数理解析研究所講究録
第 670 巻 1988 年 233-250

shifted plane partitionの母関数

東大 理 岡田 聡一 (Soichi Okada)

§0 Introduction

(shifted) plane partition の母関数を用いて，別の対象の母関数や個数を求めることがよくある．ここでは，partially strict shifted plane partition の母関数と，その応用として monotone triangleの母関数について述べたい．

まず，<u>shifted plane partition</u> とは，自然数 a_{ij} を

$$\pi = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,\mu_1} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,\mu_2} \\ & & \ddots & & \\ & & a_{rr} & \cdots & a_{r,\mu_r} \end{matrix}$$

のように並べたもので

(i) $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_r$

(ii) $a_{ij} \geqq a_{i,j+1}$ $(1 \leqq i \leqq r,\ i \leqq j \leqq \mu_i - 1)$

(iii) $a_{i,j} \geqq a_{i+1,j}$ $(1 \leqq i \leqq r-1,\ i+1 \leqq j \leqq \mu_{i+1})$

をみたすもののことをいう．このような π に対して，$sh(\pi) = (\mu_1, \mu_2 - 1, \mu_3 - 2, \cdots, \mu_r - r + 1)$ を π の <u>shape</u>，$pr(\pi) = (a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{rr})$ を π の <u>profile</u> という．

定義　A, Bを，$A\cap B=\phi$，$A\cup B=\mathbb{N}(=\{1,2,3,\cdots\})$となる$\mathbb{N}$の部分集合とする．shifted plane partition $\pi=(a_{ij})$は，次の条件(P1)，(P2)をみたすとき，(A, B)-partially strict であるという．

(P1) 各$m\in A$に対して，mは1行に高々1回しか現れない．

(P2) 各$m\in B$に対して，mは1列に高々1回しか現れない．

$sh(\pi)=\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)$ $(\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_r>0)$，$pr(\pi)=a=(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ $(a_1>a_2>\cdots>a_r>0)$となる(A, B)-partially strict shifted plane partition π全体を$\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)$とおく．変数$z_1, z_2, \cdots$を導入し，shifted plane partition $\pi=(a_{ij})$に対して，$z^{\pi}=\prod_{i,j} z_{a_{ij}}$と書く．そして，$\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)$の母関数

$$F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a), z)=\sum_{\pi\in\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)} z^{\pi}$$

を考える．(§1)　例えば，$A=\{1,2\}$，$B=\mathbb{N}-A$，$\lambda=(3,2)$，$a=(3,2)$のとき，

$$\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)=\left\{\begin{matrix}3&3&3\\&2&1\end{matrix},\ \begin{matrix}3&3&2\\&2&1\end{matrix},\ \begin{matrix}3&3&1\\&2&1\end{matrix},\ \begin{matrix}3&2&1\\&2&1\end{matrix}\right\},$$

$$F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a),z)=z_1z_2z_3^3+z_1z_2^2z_3^2+z_1^2z_2z_3^2+z_1^2z_2^2z_3.$$

次に，monotone triangle とは，自然数t_{ij}を

$$T=\begin{matrix}t_{11}&&t_{12}&&t_{13}&&\cdots&&t_{1,r}\\&t_{21}&&t_{22}&&\cdots&&t_{2,r-1}&\\&&\ddots&&&&\iddots&&\\&&&&t_{r,1}&&&&\end{matrix}$$

の形に並べたもので，

(M1) $t_{i,j} > t_{i,j+1}$ $(1 \leqq i \leqq r-1,\ 1 \leqq j \leqq r-i)$

(M2) $t_{i,j} \geqq t_{i+1,j} \geqq t_{i,j+1}$ $(1 \leqq i \leqq r-1,\ 1 \leqq j \leqq r-i)$

をみたすもののことをいう．このような T に対して

$$sp(T) = \#\{(i,j) : t_{i-1,j} > t_{i,j} > t_{i-1,j+1}\}$$

$$min(T) = \#\{(i,j) : t_{i-1,j} > t_{i,j} = t_{i-1,j+1}\}$$

とおき，変数 $x_1, x_2, \cdots$ に対して $m(T) = x_1^{s_1-s_2} x_2^{s_2-s_3} \cdots x_{r-1}^{s_{r-1}-s_r} x_r^{s_r}$ $(s_i = \sum_{j=1}^{r-i+1} t_{ij})$ と書く．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_r)$ $(\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r > 0)$ を第1行とする monotone triangle 全体を $\mathcal{M}(\lambda)$ とし，$\mathcal{M}(\lambda)$ の"重みつき"母関数

$$M(\lambda) = \sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} (1+t)^{sp(T)} t^{min(T)} m(T)$$

を考える．(§3) 例えば，$\lambda = (3,2,1)$ のとき，

$$\mathcal{M}(\lambda) = \left\{ \begin{matrix} 3\,2\,1 \\ 3\,2 \\ 3 \end{matrix},\ \begin{matrix} 3\,2\,1 \\ 3\,2 \\ 2 \end{matrix},\ \begin{matrix} 3\,2\,1 \\ 3\,1 \\ 3 \end{matrix},\ \begin{matrix} 3\,2\,1 \\ 3\,1 \\ 2 \end{matrix},\ \begin{matrix} 3\,2\,1 \\ 3\,1 \\ 1 \end{matrix},\ \begin{matrix} 3\,2\,1 \\ 2\,1 \\ 2 \end{matrix},\ \begin{matrix} 3\,2\,1 \\ 2\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

$sp(T)$	0	0	0	1	0	0	0
$min(T)$	0	1	1	1	2	2	3

だから

$$M(\lambda) = x_1 x_2^2 x_3^3 + t x_1 x_2^3 x_3^2 + t x_1^2 x_2 x_3^3 + t(1+t) x_1^2 x_2^2 x_3^2 + t^2 x_1^2 x_2^3 x_3 + t^2 x_1^3 x_2 x_3^2 + t^3 x_1^3 x_2^2 x_1.$$

以下では，$F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda ; a), z)$ を行列式の形に表し，それを用いて $M(\lambda)$ の簡単な表示を導いていく．(詳しくは [Ok2] を参照されたい)

§1 (A, B)-partially strict shifted plane partitionの母関数

A, Bを、$A\cap B=\phi$, $A\cup B=\mathbb{N}$となる$\mathbb{N}$の部分集合とする。$z_1,\cdots,z_n$の多項式$\tilde{q}^{(n)}_{A,B,k}(z)$を、母関数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{q}^{(n)}_{A,B,k}(z)t^k=\frac{\prod_{i\in A\cap[n]}(1+z_it)}{\prod_{j\in B\cap[n]}(1-z_jt)}\qquad([n]=\{1,2,\cdots,n\})$$

によって定義する。すると、$\lambda=(k)$, $a=(n)$に対して、$\mathcal{S}_{A,B}((k);(n))$の母関数は

$$F(\mathcal{S}_{A,B}((k);(n)),z)=\tilde{q}^{(n)}_{A,B,k}(z)-\tilde{q}^{(n-1)}_{A,B,k}(z)$$

となる。より一般のλ, aに対して$F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a),z)$は次の形に表される。

<u>定理 1.</u> $\lambda=(\lambda_1,\cdots\lambda_r)(\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$, $a=(a_1,\cdots,a_r)(a_1>\cdots>a_r>0)$に対して、$\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)$の母関数は

$$F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a),z)=\det\left(\tilde{q}^{(a_j)}_{A,B,\lambda_i}(z)-\tilde{q}^{(a_j-1)}_{A,B,\lambda_i}(z)\right)_{1\leq i,j\leq r}$$

で与えられる。

例えば、$A=\{1,2\}$, $B=\mathbb{N}-A$, $\lambda=(3,2)$, $a=(3,2)$のとき(§0で与えた例)、

$$F(\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a),z)=\det\begin{pmatrix} z_1z_2z_3+z_1z_3^2+z_2z_3^2+z_3^3-0 & 0-0\\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3+z_3^2-z_1z_2 & z_1z_2-0\end{pmatrix}$$

$$=z^{\begin{pmatrix}3&3&3\\&2&1\end{pmatrix}}+z^{\begin{pmatrix}3&3&2\\&2&1\end{pmatrix}}+z^{\begin{pmatrix}3&3&1\\&2&1\end{pmatrix}}+z^{\begin{pmatrix}3&2&1\\&2&1\end{pmatrix}}.$$

定理1において，$A=\mathbb{N}, B=\phi$，または，$A=\phi, B=\mathbb{N}$ のときを考える．$A=\mathbb{N}, B=\phi$ [resp. $A=\phi, B=\mathbb{N}$] のとき，$\pi=(a_{ij})$ に対する (A,B)-partially strict shifted plane partition の条件(P1)，(P2)は，$a_{i,j}>a_{i,j+1}\ (\forall i,j)$ [resp. $a_{i,j}>a_{i+1,j}\ (\forall i,j)$] ということであり，この条件をみたすとき，$\pi$ は row-strict [resp. column-strict] であるという．$sh(\pi)=\lambda$, $pr(\pi)=a$ となる row-strict [resp. column-strict] shifted plane partition π 全体を $\mathcal{R}(\lambda:a)$ [resp. $\mathcal{C}(\lambda:a)$] とおく：

$$\mathcal{R}(\lambda:a)=\mathcal{S}_{\mathbb{N},\phi}(\lambda:a),\quad \mathcal{C}(\lambda:a)=\mathcal{S}_{\phi,\mathbb{N}}(\lambda:a)$$

系1．$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)\ (\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$，$a=(a_1,\cdots,a_r)\ (a_1>\cdots>a_r>0)$ に対して，

$$\sum_{\pi\in\mathcal{R}(\lambda:a)} z^{\pi}=\det\left(e_{\lambda_i}^{(a_j)}(z)-e_{\lambda_i}^{(a_j-1)}(z)\right)_{1\leq i,j\leq r}$$

$$\sum_{\pi\in\mathcal{C}(\lambda:a)} z^{\pi}=\det\left(h_{\lambda_i}^{(a_j)}(z)-h_{\lambda_i}^{(a_j-1)}(z)\right)_{1\leq i,j\leq r}$$

ここで，$e_k^{(n)}(z)=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} z_{i_1}\cdots z_{i_k}$ は n 変数 k 次 elementary symmetric function，$h_k^{(n)}(z)=\sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_k\leq n} z_{i_1}\cdots z_{i_k}$ は n 変数 k 次 complete symmetric function である．

ここで，さらに $z_i=q^i$ と代入すると，$\mathcal{R}(\lambda:a)$，$\mathcal{C}(\lambda:a)$ の一変数母関数が得られる．

<u>系2</u>　shifted plane partition $\pi=(a_{ij})$に対して，$|\pi|=\sum_{i,j}a_{ij}$と書くことにすると

$$\sum_{\pi\in\mathcal{R}(\lambda:a)} q^{|\pi|} = \det\left(q^{a_j+\binom{\lambda_i}{2}} \begin{bmatrix} a_j-1 \\ \lambda_i-1 \end{bmatrix} \right)_{1\leq i,j\leq r}$$

$$\sum_{\pi\in\mathcal{C}(\lambda:a)} q^{|\pi|} = \det\left(q^{a_j+\lambda_i-1} \begin{bmatrix} a_j+\lambda_i-2 \\ \lambda_i-1 \end{bmatrix} \right)_{1\leq i,j\leq r}$$

ここで，$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$はGauss多項式($q$-2項係数)である：

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{m} \frac{1-q^{n-i+1}}{1-q^{i}} & (0\leqq m\leqq n\text{のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

この結果は，対称性をもつplane partitionの個数，母関数を求める上で重要である．([An], [MRR1], [Ok1])

定理1と類似の結果が，plane partitionについても成り立つ．

plane partition

$$\pi = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\lambda_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\lambda_2} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{r\lambda_r} & \end{matrix}$$

ただし (0) $a_{ij}\in\mathbb{N}$

(i) $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_r$

(ii) $a_{ij}\geqq a_{i,j+1}$

(iii) $a_{ij}\geqq a_{i+1,j}$

は，次の条件(P1)，(P2)をみたすとき，<u>(A, B)-partially strict</u>であるという．($A\cap B=\phi$, $A\cup B=\mathbb{N}$)

(P1) 各$m\in A$に対して，mは1行に高々1回しか現れない．

(P2) 各$m\in B$に対して，mは1列に高々1回しか現れない．

上のπに対して，$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$を$\pi$のshapeといい，$sh(\pi)$で表す．

$\lambda=(\lambda_1,\cdots\lambda_r)$ $(\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_r>0)$ と $N\in\mathbb{N}$ が与えられたとき，$sh(\pi)=\lambda$，$a_{ij}\leqq N(\forall i,j)$ となる (A,B)-partially strict plane partition $\pi=(a_{ij})$ 全体を $\mathcal{P}_{A,B}(\lambda;\leqq N)$ とすると，その母関数は次の定理で与えられる．ただし，$k<0$ のとき $\tilde{q}^{(N)}_{A,B,k}(z)=0$ とする．

<u>定理 2</u>　plane partition $\pi=(a_{ij})$ に対して $z^{\pi}=\prod_{i,j}z_{a_{ij}}$ と書くと，

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{A,B}(\lambda;\leqq N)}z^{\pi}=\det\left(\tilde{q}^{(N)}_{A,B,\lambda_i-i+j}(z)\right)_{1\leqq i,j\leqq r}$$

特に，$A=\mathbb{N},B=\phi$；$A=\phi,B=\mathbb{N}$ のときを考えると，

<u>系</u>

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{\mathbb{N},\phi}(\lambda;\leqq N)}z^{\pi}=\det\left(e^{(N)}_{\lambda_i-i+j}(z)\right)_{1\leqq i,j\leqq r}$$

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{\phi,\mathbb{N}}(\lambda;\leqq N)}z^{\pi}=\det\left(h^{(N)}_{\lambda_i-i+j}(z)\right)_{1\leqq i,j\leqq r}$$

この系は，Jacobi-Trudi identity として知られている．
この節については[Ok3]も参照されたい．

§2 Diagonal-strict shifted plane partition

$E=\{$偶数$\}$，$O=\{$奇数$\}$とおく．(E,O)-partially strict shifted plane partition と monotone triangle を，diagonal-strict shifted plane partition によって結びつける．

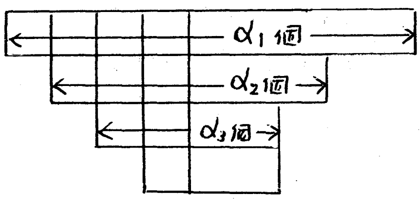
shifted plane partition $\pi=(a_{ij})$ は，$a_{ij}>a_{i+1,j+1}(\forall i,j)$ をみた

すとき, diagonal-strict であるという. $sh(\pi)=\lambda$, $pr(\pi)=a$ となる diagonal strict shifted plane partition 全体を $\mathcal{D}(\lambda:a)$ とする. この節では, $\mathcal{D}(\lambda:a)$ の重みつき母関数を考えるが, そのために必要な言葉を用意しておく.

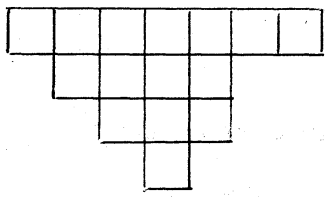
$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$ を distinct partition とする. つまり, $\alpha_i\in\mathbb{Z}$, $\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_{\ell(\alpha)}>\alpha_{\ell(\alpha)+1}=\cdots=\alpha_n=0$ とする. ($0=(0,0\cdots 0)$ も distinct partition とする) この α に対して,

$$S(\alpha)=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2;\ 1\leqq i\leqq \ell(\alpha),\ i\leqq j\leqq \alpha_i+i-1\}$$

とおき, α の shifted diagram という. Young 図形と同様, 箱を並べて $S(\alpha)$ を表すが, Young 図形とは違って左端を1つずつずらせて並べる.



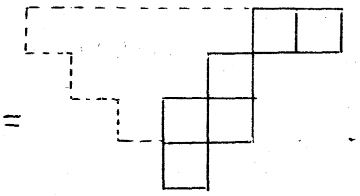
例えば, $\alpha=(7,4,3,1)$ のとき,

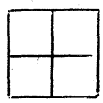
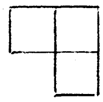
$S(\alpha)=$ 

また, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)$ を, $\alpha_i\geqq\beta_i$ ($i=1,\cdots n$) となる distinct partition とするとき,

$$S(\alpha/\beta)=S(\alpha)-S(\beta)$$

とおいて，skew shifted diagram という．例えば，$\alpha=(7,4,3,1)$ $\beta=(5,3,1)=(5,3,1,0)$ のとき，

$S(\alpha/\beta)=$ 

skew shifted diagram $S(\alpha/\beta)$ は，連結であり，， を含まないとき，rim hook であるという．上の例の $S(\alpha/\beta)$ は連結ではないが，その各連結成分(2つ)はrim hook である．

さて，shifted plane partition $\pi=(a_{ij})$ に対して，$sh_k(\pi)$ を，その第 i 成分 $sh_k(\pi)_i=\mathrm{Max}\{j\,;\,a_{ij}\geqq k\}-i+1$ (π の第 i 行に書かれている k 以上の数字の個数)である partition とする．例えば，

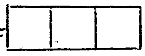
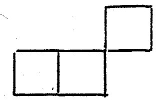
$$\pi=\begin{array}{cccccccc} 4&4&4&3&2&2&1&1\\ &3&3&2&2&1&1&\\ &&2&2&1&&&\\ &&&1&1&&& \end{array}$$

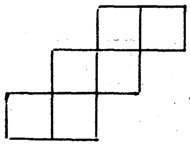
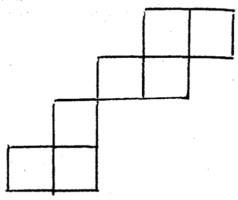
のとき，

$$sh_1(\pi)=(8,6,3,2)\ (=sh(\pi)),\qquad sh_2(\pi)=(6,4,2)$$

$$sh_3(\pi)=(4,2),\qquad sh_4(\pi)=(3).$$

もし，π が diagonal strict ならば，skew shifted diagram $S(sh_k(\pi)/sh_{k+1}(\pi))$ (π で数字 k が書かれている場所を□で置きかえたもの)の各連結成分は rim hook となることがわかる．上の例の π は diagonal-strict であり，

$S(sh_4(\pi)/sh_5(\pi))=$  , $S(sh_3(\pi)/sh_4(\pi))=$ 

$S(sh_2(\pi)/sh_3(\pi))=$  , $S(sh_1(\pi)/sh_2(\pi))=$ 

そこで，$S(sh_k(\pi)/sh_{k+1}(\pi))$の連結成分を$\rho_1^{(k)},\cdots,\rho_{h_k}^{(k)}$とし，

$$h(\pi)=\sum_k h_k$$

$$f(\pi)=\sum_k \sum_{j=1}^{h_k}(\rho_j^{(k)}\text{の占める行数})$$

とおく．上の例のπでは，

$$h(\pi)=6,\qquad f(\pi)=10.$$

そして，$\mathcal{D}(\lambda:a)$の母関数として

$$\sum_{\pi\in\mathcal{D}(\lambda:a)}(1-\frac{1}{t})^{h(\pi)}(-t)^{f(\pi)}\chi^{\pi}$$

を考える。

(E,O)-partially strict shifted plane partition と diagonal-strict shifted plane partition との関係をみるために，$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ $(\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$，$a=(a_1,\cdots,a_r)$ $(a_1>\cdots>a_r>0)$に対して，

$$\widetilde{\mathcal{D}}(\lambda:a)=\bigsqcup_b \mathcal{S}_{E,O}(\lambda;b)$$

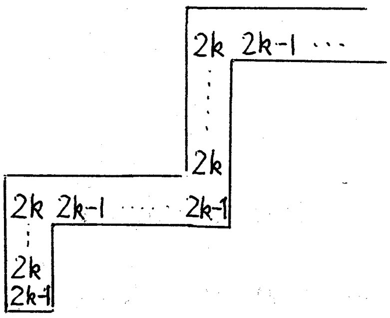
（ここで，$b=(b_1,\cdots,b_r)$は$b_i=2a_i$または$2a_i-1$ $(i=1,\cdots,r)$となる distinct partition 全体を動く）とおく．そして，$\sigma\in\widetilde{\mathcal{D}}(\lambda:a)$に対して，$\sigma$に書かれている数字$2k,2k-1$を全て$k$で置きかえた$(k=1,2,\cdots)$ものを$P(\sigma)$とする．すると，$\sigma$が(E,O)-partially strict であることから$P(\sigma)$は diagonal-strict となり，$P(\sigma)\in$

$\mathcal{D}(\lambda:a)$となることがわかる。よって，写像$P:\widetilde{\mathcal{D}}(\lambda:a)\longrightarrow$ $\mathcal{D}(\lambda:a)$が定まるが，この写像について次の命題が成り立つ。

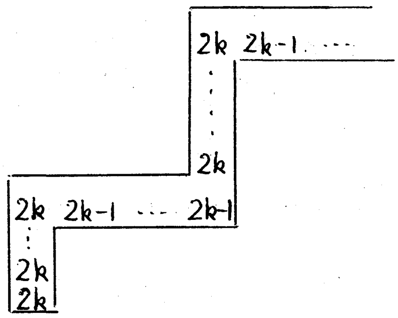
<u>命題 1</u>　$\pi\in\mathcal{D}(\lambda:a)$に対して，

$$\sum_{\sigma\in\widetilde{\mathcal{D}}(\lambda:a)_{e,t}\ P(\sigma)=\pi} t^{e(\sigma)}=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{h(\pi)} t^{f(\pi)}$$

ここで，$e(\sigma)$はσに書かれている数字のうちの偶数の個数である。より詳しく，$P(\sigma)=\pi$となる$\sigma\in\widetilde{\mathcal{D}}(\lambda;a)$は，数字$k$が書き込まれているskew shifted diagram $S(sh_k(\pi)/sh_{k+1}(\pi))$の各連結成分(rim hookになっている)に



または



と数字$2k-1$, $2k$を書き込む(各$k=1,2,\cdots$，と各連結成分に対して行う)ことによって全て得られる。

これによって，$\mathcal{D}(\lambda:a)$の重みつき母関数は

$$\sum_{\pi\in\mathcal{D}(\lambda:a)}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{h(\pi)}(-t)^{f(\pi)}x^{\pi}=\left(\sum_{\sigma\in\widetilde{\mathcal{D}}(\lambda:a)} z^{\sigma}\right)\Bigg|_{\substack{z_{2i-1}=x_i,\\ z_{2i}=-tx_i}}$$

$$=\sum_{b}F(\mathcal{S}_{E,O}(\lambda:b),z)\Bigg|_{\substack{z_{2i-1}=x_i\\ z_{2i}=-tx_i}}$$

($b=(b_1,\cdots b_r)$は$b_i=2a_i$または$2a_i-1$ $(i=1,\cdots r)$となるpartitionを動く)

と書き直される．ここで，定理1の行列式表示を用いると，次の定理が得られる．

定理3．$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)(\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$，$a=(a_1,\cdots,a_r)(a_1>\cdots>a_r>0)$に対して，

$$\sum_{\pi\in\mathcal{D}(\lambda;a)}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{h(\pi)}(-t)^{f(\pi)}x^{\pi}=\det\left(q_{\lambda_i}^{(a_j)}(x;t)-q_{\lambda_i}^{(a_j-1)}(x;t)\right)$$

ここで，$q_k^{(n)}(x;t)$は，$x_1,\cdots,x_n,t$の多項式で，母関数

$$\sum_{k=0}^{\infty}q_k^{(n)}(x;t)y^k=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-tx_iy}{1-x_iy}$$

で定義される．

この定理の$t=-1$の場合を用いると，Hall-Littlewood多項式$Q_\lambda(x_1,\cdots,x_N;-1)$のrecursive formulaが得られる．distinct partition $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$ $(\lambda_1>\cdots>\lambda_{\ell(\lambda)}>\lambda_{\ell(\lambda)+1}=\cdots=\lambda_N=0)$に対して，$Q_\lambda(x_1,\cdots,x_N;-1)$は，

$$Q_\lambda(x;-1)=2^{\ell(\lambda)}\sum_{w\in\mathfrak{S}_N}w\left(x_1^{\lambda_1}\cdots x_N^{\lambda_N}\prod_{i<j}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right)$$

によって定義されるが，shifted plane partitionを用いて

$$Q_\lambda(x;-1)=\sum_{N\geqq a_1>a_2>\cdots>a_{\ell(\lambda)}\geqq 1}\ \sum_{\pi\in\mathcal{D}(\lambda;a)}2^{h(\pi)}x^{\pi}$$

と表すこともできる．([Mac, Chap III])　よって，定理3と[Ok.1]の小行列の和の公式を用いると，

命題２([Sch])　$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)(\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$ とする。

(1)　r が奇数のとき、

$$Q_\lambda(x;-1)=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}Q_{\lambda_i}(x;-1)\,Q_{\lambda^{(i)}}(x;-1)$$

ここで、　$\lambda^{(i)}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_r)$

(2)　r が偶数のとき

$$Q_\lambda(x;-1)=\sum_{i=2}^{r}(-1)^{i}Q_{(\lambda_1,\lambda_i)}(x;-1)\,Q_{\lambda^{(1,i)}}(x;-1)$$

ここで、　$\lambda^{(1,i)}=(\lambda_2,\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_r)$

§3　Monotone triangle

定理３を用いて、$\mathcal{M}(\lambda)$ の重みつき母関数 $M(\lambda)$ を求めることができる。

$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)(\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$ とし、$\delta_r=(r,r-1,\cdots,2,1)$ とおく。このとき、全単射 $\Phi:\mathcal{D}(\lambda;\delta_r)\longrightarrow\mathcal{M}(\lambda)$ が次のようにして得られる。$\pi\in\mathcal{D}(\lambda;\delta_r)$ に対して、$pr(\pi)=\delta_r$ より $sh_k(\pi)$ は長さ $r-k+1$ の distinct partition となるから、$sh_k(\pi)=(t_{k1},\cdots,t_{k,r-k+1})$ とし、

$$T=\begin{array}{ccccc} t_{11} & t_{12} & \cdots & & t_{1,r} \\ & t_{21} & \cdots & t_{2,r-1} & \\ & & \ddots\ \ \iddots & & \\ & & t_{r1} & & \end{array}$$

と並べると、T が monotone triangle となることがわかる。また、この対応 $\mathcal{D}(\lambda;\delta_r)\ni\pi\longmapsto T\in\mathcal{M}(\lambda)$ が全単射となることもわかる。さらに、この全単射 Φ に対して次の命題が成り立つ

命題３．$\pi \in \mathcal{D}(\lambda; \delta_r)$ に対して，

$$m(\Psi(\pi)) = \chi^{\pi}, \qquad sp(\Psi(\pi)) = h(\pi) - r$$

$$\min(\Psi(\pi)) = f(\pi) - h(\pi)$$

例えば

$$\pi = \begin{matrix} 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & \\ & & 2 & 2 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 & & \end{matrix}$$

のとき

$$\Psi(\pi) = \begin{matrix} 7 & 5 & 4 & 2 \\ & 6 & 4 & 2 \\ & & 4 & 2 \\ & & & 3 \end{matrix}$$

であり，

$$h(\pi) = 6, \qquad f(\pi) = 10$$

$$sp(\Psi(\pi)) = 2, \qquad \min(\Psi(\pi)) = 4$$

命題３を用いると，$\mathcal{M}(\lambda)$ の重みつき母関数は

$$M(\lambda) = \sum_{T \in \mathcal{M}(\lambda)} (1+t)^{sp(T)} t^{\min(T)} m(T)$$

$$= (1+t)^{-r} \sum_{\pi \in \mathcal{D}(\lambda : \delta_r)} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{h(\pi)} t^{f(\pi)} \chi^{\pi}$$

となる．ここで，定理３を用いると

$$M(\lambda)=\det\left((1+t)^{-1}\left(q_{\lambda_i}^{(r-j+1)}(x\,;-t)-q_{\lambda_i}^{(r-j)}(x\,;-t)\right)\right)_{1\leqq i,j\leqq r}$$

この行列式を計算すると,

定理4([To]) $\lambda=(\lambda_1,\cdots\lambda_r)(\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$, $\lambda-\delta_{r-1}=(\lambda_1-r+1,$ $\lambda_2-r+2,\cdots,\lambda_{r-1}-1,\lambda_r)$ とすると,

$$M(\lambda)=\prod_{1\leqq i<j\leqq r}(tx_i+x_j)\cdot S_{\lambda-\delta_{r-1}}(x_1,\cdots,x_r)$$

と表される. ここで, partition $\mu=(\mu_1,\cdots\mu_r)(\mu_1\geqq\cdots\geqq\mu_r\geqq 0)$ に対して $S_\mu(x_1,\cdots x_r)$ は Schur 関数

$$S_\mu(x_1,\cdots x_r)=\det(h_{\mu_i-i+j}^{(r)}(x_1,\cdots x_r))_{1\leqq i,j\leqq r}$$

である.

$\lambda=\delta_r$ のとき, この定理は, alternating sign matrix を用いて次のように書き直すことができる. $r\times r$ 行列 $A=(a_{ij})$ は, 次の条件(A1), (A2), (A3)をみたすとき, r 次 alternating sign matrix という

(A1) $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$ $(i,j=1,\cdots r)$

(A2) $\sum_{i=1}^{r}a_{ij}=1$ $(j=1,\cdots r)$, $\sum_{j=1}^{r}a_{ij}=1$ $(i=1,\cdots r)$

(A3) 各行, 各列では 1, −1 が(0を無視して)交互に現れる.

r 次 alternating sign matrix の全体を $\mathcal{A}_r$ とおく. $A=(a_{ij})\in\mathcal{A}_r$ に対して,

$$s(A)=(A\text{中の}-1\text{の個数}),\qquad i(A)=\sum_{i<k,\,j>l}a_{ij}a_{kl}$$

とおく．例えば，$s(A)=0$ であるalternating sign matrix A は置換行列に他ならないし，このとき $i(A)$ は A に対応する置換の転倒数である．また，$r=3$ のとき，

$$
\begin{array}{cccccccc}
\mathcal{A}_3 = \Biggl\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & -1 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \Biggr\} \\
i(A) \qquad\quad 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2
\end{array}
$$

このとき，$\mathcal{M}(\mathcal{S}_r)$ と $\mathcal{A}_r$ の間には，自然な全単射が存在する．$T=(t_{ij})\in\mathcal{M}(\mathcal{S}_r)$ に対して，$r\times r$ 行列 $\widetilde{A}=(\widetilde{a}_{ij})$，$A=(a_{ij})$ を

$$
\widetilde{a}_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{ある } k \text{ に対して } j=t_{i,k} \text{ となるとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

$$
a_{ij} = \begin{cases} \widetilde{a}_{ij}-\widetilde{a}_{i+1,j} & (i=1,\cdots,r-1) \\ a_{i,j} & (i=r) \end{cases}
$$

とおいて定めると，$A\in\mathcal{A}_r$ であり，対応 $\mathcal{M}(\mathcal{S}_r)\ni T\longmapsto A\in\mathcal{A}_r$ が全単射であることがわかる．例えば，

$$
T = \begin{array}{ccccccc} 4 & & 3 & & 2 & & 1 \\ & 4 & & 2 & & 1 & \\ & & 3 & & 2 & & \\ & & & 2 & & & \end{array}
$$

に対して，

$$
\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

となる．さらに，この対応で $\mathcal{M}(\mathcal{S}_r)\ni T\longleftrightarrow A\in\mathcal{A}_r$ と対応して

いるとすると，

$$s(A)=sp(T),\quad i(A)=sp(T)+\min(T).$$

$r\times r$ 行列 $M=(m_{ij})$ $(m_{ij}\neq 0)$ と $A\in\mathcal{A}_r$ に対して，$M^A=\prod_{i,j} m_{ij}^{a_{ij}}$ と書くことにすると，定理4を $\lambda=\delta_r$ のときに用いることにより，

命題4([RR],[To]) $M=(x_i^{j-1})_{1\leq i,j\leq r}$ に対して，

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_r}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{s(A)} t^{i(A)} M^A=\prod_{1\leq i<j\leq r}(tx_i+x_j)$$

$t=-1$ のときを考えると，$\left.\sum_{A\in\mathcal{A}_r}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{s(A)} t^{i(A)} M^A\right|_{t=-1}=\det M$ であり，上の命題は

$$\det(x_i^{j-1})=\prod_{1\leq i<j\leq r}(x_j-x_i)$$

となる，また，上の命題で $x_1=\cdots=x_r=1$，$t=1$ とおくと，

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_r} 2^{s(A)}=2^{\binom{r}{2}}$$

この左辺の2を1に変えることができれば，$r\times r$ alternating sign matrix の個数 $|\mathcal{A}_r|$ がわかるが，$|\mathcal{A}_r|$ については次の予想がある．

予想([MRR2])

$$|\mathcal{A}_r|=\prod_{i=0}^{r-1}\frac{(3i+1)!}{(r+i)!}$$

参考文献

[An] G.E. Andrews: Plane partitions (Ⅲ), Invent. Math. 53 (1979)

[Mac] I.G. Macdonald: Symmetric Functions and Hall Polynomials Oxford Univ. Press,

[MRR1] W.H. Mills, D.P. Robbins, and H Rumsey. Jr.: Proof of the Macdonald conjectures, Invent. Math. 66 (1982)

[MRR2] ———: Alternating sign matrices and descending plane partitions, J. Combin. Theory Ser. A 34 (1983)

[Ok1] S. Okada: On the generating functions for certain classes of plane partitions, to appear in J. Combin Theory Ser A

[Ok2] ———: Partially strict shifted plane partitions, to appear

[Ok3] ———: ある種の平面分割の母関数について, 数理研講究録「代数的組合せ論」(1988)

[RR] D.P. Robbins and H. Rumsey. Jr: Determinants and alternating sign matrices, Adv. in Math 62 (1986)

[Sch] I. Schur: Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen J. Reine. Angew. Math 139 (1911)

[To] T. Tokuyama: A generating function for strict Gelfand patterns and some formulas on characters of general linear groups., to appear in J. of Math. Soc. Japan.