条件を(iii)として付け加える訳です。これで R は位相環です。(iv) は、商環を作るのに、Ore－浅野条件をこの場合に adapt した条件で、本質的な条件です。)

この条件があると、この右 ideals 達を分母 ideal の様に思って、商環に当るものが作れる。まず、R を無駄な部分、R の torsion part

$$t(R) = \{a \in R \mid {}^{\exists}\mathfrak{A} \in \mathcal{F} \ \text{s.t.}\ a\mathfrak{A} = 0\}$$

で割っておく。（$t(R)$は両側idealで、商環の中で消えてしまう部分に当る。

$$\mathrm{Hom}_{R右}(\mathfrak{a}, R/t(R))$$

の元として、Rの拡大環の元が定義される事をさっき説明した訳です。（88～89ページ）

Rは、分母が大きければ大きい程、大きな商環が作れる。だから、ここでは、idealを小さくしていくinductive limitを取ればいい。

$$\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{F}} \mathrm{Hom}_{R右}(\mathfrak{a}, R/t(R))$$

これが今考えている商環な訳です。

abelian categoryの中で、一つの環Rを決めた時の、R－右加群全体が一つのcategoryを作る。で、そのcategoryの性質としてR自身の性質を調べよう、というのが一つの基本的な方法です。加群の場合には、abelian categoryである他に、もう少し強い条件がある。例えばinductive limitに関する良い性質などがある。そういうabelian categoryの事を、Grothendieck categoryと呼んでいる。（ある種の有限性の条件を付けますが。）。

Grothendieck categoryに多少条件を付けたとしても、それが加群のcategoryになるとは一般には言えない。

今度は、加群の category の概念をちょっと拡張する。右R加群のつくる category を$\mathcal{M}od(R)$、Rの Gabriel 位相に関して作った商環を$R_{\mathcal{F}}$、と書く。そうすると、

$$\text{functor}\quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}od(R) & \longrightarrow & \mathcal{M}od(R_{\mathcal{F}}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ M & \longmapsto & M_{\mathcal{F}} \end{array} \quad \cdots\cdots (30)$$

がある。逆の functor も実はあります。で、この functor の image に当るものを持ってくると、それは$\mathcal{M}od(R_{\mathcal{F}})$の full subcategory になる。それを$\mathcal{M}od(R, \mathcal{F})$と書く。$\mathcal{M}od(R_{\mathcal{F}})$の$R_{\mathcal{F}}$加群が、いつでも$\mathcal{M}od(R)$から来ているとは限らない。$\mathcal{M}od(R, \mathcal{F})$は Grothendieck category になるけど、今度は逆が言えて、ある有限性の条件を満足する Grothendieck category は、実は$\mathcal{M}od(R, \mathcal{F})$という格好に書ける、という事が言えます。それから、sheaf を導入すると、有限性の条件を省いた一般の Grothendieck category が、やはり似た様な形で必ず表現できる。ただ注意する事は、Grothendieck category を$\mathcal{M}od(R, \mathcal{F})$の様に表わす仕方は unique ではない。

特に、$\mathcal{F}$としてRだけから成る位相を取った場合が、$\mathcal{M}od(R)$です。$\mathcal{M}od(R) \overset{\text{同型}}{\approx} \mathcal{M}od(R')$となった時に、$R$と$R'$の事を、森田同値と言う。

一番簡単な例で言うと、ある環Rと、R上の行列環

Mat（$n\times n$, R）（$n\neq 0$）は森田同値です。R加群と、Mat（$n\times n$, R）加群は、1対1に対応する訳です。

それから、㉚で、$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$は$R_{\mathcal{F}}$加群だけど、$R$加群と考えてもいい訳です。$\mathcal{M}od(\mathcal{M}, R)$は、$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$を作っても全然変化しない$\mathcal{M}$の作るsubcategoryと言ってもいい訳です。

Gabriel位相のうちで、filterのbaseとして単項右idealが選べる場合が、Ore-浅野型の場合ですね。単項右idealがsRの時、s一つで分母が間に合う訳です。単項から一般の場合に移る時には、homology的な性質が複雑になる訳で、Ore-浅野の時には、㉚のfunctorがexactだったものが、一般の、右idealをbaseにした時には左exactにしかならない。

それで、$t(R)=0$の時のGabriel位相で、filterがたくさんある強い位相を持ってくる場合が、内海さんの考えている最大商環に当る訳です。

（終）