数理解析研究所講究録
第 670 巻 1988 年 258-275

半順序集合の上の層と群の表現

岡山大・教育　成瀬 弘 (Hiroshi Naruse)

ここでは半順序集合の上の層について、群の表現の観点から Ronan-Smith の論文[5] を中心に解説を試みたい。組合せ論的、あるいは可換環論的観点からのアプローチについては、Baclawski [1], Yuzvinsky [9] などを参照されたい。

§1. 半順序集合の上の層と(コ)ホモロジー

1.1 半順序集合の上の層

Xを半順序集合（以下 poset と略して言う）とした時、自然にこれを圏とみなすことができる。すなわちXの元を対象とし、射を $x \longrightarrow y \Leftrightarrow x \leqq y$ で定める。$\mathcal{C}$を圏とした時、Xから$\mathcal{C}$への共変関手$\mathcal{F}$を、$\mathcal{C}$に値をもつX上の層という。つまり、各$x \in X$ に対し $\mathcal{C}$の対象 $\mathcal{F}(x)$ が対応し、各 $x \leqq y$ に対して $\rho_{xy} : \mathcal{F}(x) \longrightarrow \mathcal{F}(y)$ なる $\mathcal{C}$の射があって、① $\rho_{xx} = id_{\mathcal{F}(x)}$ (恒等射) ② $x \leqq y \leqq z$ のとき $\rho_{yz} \circ \rho_{xy} = \rho_{xz}$ が成立することである。$\mathcal{F}(x)$

をx上の$\mathcal{F}$のstalk(茎)という。$\mathcal{C}$に値をもつX上の層の全体は、関手の自然変換を射として圏をなす。これを$\mathcal{C}(X)$と書く。いい換えると、$\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathcal{C}(X)$に対し、射$\varphi:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$とは、各$x\in X$に対し$\mathcal{C}$の射$\varphi_x:\mathcal{F}(x)\longrightarrow\mathcal{G}(x)$があって、$x\leqq y$に対して

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(x) \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{xy}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G}(x) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{xy}"] \\ \mathcal{F}(y) \arrow[r, "\varphi_y"'] & \mathcal{G}(y) \end{tikzcd}$$

(可換図式)　となっていること。

X, Yが poset の時、これらを圏とみてXからYへの関手は、$f:X\longrightarrow Y$なる単調写像($x\leqq y \Rightarrow f(x)\leqq f(y)$)に他ならない。(以下 poset の間の写像は、単調なもののみ考える。) $\mathcal{F}\in\mathcal{C}(Y)$に対し、$f$を合成してできる$X$上の層を$f^*\mathcal{F}$と書く。$x\in X$に対し$f^*\mathcal{F}(x)=\mathcal{F}(f(x))$である。これにより$f^*:\mathcal{C}(Y)\longrightarrow\mathcal{C}(X)$なる関手が定まる。特に$Y$が一点からなる poset pt の時、$\mathcal{C}(pt)\simeq\mathcal{C}$で、$A\in\mathcal{C}$に対し$f^*A$を$K_A$と書き定数層という。この関手$K:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}(X)$が右随伴関手をもつ時、それを$\Gamma$と書き section関手という。($\Gamma(\mathcal{F})=\varprojlim\mathcal{F}$ 関手の極限である) $\mathcal{C}=\mathcal{M}od_R$ (1をもつ可換環R上の加群の圏) のときは、$\Gamma(\mathcal{F})=\{(a_x)_{x\in X}\mid \rho_{xy}(a_x)=a_y\ {}^\forall x\leqq y\}\subset\prod_{x\in X}\mathcal{F}(X)$ とできる。同様に、Kが左随伴関手をもつ時、それをLと書き cosection関手という。($L(\mathcal{F})=\varinjlim\mathcal{F}$ 関手の余極限である) $\mathcal{C}=\mathcal{M}od_R$のときは、$L(\mathcal{F})=\left(\bigoplus_{x\in X}\mathcal{F}(x)\right)\Big/\langle a_x-\rho_{xy}(a_x)\rangle_{x\leqq y}$ とできる。

poset X, Y　　$f: X \longrightarrow Y$ と $\mathcal{F}\in\mathcal{C}(X)$ に対して.
$f_*\mathcal{F}, f_!\mathcal{F}\in\mathcal{C}(Y)$ を. $x\in Y$ 上で. $f_*\mathcal{F}(x)=\Gamma(\mathcal{F}|_{f^{-1}(V_x)})$,
$f_!\mathcal{F}(x)=L(\mathcal{F}|_{f^{-1}(J_x)})$ で定める。但し. $V_x=\{y\in Y \mid x\leqq y\}$
$J_x=\{y\in Y \mid y\leqq x\}$ である。これにより $f_*, f_!$ は $\mathcal{C}(X)\longrightarrow\mathcal{C}(Y)$ なる関手となり. $f_!\dashv f^*\dashv f_*$ となる。($F\dashv U$ は. F が U の左随伴関手であることを示す.)

N.B. poset に filter 位相を入れて.位相空間とみなせる。
($U\subset X$ open $\Leftrightarrow$ U: filter i.e. $x\in U, x\leqq y \Rightarrow y\in U$)
この時写像 $f: X\longrightarrow Y$ が連続 $\Leftrightarrow$ f は単調写像となる。
$\mathcal{F}\in\mathcal{C}(X)$ に対し. X 上の前層を $U\subset X$ open に $\tilde{\mathcal{F}}(U)=\Gamma(\mathcal{F}|_U)$ を対応させることにより作ると.これは X 上の(位相空間の上の)層となる。またこの茎 $\tilde{\mathcal{F}}_x=\mathcal{F}(x)$ となる。逆に. X 上の(位相空間の上の)層 $\mathcal{F}$ があると. $\mathcal{F}(x)=\mathcal{F}(V_x)$ として.ここで定めた poset 上の層が得られ.両者は.同等であることがわかる。

$\boxed{1.2}$ 層係数(コ)ホモロジー　cf.[2]

以下 $\mathcal{C}$ を.(無限の)直積,直和をもち.十分多くの単射的対象,射影的対象をもつアーベル圏とする。この時.任意の poset X について $\mathcal{C}(X)$ も十分に多くの単射的対象,射影的対象をもつアーベル圏となり.また.関手 Γ が存在して加法的で左完全.関手 L も存在して.加法的で右完全となっている。

定義. $\mathcal{F}\in\mathcal{C}(X)$ に対して

Xの$\mathcal{F}$係数 コホモロジーを $H^n(X,\mathcal{F}) = r^n\Gamma(\mathcal{F})$

Xの$\mathcal{F}$係数 ホモロジーを $H_n(X,\mathcal{F}) = l_n L(\mathcal{F})$

で定める。（$r^n\Gamma$はΓのn次右導来関手，$l_n L$はLのn次左導来関手）

<u>standard resolution</u>

poset Xに対し $\overline{X}$ で同じ集合上の discrete な posetを表わす。（順序は $x \leqq x$ のみ） $i : \overline{X} \longrightarrow X$ を集合としての恒等写像とすると，単調で $i^* \dashv i_*$ の unit $\eta : 1 \longrightarrow i_* i^*$ は単射である。$\nabla = i_* i^*$ とし，$\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ に，くり返しかけると，

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{F}}} \nabla\mathcal{F} \underset{\nabla\eta_{\mathcal{F}}}{\overset{\eta_{\nabla\mathcal{F}}}{\rightrightarrows}} \nabla^2 \begin{array}{c}\xrightarrow{\eta_{\nabla^2\mathcal{F}}}\\ \xrightarrow{\nabla\eta_{\nabla\mathcal{F}}}\\ \xrightarrow{\nabla^2\eta_{\mathcal{F}}}\end{array} \nabla^3\mathcal{F} \quad ----$$

なる列ができる。$\delta_n : \nabla^{n+1}\mathcal{F} \longrightarrow \nabla^{n+2}\mathcal{F}$ を $\delta_n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \nabla^i \eta_{\nabla^{n+1-i}\mathcal{F}}$ で定めると，

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{F}}} \nabla\mathcal{F} \xrightarrow{\delta_0} \nabla^2\mathcal{F} \xrightarrow{\delta_1} \nabla^3\mathcal{F} \xrightarrow{\delta_2} \quad ---$$

は複体になり，さらに完全列になる。また $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ に対して $\nabla\mathcal{F}$は，Γ-acyclic （$H^i(X,\nabla\mathcal{F}) = 0 \quad (i>0)$）となっているので，これにより，コホモロジー $H^n(X,\mathcal{F})$ は，

$$0 \longrightarrow C^0(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(\delta_0)} C^1(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(\delta_1)} C^2(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(\delta_2)} \cdots$$

のn次のコホモロジーに一致する。但し $C^n(X,\mathcal{F}) = \Gamma(\nabla^{n+1}\mathcal{F}) = \prod_{x_0 \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_n} \mathcal{F}(x_0, x_1, \cdots, x_n)$

で，$\mathcal{F}(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \mathcal{F}(x_n)$ また，積は，長さnの重複を許す鎖全体にわたる。

$\Gamma(\delta_n) : C^n(X,\mathcal{F}) \longrightarrow C^{n+1}(X,\mathcal{F})$ は，$x_0 \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_{n+1}$ に対応する成分へ行く写像が，

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(C^n \xrightarrow{pr} \mathcal{F}(x_0, \cdots \check{x}_i, \cdots, x_{n+1}) \xrightarrow{id} \mathcal{F}(x_0, \cdots x_{n+1}) \right)$$

$$+ (-1)^{n+1} \left(C^n \xrightarrow{pr} \mathcal{F}(x_0, x_1, \cdots, x_n) \xrightarrow{\rho_{x_n, x_{n+1}}} \mathcal{F}(x_0, \cdots, x_{n+1}) \right) \qquad \text{となる。}$$

同様に、ホモロジーは $i:\overline{X}\to X$ に対する $i_!\dashv i^*$ の counit
$\varepsilon: i_!i^*\to 1$ （これは全射）, $\varepsilon_{\mathcal{F}}:\tau\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ $(\tau=i_!i^*)$

$$\cdots\to\tau^3\mathcal{F}\ \overset{\varepsilon_{\tau^2\mathcal{F}}}{\underset{\tau^2\varepsilon_{\mathcal{F}}}{\xrightarrow[\tau\varepsilon_{\tau\mathcal{F}}]{}}}\ \tau^2\mathcal{F}\ \overset{\varepsilon_{\tau\mathcal{F}}}{\underset{\tau\varepsilon_{\mathcal{F}}}{\rightrightarrows}}\ \tau\mathcal{F}\xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{F}}}\mathcal{F}$$

より定まる複体

$$\cdots\to\tau^3\mathcal{F}\xrightarrow{\partial_2}\tau^2\mathcal{F}\xrightarrow{\partial_1}\tau\mathcal{F}\xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{F}}}\mathcal{F}\to 0$$

を用いて、（$\tau\mathcal{F}$ は L-acyclic で上の複体が完全列より）

$$\cdots\to C_2(X,\mathcal{F})\xrightarrow{L(\partial_2)}C_1(X,\mathcal{F})\xrightarrow{L(\partial_1)}C_0(X,\mathcal{F})\to 0$$

の n 次ホモロジーとして $H_n(X,\mathcal{F})$ が計算できる。但し、

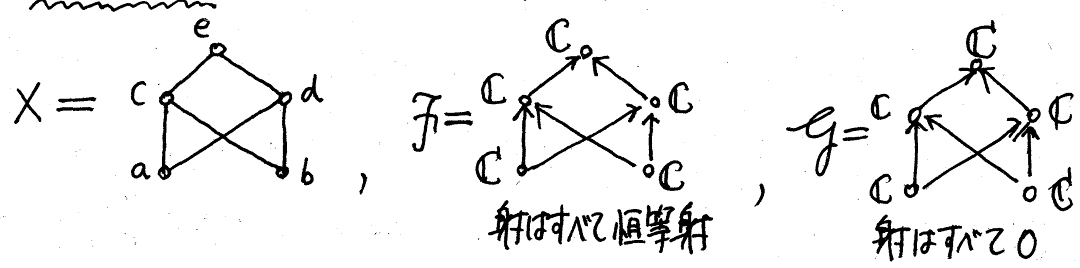
$$C_n(X,\mathcal{F})=L(\tau^{n+1}\mathcal{F})=\bigoplus_{x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_n}\mathcal{F}^*(x_0,x_1,\dots,x_n),\quad \mathcal{F}^*(x_0,x_1,\dots,x_n)=\mathcal{F}(x_0)$$

$L(\partial_n):C_n(X,\mathcal{F})\to C_{n-1}(X,\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}^*(x_0,x_1,\dots,x_n)$ 上で、

$$\mathcal{F}^*(x_0,x_1,\dots,x_n)\xrightarrow{\rho_{x_0x_1}}\mathcal{F}^*(x_1,x_2,\dots,x_n)\hookrightarrow C_{n-1}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\left(\mathcal{F}^*(x_0,x_1\cdots x_n)\xrightarrow{id}\mathcal{F}^*(x_0\cdots\check{x}_i\cdots x_n)\hookrightarrow C_{n-1}\right)$$ である。

N.B. "非輪状モデルの方法" [11] を使うと、正規化された(コ)チェイン複体で計算しても、同じ(コ)ホモロジーとなる。(直積、直和は、重複のない長さ n の鎖全体だけとればよい)

例.



長さ0の鎖　a, b, c, d, e　5個

長さ1の鎖　ac, ad, ae, bc, bd, be, ce, de　8個

長さ2の鎖　ace, ade, bce, bde　4個

よってコホモロジーは $0 \longrightarrow \underset{0次}{\mathbb{C}^5} \xrightarrow[A]{} \underset{1次}{\mathbb{C}^8} \xrightarrow[B]{} \underset{2次}{\mathbb{C}^4} \longrightarrow 0$

のコホモロジーである。

$\mathcal{F}$に対して

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} -1 & & 1 & & \\ -1 & & & 1 & \\ -1 & & & & 1 \\ & -1 & 1 & & \\ & -1 & & 1 & \\ & -1 & & & 1 \\ & & -1 & & 1 \\ & & & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ ac \\ ad \\ ae \\ bc \\ bd \\ be \\ ce \\ de \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} ac & ad & ae & bc & bd & be & ce & de \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & & -1 & & & & 1 & \\ & 1 & -1 & & & & & 1 \\ & & & 1 & & -1 & 1 & \\ & & & & 1 & -1 & & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ ace \\ ade \\ bce \\ bde \end{array}$$

$\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, B = 4$ より　$\dim_{\mathbb{C}} H^n(X, \mathcal{F}) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$

$\mathcal{G}$に対しては Aの代りにA_0, Bの代りにB_0（それぞれ○印を0にしたもの）

となり, $\mathrm{rank}\, A_0 = \mathrm{rank}\, B_0 = 3$より　$\dim_{\mathbb{C}} H^n(X, \mathcal{G}) = \begin{cases} 2 & n=0,1 \\ 1 & n=2 \\ 0 & n>2 \end{cases}$

またホモロジーは　$0 \longrightarrow \overset{2次}{\mathbb{C}^4} \xrightarrow[{}^tB]{} \overset{1次}{\mathbb{C}^8} \xrightarrow[{}^tA]{} \overset{0次}{\mathbb{C}^5} \longrightarrow 0$

のホモロジーとなり　$\dim_{\mathbb{C}} H_n(X, \mathcal{F}) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$

$\mathcal{G}$については${}^tA$の代りに${}^tA_\triangle$, ${}^tB$の代りに${}^tB_\triangle$（それぞれ△印を0にしたもの）

となるので　$\dim_{\mathbb{C}} H_n(X, \mathcal{G}) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$　となる。

$(\mathrm{rank}\, {}^tA_\triangle = \mathrm{rank}\, {}^tB_\triangle = 4)$

N.B. $\mathcal{G}$のような層は Whitney層と呼ばれている。[1]

命題 [2]

$X \xrightarrow{f} Y,\ Y \xrightarrow{g} X$ が関手とみて $f \dashv g$ のとき.

$\mathcal{G} \in \mathcal{C}(Y)$ に対し　$H^n(Y, \mathcal{G}) = H^n(X, f^*\mathcal{G})$

$\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ に対し　$H_n(X, \mathcal{F}) = H_n(Y, g^*\mathcal{F})$　となる。

命題（スペクトル系列）[1], [4]

$f : X \longrightarrow Y$, $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ に対し

(i)　$E_2^{p,q} = H^p(Y, r^q f_* \mathcal{F}) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F})$

(ii)　$E^2_{p,q} = H_p(Y, l_q f_! \mathcal{F}) \Longrightarrow H_{p+q}(X, \mathcal{F})$

なるスペクトル系列がある。

∵) (i) $\Gamma_X \cong \Gamma_Y \circ f_*$ と. Γ_Y が左完全, f_* が単射的対象を単射的対象に写すことより。

(ii) $L_Y \circ f_! \cong L_X$ と L_Y が右完全, $f_!$ が射影的対象を射影的対象に写すことより。

$\boxed{1.3}$ 単体複体の(コ)ホモロジー

$\mathfrak{S}$ を単体複体のなす圏, $\mathfrak{S}_0$ を順序付単体複体のなす圏とする。順序付単体複体 M とは、単体複体で頂点の集合に半順序が与えられていて、それにより M の各単体が全順序集合となっているものをいう。また $\mathcal{O}$ を poset 全体のなす圏とする。単体複体 M に対し. M の単体全体の集合 αM は単体の包含により半順序集合とみなせる。これによって関手 $\alpha : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathcal{O}$ が定まる。逆に. 半順序集合 X に対して、相異なる元から成る鎖 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 全体を単体とする単体複体 βX が定まる。

これは、もともとのXの半順序により順序付単体複体とみなせる。これにより関手 $\beta : \mathcal{O} \longrightarrow \mathfrak{S}_0$ が定まる。合成 $\beta \circ \alpha$ は重心細分に他ならない。$M \in \mathfrak{S}$ に対しM上の圏 $\mathcal{C}$ に値をもつ共変係数系とは、$\mathcal{C}(\alpha M)$ の対象のことをいう。また、M上の $\mathcal{C}$ に値をもつ反変係数系とは、$\mathcal{C}(\alpha M^*)$ の対象のこととする。ここで $X \in \mathcal{O}$ に対し X^* でXに逆順序関係を入れたposetを表わす。$M \in \mathfrak{S}_0$ の共変係数系 $\mathcal{F}\ (\in \mathcal{C}(\alpha M))$ 係数のn次のコホモロジー $H^n(M, \mathcal{F})$ を、複体

$$0 \longrightarrow C^0(M,\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_0} C^1(M,\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_1} C^2(M,\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_2} \cdots$$

のn次のコホモロジーのことと定める。但し、

$$C^n(M,\mathcal{F}) = \prod_{\sigma_n \in \mathfrak{M}_n} \mathcal{F}(\sigma_n) \quad で \quad \mathfrak{M}_n = Hom_{\mathfrak{S}_0}(\Delta_n, M)。$$

Δ_n はn次元の標準単体（順序付）で $\mathfrak{M}_n$ の元はMのn次元特異単体とも呼ばれる。$\sigma_n \in \mathfrak{M}_n$ に対し $\mathcal{F}(\sigma_n) = \mathcal{F}(Im\,\sigma_n)$ とする。また写像 $\delta_n : C^n(M,\mathcal{F}) \longrightarrow C^{n+1}(M,\mathcal{F})$ は、$\mathcal{F}(\sigma_{n+1})$ 成分へは、

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \left(C^n \xrightarrow{p_r} \mathcal{F}(F_i \sigma_{n+1}) \xrightarrow{P_{F_i\sigma_{n+1},\sigma_{n+1}}} \mathcal{F}(\sigma_{n+1}) \right)$$

で定まるものとする。ただし $F_i\sigma_{n+1}$ は σ_{n+1} の全順序でi番目の元を除いた特異単体を表わす。同様に、$M \in \mathfrak{S}_0$ の $\mathcal{F}^* \in \mathcal{C}(\alpha M^*)$ を係数とするn次ホモロジー $H_n(M, \mathcal{F}^*)$ を、複体

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2(M,\mathcal{F}^*) \xrightarrow{\partial_2} C_1(M,\mathcal{F}^*) \xrightarrow{\partial_1} C_0(M,\mathcal{F}^*) \longrightarrow 0$$

のn次ホモロジーで定義する。但し、$C_n(M,\mathcal{F}^*) = \bigoplus_{\sigma_n \in \mathfrak{M}_n} \mathcal{F}^*(\sigma_n)$ で、$\sigma_n \in \mathfrak{M}_n$ に対し $\mathcal{F}^*(\sigma_n) = \mathcal{F}^*(Im\,\sigma_n)$ である。また写像

$\partial_n : C_n(M, \mathcal{F}) \longrightarrow C_{n-1}(M, \mathcal{F})$ は、$\mathcal{F}^*(\sigma_n)$ 上では

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\mathcal{F}^*(\sigma_n) \xrightarrow{\rho_{\sigma_n, F_i\sigma_n}} \mathcal{F}^*(F_i\sigma_n) \hookrightarrow C_{n-1} \right)$$

で定まるものとする。$\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ に対して、βX 上の共変係数系 $\beta\mathcal{F}$ を、$\beta\mathcal{F}(x_0 < x_1 < \cdots < x_n) = \mathcal{F}(x_n)$ で、また、βX 上の反変係数系 $\beta^*\mathcal{F}$ を $\beta^*\mathcal{F}(x_0 < x_1 < \cdots < x_n) = \mathcal{F}(x_0)$ で定めると、

命題　poset X と $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ に対し、

$$H^n(X, \mathcal{F}) = H^n(\beta X, \beta\mathcal{F})$$
$$H_n(X, \mathcal{F}) = H_n(\beta X, \beta^*\mathcal{F})$$

が成立する事が、poset 上の(コ)ホモロジーの計算法からわかる。

また逆に、

命題　$M \in \mathfrak{S}_0$, $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(\alpha M)$, $\mathcal{F}^* \in \mathcal{C}((\alpha M)^*)$ に対し

$$H^n(M, \mathcal{F}) = H^n(\alpha M, \mathcal{F})$$
$$H_n(M, \mathcal{F}^*) = H_n((\alpha M)^*, \mathcal{F}^*)$$

が成立する事も確かめられる。[2]　よって、poset 上の(コ)ホモロジーを考える事と、単体複体上の(コ)ホモロジーを考える事は、本質的に同じとみてよい。また $M \in \mathfrak{S}$ に対して、(コ)ホモロジーを考えるためには、順序付けが必要であるが、どんな順序付けをとっても、同じ(コ)ホモロジーとなることがわかる。

N.B.　poset 上の(コ)ホモロジーと同様に、複体中の直積、直和は、正規の n 次元単体（M の単体）だけをとってきて計算しても同じ(コ)ホモロジーとなる。

§2 層付半順序集合と群の表現

$\boxed{2.1}$ 群の作用

以下圏 $\mathcal{C}$ は1.2と同じとする。

層付半順序集合の圏

poset X, Y と単調写像 $f: X \longrightarrow Y$ に対して $\Gamma_Y \longrightarrow \Gamma_X \circ f^*$ なる自然変換と、f^*が完全な事から[2; 9.1] $\mathcal{G} \in \mathcal{C}(Y)$ に対して $H^n(Y, \mathcal{G}) \longrightarrow H^n(X, f^*\mathcal{G})$ なる射が得られる。よって $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ と $f^*\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ なる $\mathcal{C}(X)$ の射があれば、それから生ずる $H^n(X, f^*\mathcal{G}) \longrightarrow H(X, \mathcal{F})$ を合成して、$H^n(Y, \mathcal{G}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F})$ が定まる。

定義　圏 $\mathcal{O}\mathcal{C}_{coh}$ を次のように定める。対象は $X \in \mathcal{O}$ と $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ の対 $(X, \mathcal{F})$ で、射は $(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{(f, \varphi)} (Y, \mathcal{G})$ 但し $f: X \longrightarrow Y$ (単調) $\varphi: f^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ は $\mathcal{C}(X)$ の射で、射の合成は自然に定まるものできめる。

この時、H^n は $\mathcal{O}\mathcal{C}_{coh} \longrightarrow \mathcal{C}$ なる反変関手となる。

同様に、$f: X \longrightarrow Y$ のとき、$L_X \circ f^* \longrightarrow L_Y$ と f^*の完全性より $\mathcal{G} \in \mathcal{C}(Y)$ に対して、$H_n(X, f^*\mathcal{G}) \longrightarrow H_n(Y, \mathcal{G})$ が生ずる。$\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)$ と $\mathcal{F} \longrightarrow f^*\mathcal{G}$ なる $\mathcal{C}(X)$ の射があれば $H_n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_n(X, f^*\mathcal{G})$ を合成して $H_n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H_n(Y, \mathcal{G})$ が定まる。

定義　圏 $\mathcal{O}\mathcal{C}_{h}$ を、対象は $\mathcal{O}\mathcal{C}_{coh}$ と同じで、射は、$(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{(f, \varphi)} (Y, \mathcal{G})$ を、$f: X \longrightarrow Y$ (単調), $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow f^*\mathcal{G}$ は $\mathcal{C}(X)$ の射で定める。

この時. H_n は $\mathcal{OC}_h \longrightarrow \mathcal{C}$ なる共変関手となる。

このように. 層付半順序集合の圏はコホモロジーとホモロジーで異なる圏を考えるのが自然である。

N.B. 忘却関手により $\mathcal{OC}_{coh} \longrightarrow \mathcal{O}$ は cofibered category $\mathcal{OC}_h \longrightarrow \mathcal{O}$ は fibered category となる。

定義. 群 G が層付半順序集合 $(X, \mathcal{F})$ に作用するとは. $r : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{OC}_h}(X, \mathcal{F})$ なる準同型 r が与えられていること。

(但し $\mathrm{Aut}_{\mathcal{OC}_h}$ は圏 $\mathcal{OC}_h$ における自己同型射全体が射の合成に関して成す群のことを表すとする。)

この時準同型 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{OC}_h}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{H_n} \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(H_n(X, \mathcal{F}))$ を合成して. G の $H_n(X, \mathcal{F})$ への作用が得られる。また

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{OC}_h}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Aut}_{\mathcal{OC}_{coh}}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{H^n} \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(H^n(X, \mathcal{F}))$$

を合成して G の $H^n(X, \mathcal{F})$ への作用が得られる。ここで Φ は. $(f, \varphi) \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{OC}_h}(X, \mathcal{F})$ に対し. $\Phi(f, \varphi) = (f^{-1}, f^{-1*}\varphi) \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{OC}_{coh}}(X, \mathcal{F})$ を対応させる反準同型。(H^n も反準同型) 群 G の $(X, \mathcal{F})$ への作用をいい換えると. G が X に poset の自己同型で作用していて. 各 $g \in G$ と $x \in X$ に対し $\tilde{g}_x : \mathcal{F}(x) \longrightarrow \mathcal{F}(g \cdot x)$ なる $\mathcal{C}$ の射 (同型射) が定められていて. $\tilde{1}_x$ は恒等射で,

$x \leqq y$ に対し
$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(x) \arrow[r, "\tilde{g}_x"] \arrow[d, "\rho_{xy}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{F}(g \cdot x) \arrow[d, "\rho_{gx, gy}"] \\ \mathcal{F}(y) \arrow[r, "\tilde{g}_y"'] & \mathcal{F}(g \cdot y) \end{tikzcd}$$
が可換図式となり,

$x \in X$ と $g, h \in G$ に対し $\widetilde{(hg)}_x = \tilde{h}_{gx} \circ \tilde{g}_x$ となっていること。

この時、$x \in X$ に対し $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$（固定群）とすると、$\tilde{g}_x$ により、G_x は $\mathcal{F}(x)$ へ作用する。群 G が作用する $(X, \mathcal{F})$ 全体の成す圏を $\mathcal{OC}_G$ と書く。（射は、$(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{(f, \varphi)} (Y, \mathcal{G})$ なる $\mathcal{OC}_h$ の射で、G-equivariant なもの すなわち $\forall x \in X, \forall g \in G$ に対し

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(x) \arrow[r, "\tilde{g}_x"] \arrow[d, "\varphi_x"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{F}(g.x) \arrow[d, "\varphi_{g.x}"] \\ f^*\mathcal{G}(x) \arrow[r, "f^*\tilde{g}_x"'] & f^*\mathcal{G}(g.x) \end{tikzcd}$$

が可換図式となるもの）

また群 G の作用する X 上の層の圏を $\mathcal{C}(X)_G$ と書く。

（$\mathcal{C}(X)_G$ は $\mathcal{OC}_G$ の部分圏で $(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{(1_X, \varphi)} (X, \mathcal{G})$ を射とするものとみなせる。）

この時 $L \dashv K \dashv \Gamma$ より、

命題 $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X)_G$ と、$A \in \mathcal{C}_G$ に対し、

$$Hom_{\mathcal{C}(X)_G}(K_A, \mathcal{F}) \cong Hom_{\mathcal{C}_G}(A, H^0(X, \mathcal{F}))$$

$$Hom_{\mathcal{C}_G}(H_0(X, \mathcal{F}), A) \cong Hom_{\mathcal{C}(X)_G}(\mathcal{F}, K_A)$$

但し、$\mathcal{C}_G$ は、G の作用する $\mathcal{C}$ の対象が成す圏（射はG-equivariant）。

また K_A は、G の A への作用から自然に定まる G の作用をもつ。

$\boxed{2.2}$ 有限 chevalley 群と Building への作用。

この節では、群 G として有限体 $k = \mathbb{F}_q$（$q = p^r$, p: 素数）上の階数 $l \geq 2$ の普遍 chevalley 群を考える。[10], [12]

また圏 $\mathcal{C}$ として k 上の　　　ベクトル空間のなす圏をとる。
Gの作用する poset として Gの Building Δ を考える。
まず Chevalley群について必要事項をまとめる。

Gは半単純 Lie環 $\mathfrak{L}$ の忠実な表現 φ の表現空間 V の許容$\mathbb{Z}$形 $V_{\mathbb{Z}}$ を用いて構成される。$\mathfrak{L}$ の根系を Δ とし、$\mathfrak{L}$ の Chevalley の標準基を $\{h_\alpha\ (\alpha\in\Pi),\ e_\beta\ (\beta\in\Delta)\}$ とする。(Π は Δ の基本系) この時 $r\in\Delta$ に対し $x_r(t)=\exp(t\varphi(e_r))$ ($t\in k$) は $V_k=k\otimes_{\mathbb{Z}}V_{\mathbb{Z}}$ 上に可逆な線形写像で作用し、

$$G=\langle x_r(t)\mid r\in\Delta,\ t\in k\rangle\subset GL(V_k)$$ で定める。

Π で定まる正系を Δ^+ とおき $U=\langle x_r(t)\mid r\in\Delta^+,\ t\in k\rangle$ と定めると $|U|=q^N$ ($N=|\Delta^+|$) で U はGの p-Sylow群となる。また $r\in\Delta$ と $t\in k^*$ について $w_r(t)=x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$
$h_r(t)=w_r(t)w_r(-1)$ とおき部分群 N, H を

$$N=\langle w_r(t)\mid r\in\Delta,\ t\in k^*\rangle\qquad H=\langle h_r(t)\mid r\in\Delta,\ t\in k^*\rangle$$

で定める。この時 H は可換群で $\langle U,H\rangle=UH\rhd U$, $U\cap H=\{1\}$ となる。$B=UH$ とおき標準Borel部分群という。B に共役な G の部分群を単にBorel部分群という。また $N\rhd H$ で $W=N/H\cong W(\Delta)$ (Δ の Weyl群) で、$S=\{Hw_r(1)\mid r\in\Pi\}$ とおくと (W,S) は Coxeter系となるが、さらに (G,B,N,S) は Tits系を成している。従って $J\subset S$ に対し $W_J=\langle J\rangle\subset W$ と書く時、B を含む G の

部分群は. ある$J \subset S$をとって. $P_J = BW_JB$ の形になっていて.
$P_J = P_K \Rightarrow J = K$, $N_G(P_J) = P_J$, $P_J \cap P_K = P_{J \cap K}$,
P_JとP_Kが. Gで共役なら$J = K$ などが成り立つ。[12; 定理 7.19]
P_Jの形の部分群をJ-型の標準Parabolic部分群と呼び, これに共役な部分群を (J-型の) Parabolic部分群という。Δを. Gを除く. parabolic部分群全体の集合に. 包含の逆で順序を入れた半順序集合とする。(これをGの Building という。)
これは. 上にあげた parabolic部分群の性質から. Borel部分群を極大 face とする$\overset{\ell-1\text{次元の}}{}$単体複体とみなすことができる。(頂点は極大な Parabolic部分群) 仮定の rank $\ell \geqq 2$ より. Δは連結となる。また. Sに全順序を入れる事により, Δは順序付単体複体となる。Gは共役で. Δに作用する。
Δの単体σに対応している parabolic部分群をP_σと書くと.
$P_{g\sigma} = gP_\sigma g^{-1}$ である。

<u>Δ上の固定点層 $\mathcal{F}_V$</u>

Gのk上の表現Vに対しΔ上の反変係数系$\mathcal{F}_V$ (固定点層という) を次のように作る。$\Delta \ni \sigma$に対する parabolic部分群の Levi分解を $P_\sigma = L_\sigma U_\sigma$ とする。

(P_Jに対しては $U_J = \langle x_r(t) \mid r \in \Delta^+ - \Delta_J, t \in k \rangle$
$L_J = \langle H, x_r(t) \mid r \in \Delta_J, t \in k \rangle$ にとれる。
但しΔ_JはJに対応するΔの部分根系)

この時 $\mathcal{F}_V(\sigma) = V^{U_\sigma} = \{v \in V \mid g.v = v \ \ \forall g \in U_\sigma\}$
と定める。$\tau < \sigma$（τがσのface）の時 $P_\tau \supset P_\sigma$ で
$U_\tau \subset U_\sigma$ となるので $V^{U_\tau} \supset V^{U_\sigma}$ よって $\rho_{\sigma,\tau} : \mathcal{F}_V(\sigma) \longrightarrow \mathcal{F}_V(\tau)$ を
自然な包含写像で定める。この $\mathcal{F}_V$ は もともとの G の V
への作用から自然に導びかれる G の作用をもつ。すなわち
$\tilde{g}_\sigma : \mathcal{F}(\sigma) \longrightarrow \mathcal{F}(g.\sigma)$ を $\tilde{g}_\sigma(v) = g.v$ で定められる。
$\mathcal{F}_V$ は定数層 K_V の部分層である。

例. A_{n-1}型 の時 $G = SL_n(\mathbb{F}_q)$（階数 $n-1 \geqq 2$）
この時 Building は $V = \mathbb{F}_q^{\,n}$ の 0でない真部分空間の作る
posetを $S(V)$ として $\Delta = \beta S(V)$ とみなすことができる。
Vの旗 $0 \neq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_t \subsetneq V$ の G 中の固定群 P が J型の parabolic
部分群 となる。但し $J = \{1, 2, \cdots, n-1\} - \{i_1, i_2, \cdots, i_t\}$, $i_i = \dim V_i$
で S の元と対応する基本根系の番号を同一視する。 $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \cdots - \alpha_{n-1}$
（標準Borel部分群は G 中の上半三角行列全体のなす部分群である）
この時自然表現 V に対する $\mathcal{F}_V$ は $\sigma \in \Delta$ に対応する P_σ できまる
Vの旗を $0 \neq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_t \subsetneq V$ とした時 $\mathcal{F}_V(\sigma) = V_1$ となっている。
この $\mathcal{F}_V$ のホモロジーに関し次の結果がある。

[Lusztig][3]
GがA_{n-1}型 ($n \geq 3$)
V：自然表現に対し

$$H_i(\Delta, \mathcal{F}_V) \cong \begin{cases} V & i = 0 \\ 0 & 0 < i < n-2 \end{cases}$$

$$\dim_k H_{n-2}(\Delta, \mathcal{F}_V) = (q-1)(q^2-1)\cdots(q^{n-1}-1)$$

また定数層 K_k のホモロジーに関し次の結果がある。

[Solomon-Tits] [8]

G: 任意の型
階数 $l \geqq 2$ に対し
$$H_i(\Delta, K_k) \cong \begin{cases} k & i=0 \\ St & i=l-1 \\ 0 & 0<i<l-1 \end{cases}$$

St は Steinberg 表現と呼ばれる　q^N 次元の既約表現
($N=|\Delta^+|$)

次に、既約な表現 V に対する $\mathcal{F}_V$ の性質に関して Ronan-Smith の結果 [5] をならべる。

1、V が既約なら $\mathcal{F}_V$ も既約.

但し. G の作用をもつ層 $\mathcal{F}$ が既約とは. G の作用をもつ部分層で chamber generated なものは 0 か $\mathcal{F}$ となること。($\mathcal{F}$ が chamber generated とは各 $\sigma \in \Delta$ に対し $\mathcal{F}(\sigma) = \langle P_{c \sigma} \mathcal{F}(c) \mid c$: 極大 face (chamber) $\rangle$ となること)

2、V, W が既約で $\mathcal{F}_V \cong \mathcal{F}_W$ なら $V \cong W$

これらから次が出る。

3、基本定理.　V が既約のとき. $H_0(\mathcal{F}_V)$ は唯一つの極大部分加群をもち. それによる剰余加群は V と同型になる。特に. $H_0(\mathcal{F}_V)$ は直既約である。

4、系　$H_0(\mathcal{F}_{St}) \cong St$

また. 基本定理を用いると帰納的に G の既約表現 V が構成できる。

5. Mが既約な minimal weight module のとき. GがC_n型で char $k=2$の場合を除いて. $H_0(\mathcal{F}_M) \cong M$ となる。

$\boxed{2.3}$ 散在単純群と group geometry

散在単純群についても少しの例外を除いて. Building にあたるような幾何学的対象を. 部分群を使って構成できる。(minimal parabolic system [7]) これにより 2.2 と同様の議論をする事ができる。詳しくは文献を参照して頂きたい。([6]など)

参考文献

[1] K.P.Baclawski, "Homology and Combinatorics of Ordered Sets," Ph.D. thesis, Harvard University, 1976.

[2] R.Deheuvels, Homologie des ensembles ordonnes et des espaces topologiques, Bull.Soc.Math.France 90 (1962),261-321.

[3] G.Lusztig, "The Discrete Series Representations of the General Linear Groups over a Finite Field," Annals of Mathematics Studies 81, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1974.

[4] D.Quillen, Homotopy properties of the poset of non-trivial p-subgroups of a group, Advances in Math. 28 (1978), 101-128.

[5] M.A.Ronan and S.D.Smith, Sheaves on buildings and modular representations of Chevalley groups, J.Algebra 96 (1985), 319-346.

[6] M.A.Ronan and S.D.Smith, Universal presheaves on group geometries, and modular representations, J.Algebra 102 (1986), 135-154.

[7] M.A.Ronan and G.Stroth, Minimal parabolic geometries for the sporadic groups, European J.Combin. 5 (1984), 59-91.

[8] L.Solomon, The Steinberg character of a finite group with a BN-pair, in "Theory of Finite Groups" (R.Brauer-C.Sah, Ed.), 213-221, Benjamin, New York, 1969.

[9] S.Yuzvinsky, Cohen-Macaulay rings of sections, Advances in Math. 63 (1987), 172-195.

[10] 岩堀長慶 Lie環論とChevalley群 上,下. 東大セミナリー・ノート 12,13,(1965).

[11] 小松-中岡-菅原 位相幾何学 I 岩波書店 (1967)

[12] 鈴木通夫 有限単純群 紀伊国屋書店 (1987)