数理解析研究所講究録
第 671 巻 1988 年 24-32

Weighing 行列について

愛媛大 教育 大森博之 (Hiroyuki Ohmori)

$W = W(n,k)$ が位数 n, ウェイト k の Weighing 行列とは成分が 0, 1, −1 で各行各列の非零要素の個数が一定(k)の $n \times n$ 直交行列の事である。特に $W(n,n)$ はアダマール行列(位数 n)と呼ばれている。

2つの行列 $W_1 = W_1(n,k)$, $W_2 = W_2(n,k)$ が与えられている時, W_1 と W_2 が同値であるとは一方の行列に対し, 適当な行又は列に −1 を乗じ又適当な行又は列の置換を施す事により他方の行列が得られる時をいう。

この同値関係により与えられた位数及びウェイトを持つ Weighing 行列全体を分類する問題を考える。この事に関して今までなされている事は以下の通りである(文献[1])。

$W(n,k)$ において

$k \leqq 5$ に対して すべての n について。

$n \leqq 11$ に対して すべての k について。

今回は $W(12,k)$ $(1 \leqq k \leqq 12)$ の分類が完成されたので その方法の概説及び結果を報告したい。詳しくは [6] を参照されたい。

◦構成

一般のn, kに対して$W(n,k)$が存在する為のいくつかの必要条件が知られている（文献[3]）。例えば (i) nが奇数の時kは平方数かつ$(n-k)^2+(n-k)+1 \geqq n$。(ii) $n \equiv 2 \pmod 4$の時$k \leqq n-1$かつkは2つの平方数の和。又、$n \equiv 0 \pmod 4$の時すべてのk $(1 \leqq k \leqq n)$に対して$W(n,k)$が存在するだろうという予想もある。所でn, kを与えた時$W(n,k)$を具体的に又同値でないものをすべて構成するには次の方法が一般的である。

$W(n,k)$が与えられた時任意の1行（例えばi行）を固定した時i行と他の行が直交する為には同時に0でない成分の個数が偶数でなくてはいけない。そこでi行と$2j$ケ所で同時に0でない成分をもつような行の個数をp_{2j}とする。この時i行はintersection pattern $(p_0, p_2, p_4, \cdots)$を持つという事にする。すると$(p_0, p_2, p_4, \cdots)$は次の2つの方程式を満す事がわかる。

(1) $\displaystyle\sum_{i=0} p_{2i} = n-1$, (2) $\displaystyle\sum_{i=0} i\, p_{2i} = k(k-1)/2$

上の方程式をIPCと呼ぶ事にする。

今$(p_0, p_2, p_4, \cdots)$がIPCの解とする。この時$(p_0, p_2, p_4 \cdots)$をintersection patternとして持つような$W(n,k)$が常に存在する訳ではない。

$W(12,6)$を例にとってみる。 IPCの解は6組存在する。

$$(P_0, P_2, P_4, P_6) = (2,3,6,0),\ (1,5,5,0),\ (2,4,4,1),\ (0,8,2,1),$$
$$(0,7,4,0) \text{ そして } (1,6,3,1)$$

上の解を順に $\mathbb{P}_1, \cdots, \mathbb{P}_6$ とする。この時 $\mathbb{P}_1$から構成したものと $\mathbb{P}_6$から構成したものはもし存在したとすればそれらは同値である事がわかる。しかし $\mathbb{P}_1$を intersection patternとしてもつ行列は存在しない事が証明出来る([6])。
$\mathbb{P}_3$の場合 第3行まで一般性を失う事なく固定出来るが残りの行を決定するのにいくつかの場合があるが,同値により場合の数を少くしその場合場合に応じて逐次構成する事により10個の行列を得る(必ずしも非同値という訳ではない)。他の $\mathbb{P}_i$ に対しても同様にして行列を構成する。

他の $W(12,k)$ $(7 \leqq k \leqq 10)$ に対しても上の例と全く同様な方法で Weighing 行列を構成する。尚 $W(12, i)$ $(1 \leqq i \leqq 3)$ は一意的 $W(12,4)$, $W(12,5)$ はそれぞれ 5, 7 個の同値でないものが知られている([1])。

○ 分類

2つの Weighing 行列が同値か否かの判定に自己同形群とか,線形符号の立場からの最小距離そしてプロフィル([2])が有用である事が良く知られている。

$W(12,k)$ $(6 \leqq k \leqq 10)$ の分類には,4行を選んで出来る

generalized inner product を用いる。即ち $W=W(k,k)=(w_{i,j})$ に対し各 i 行に対し、又 i', i'', i''' に対し

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{k} |w(i,j)\cdot w(i',j)\cdot w(i'',j)\cdot w(i''',j)|$$

の値の分布を考える（全体で ${}_{11}C_3$）。そして i 行に対しベクトル $g(i)=(g_0^{(i)},\cdots,g_k^{(i)})$ を対応させる。（ここに $g_l^{(i)}$ は $(*)$ の値が l となる組 $\{i', i'', i'''\}$ の数。）

更に W に対し $g(i)$ の重複度を考慮に入れた表を想定する事が出来る。この表（G-表）が異なれば2つの行列は同値ではない。このような表の考えは位数28のアダマール行列の分類に用いたK-行列と類似する([5])。

。結論

以上の考えのもとで $W(k,k)$ $(6 \leqq k \leqq 10)$ の同値でない行列及びそれらのG-表を結果のみ表示する。尚行列の中で一は -1 を又空白は0を表わすものとする。また、行列 X_i に対し $*$ をつけた場合 X_i と X_i^T（X_i の転置行列）は同値でない事を示し、もし $*$ がない時は X_i と X_i^T は同値である事を示す。$W(12,11)$ 及び $W(12,12)$ の一意性はそれぞれ [1] 及び [4] で示されている。

結果1. 位数12, ウェイト6のWeighing行列の同値でないものの個数は7。行列及びG-表は以下の通り。

$$
E_1 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
1 & - & & & & & 1 & 1 & - & - & & \\
 & 1 & & - & & & 1 & - & 1 & & - & - \\
1 & & & - & & & - & & 1 & - & 1 & \\
1 & & & & - & & & - & - & 1 & 1 & \\
1 & & & & & - & - & 1 & & 1 & - & \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & - & - & 1 & & 1 & - & & & & & 1 \\
 & - & 1 & & 1 & - & & - & & & & 1 \\
 & 1 & - & - & 1 & & & & - & & & 1 \\
 & 1 & & 1 & - & - & & & & - & & 1 \\
 & & 1 & - & - & 1 & & & & & - & 1
\end{bmatrix}
\qquad
E_2^* = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
1 & - & & & & & 1 & 1 & - & - & & \\
1 & & - & & & & 1 & - & 1 & & - & \\
1 & & & 1 & - & - & - & & & & & 1 \\
1 & & & - & & & & - & - & 1 & 1 & \\
1 & & & - & & & - & 1 & 1 & & & - \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & & - & - & 1 & & & & & - \\
 & 1 & - & & & & & 1 & - & 1 & - & \\
 & 1 & - & & - & 1 & & & & - & 1 & \\
 & 1 & & - & 1 & - & & & & - & & 1 \\
 & & 1 & - & - & 1 & & & & & - & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
E_5 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
1 & - & & & & & 1 & 1 & - & - & & \\
1 & & 1 & - & - & & - & & & & 1 & \\
1 & & - & 1 & & - & & - & & & 1 & \\
1 & & - & & & & - & 1 & & 1 & - & \\
1 & & & - & & & 1 & - & 1 & & - & \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & & - & 1 & - & & & - & & & 1 \\
 & 1 & - & & - & 1 & & & & - & & 1 \\
 & 1 & & & - & & 1 & & - & 1 & & - \\
 & 1 & & & & - & & 1 & 1 & - & & - \\
 & & - & - & 1 & 1 & & & & & 1 & -
\end{bmatrix}
\qquad
E_{14}^* = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
1 & - & & & & & 1 & 1 & - & - & & \\
1 & 1 & - & - & & & 1 & - & & & & \\
1 & 1 & & & - & - & - & 1 & & & & \\
1 & - & & & & & & & 1 & 1 & - & - \\
1 & - & & & & & - & - & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & - & - & 1 & 1 & - & 1 & & & & \\
 & & - & 1 & - & 1 & & & 1 & - & & \\
 & & 1 & - & - & 1 & & & & & 1 & - \\
 & & & & - & 1 & & & - & 1 & - & 1 \\
 & & 1 & - & & & & & 1 & - & - & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
G_2 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
1 & - & & & & & 1 & - & & 1 & - & \\
1 & 1 & 1 & - & - & - & & & & & & \\
1 & & - & 1 & - & & & 1 & - & & & \\
1 & & - & - & 1 & & & & & & 1 & - \\
1 & - & & & & & - & & 1 & - & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & - & - & - \\
 & - & 1 & & - & 1 & & & & & 1 & - \\
 & 1 & - & & - & 1 & & - & 1 & & & \\
 & & & - & & 1 & 1 & & - & - & & 1 \\
 & & & - & & 1 & - & 1 & & 1 & - &
\end{bmatrix}
$$

Matrices	Mult.	0	1	2	3	4	5	6
E_1	12	115	40	10	0	0	0	0
E_2	4	125	30	8	2	0	0	0
	8	124	33	5	3	0	0	0
$(E_2)^T$	4	117	38	8	2	0	0	0
	8	112	47	5	1	0	0	0
E_5	12	115	40	10	0	0	0	0
E_{14}	12	148	0	16	0	1	0	0
$(E_{14})^T$	12	112	48	4	0	1	0	0
G_2	4	125	32	6	0	2	0	0
	8	122	36	6	0	1	0	0

尚 E_1とE_5は3行のgeneralized inner productの絶対値の分布を考える事により同値でない事がわかる。

結果2。 位数12，ウェイト7の Weighing 行列の同値でないものの個数は3。行列及びそのG-表は以下の通り。

$$A_1=\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&&&&&\\
1&1&1&-&-&-&&1&&&&\\
1&&&&&&-&-&1&1&1&1\\
&&&&&1&-&1&1&1&-&-\\
&1&&1&-&&-&-&-&&-&\\
&&1&-&1&&-&-&&-&&-\\
1&-&&&-&1&&&-&&1&-\\
1&-&&&1&-&&&-&1&-&\\
1&&-&-&&1&&&&-&-&1\\
1&&-&1&&-&&&1&-&&-\\
&1&-&-&&&1&-&&1&&-\\
&1&-&&1&&-&1&-&&1&
\end{bmatrix}
\qquad
A_3=\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&&&&&\\
1&-&&&&&&1&1&1&1&1\\
1&&1&-&-&&&1&-&-&&\\
1&&-&1&&-&&&-&&1&-\\
1&&-&&1&&-&&&-&-&1\\
1&&&-&&-&1&-&&1&-&\\
1&&&&-&1&-&-&1&&&-\\
&1&1&&&-&-&-&&&1&1\\
&1&-&-&&&1&&1&-&1&\\
&1&-&&-&1&&&-&1&&1\\
&1&&1&-&-&&1&1&&-&\\
&1&&-&1&&-&1&&1&&-
\end{bmatrix}$$

$$A_8=\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&&&&&\\
1&-&&&&&&1&1&1&1&1\\
1&&1&-&-&&&1&-&-&&\\
1&&-&-&&1&&-&&&1&-\\
1&&-&&&-&1&&1&-&-&\\
1&&&1&-&&-&&&1&-&-\\
1&&&&1&-&-&-&-&&&1\\
&1&1&&-&-&&-&1&&1&\\
&1&-&1&&&-&1&&-&1&\\
&1&-&&-&&1&&-&1&&1\\
&1&&-&1&-&&1&&1&&-\\
&1&&-&&1&-&&1&&-&1
\end{bmatrix}$$

Matrices	Mult.	0	1	2	3	4	5	6	7
A_1	12	77	64	22	0	2	0	0	0
A_3	12	45	100	20	0	0	0	0	0
A_8	12	45	100	20	0	0	0	0	0

結果3。 位数12，ウェイト8の Weighing 行列の同値でないものの個数は6。行列及びそのG-表は以下の通り。

$$A_1=\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&&&&\\
1&1&1&1&-&-&-&-&&&&\\
1&1&-&-&1&1&-&-&&&&\\
1&1&-&-&-&-&1&1&&&&\\
1&-&1&-&&&&&1&1&1&1\\
-&1&-&1&&&&&1&1&1&1\\
1&-&-&1&&&&&-&-&1&1\\
-&1&1&-&&&&&-&-&1&1\\
&&&&1&-&1&-&-&1&-&1\\
&&&&-&1&-&1&-&1&-&1\\
&&&&1&-&-&1&1&-&-&1\\
&&&&-&1&1&-&1&-&-&1
\end{bmatrix}
\qquad
A_3^*=\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&&&&\\
1&1&1&1&-&-&-&-&&&&\\
1&1&-&-&1&1&-&-&&&&\\
1&1&-&-&-&-&1&1&&&&\\
1&-&1&-&&&&&1&1&1&1\\
-&1&&&1&-&&&-&1&1&1\\
&&-&1&&&-&1&1&-&1&1\\
&&&&-&1&1&-&-&-&1&1\\
&&-&1&&&1&-&1&1&-&1\\
&&&&-&1&-&1&-&1&-&1\\
-&1&1&-&&&&&1&-&-&1\\
1&-&&&1&-&&&-&-&-&1
\end{bmatrix}$$

$$A_6=\left[\begin{array}{cccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&&&&\\
1&1&1&1&-&-&-&-&&&&\\
1&1&-&-&1&1&-&-&&&&\\
1&-&1&-&1&-&1&-&&&&\\
1&-&-&1&&&&&1&1&1&1\\
-&1&&&&&1&-&-&1&1&1\\
&&1&-&-&1&&&1&-&1&1\\
&&&&1&-&-&1&-&-&1&1\\
-&&1&&1&&-&&1&1&-&1\\
1&&&-&-&&&1&-&1&-&1\\
&1&-&&&-&1&&1&-&-&1\\
&-&&1&&1&&-&-&-&-&1
\end{array}\right]
\qquad
A_7=\left[\begin{array}{cccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&&&&\\
1&1&1&1&-&-&-&-&&&&\\
1&-&&&1&1&-&-&1&1&&\\
-&1&&&1&-&1&-&1&1&&\\
&&1&-&1&-&-&1&&&1&1\\
&&1&-&-&1&1&-&&&1&1\\
&&-&1&-&&&1&1&1&1&1\\
&&-&1&1&&&-&-&-&1&1\\
-&1&&&&1&-&&-&1&-&1\\
1&-&&&&-&1&&-&1&-&1\\
1&1&-&-&&&&&1&-&-&1\\
-&-&1&1&&&&&1&-&-&1
\end{array}\right]$$

$$A_8=\left[\begin{array}{cccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&&&&\\
1&1&1&1&-&-&-&-&&&&\\
1&-&&&1&1&-&-&1&1&&\\
-&1&&&1&-&1&-&1&1&&\\
-&1&1&-&&1&-&&&&1&1\\
1&-&1&-&&-&1&&&&1&1\\
&&-&1&-&&&1&1&1&1&1\\
&&-&1&1&&&-&-&-&1&1\\
1&1&-&-&&&&&-&1&-&1\\
-&-&1&1&&&&&-&1&-&1\\
&&&&1&-&-&1&1&-&-&1\\
&&&&-&1&1&-&1&-&-&1
\end{array}\right]$$

Matrices	Mult	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A_1	12	144	0	0	0	20	0	0	0	1
A_3	4	108	0	48	0	8	0	0	0	1
	8	114	0	40	0	9	0	2	0	0
A_3^T	4	111	0	40	0	14	0	0	0	0
	8	123	0	28	0	12	0	2	0	0
A_6	4	81	32	0	0	12	0	0	0	0
	8	72	48	36	0	5	4	0	0	0
A_7	4	102	0	56	0	5	0	2	0	0
	8	103	0	53	0	8	0	1	0	0
A_8	12	104	0	50	0	11	0	0	0	0

結果4。位数12, ウェイト9の Weighing 行列の同値でないものの個数は4。行列及びそのG-表は以下の通り。

$$A_1=\left[\begin{array}{cccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&\\
1&1&1&1&-&-&-&-&&1&&\\
1&1&-&-&1&1&-&-&&&1&\\
1&1&-&-&-&-&1&1&&&&1\\
&-&1&-&1&-&&&1&1&1&1\\
-&&-&1&-&1&&&1&1&1&1\\
1&-&&1&&&1&-&-&-&1&1\\
-&1&1&&&&-&1&-&-&1&1\\
1&-&&&&1&-&1&-&1&-&1\\
-&1&&&1&&1&-&-&1&-&1\\
&&1&-&-&1&&-&1&-&-&1\\
&&-&1&1&-&-&&1&-&-&1
\end{array}\right]
\qquad
A_3=\left[\begin{array}{cccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&\\
1&1&1&1&-&-&-&-&&1&&\\
1&1&-&-&1&1&-&-&&&1&\\
1&-&1&-&1&-&1&-&&&&1\\
-&&&&1&-&-&1&1&1&1&1\\
-&&&1&&1&1&-&-&1&1&1\\
1&-&-&1&-&&&&1&-&1&1\\
&1&1&-&-&&&1&-&-&1&1\\
&1&-&-&-&&1&&1&1&-&1\\
1&-&&&&1&-&1&-&1&-&1\\
-&&1&&&1&-&-&1&-&-&1\\
&1&-&1&1&-&&&-&-&-&1
\end{array}\right]$$

$$A_4 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & & 1 & & \\
1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & & & 1 & \\
1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & & & & 1 \\
- & & & & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & - & & & - & 1 & & 1 & - & 1 & 1 & 1 \\
- & & 1 & & - & 1 & & - & 1 & - & 1 & 1 \\
 & 1 & - & 1 & & - & 1 & & - & - & 1 & 1 \\
 & 1 & - & - & - & & 1 & & 1 & 1 & - & 1 \\
- & & & 1 & 1 & 1 & & - & - & 1 & - & 1 \\
1 & - & - & 1 & & & - & & 1 & - & - & 1 \\
 & 1 & 1 & - & & & - & 1 & - & - & - & 1
\end{bmatrix} \qquad
A_9 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & & 1 & & \\
1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & & & 1 & \\
1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & & & & 1 \\
1 & - & - & & - & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
- & & & 1 & & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 \\
- & & & 1 & 1 & - & - & & 1 & - & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & - & - & & & 1 & - & - & 1 & 1 \\
- & & 1 & - & & 1 & - & & 1 & 1 & - & 1 \\
 & 1 & - & & 1 & - & & 1 & - & 1 & - & 1 \\
 & 1 & - & & - & & 1 & - & 1 & - & - & 1 \\
1 & - & & 1 & & 1 & - & & - & - & - & 1
\end{bmatrix}$$

Matrices	Mult.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_1	12	48	32	64	0	20	0	0	0	1	0
A_3	12	55	12	72	14	6	6	0	0	0	0
A_4	12	55	16	72	8	6	8	0	0	0	0
A_9	12	73	0	48	32	12	0	0	0	0	0

結果5。位数12, ウェイト10の Weighing 行列の同値でないものの個数は4。行列及びそのφ-表は以下の通り。

$$A_1 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & & \\
 & 1 & 1 & - & - & & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 \\
1 & & - & 1 & - & 1 & & - & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & - & & - & 1 & 1 & - & & - & 1 & 1 & 1 \\
- & 1 & - & & 1 & - & 1 & - & & 1 & 1 & 1 \\
- & - & 1 & 1 & & - & - & 1 & 1 & & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & - & - & & - & - & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & & - & 1 & - & - & & 1 & - & 1 & - & 1 \\
1 & - & & - & 1 & - & 1 & & 1 & - & - & 1 \\
- & 1 & - & & 1 & 1 & - & 1 & & - & - & 1 \\
- & - & 1 & 1 & & 1 & 1 & - & - & & - & 1
\end{bmatrix} \qquad
A_4^* = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & & \\
 & 1 & 1 & - & - & & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 \\
1 & & - & 1 & - & 1 & & - & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & - & & - & 1 & 1 & - & & - & 1 & 1 & 1 \\
- & 1 & - & & 1 & - & 1 & - & & 1 & 1 & 1 \\
- & - & 1 & 1 & & - & - & 1 & 1 & & 1 & 1 \\
 & 1 & - & 1 & - & & - & 1 & - & 1 & - & 1 \\
1 & & - & - & 1 & - & & 1 & 1 & - & - & 1 \\
- & - & & 1 & 1 & 1 & 1 & & - & - & - & 1 \\
1 & - & 1 & & - & - & 1 & - & & 1 & - & 1 \\
- & 1 & 1 & - & & 1 & - & - & 1 & & - & 1
\end{bmatrix}$$

$$A_8 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & & \\
 & 1 & 1 & - & - & & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 \\
1 & & - & 1 & - & 1 & & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & - & & - & 1 & 1 & - & & 1 & - & 1 & 1 \\
- & - & 1 & & 1 & - & 1 & - & & 1 & 1 & 1 \\
- & 1 & - & 1 & & - & - & 1 & 1 & & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & - & - & & - & - & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & & - & - & 1 & - & & 1 & - & 1 & - & 1 \\
1 & - & & 1 & - & - & 1 & & 1 & - & - & 1 \\
- & 1 & - & & 1 & 1 & 1 & - & & - & - & 1 \\
- & - & 1 & 1 & & 1 & - & 1 & - & & - & 1
\end{bmatrix}$$

Matrices	Mult.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_1	12	80	0	40	0	40	0	0	0	5	0	0
A_4	12	100	0	24	0	24	0	16	0	1	0	0
A_4^T	12	80	0	40	0	40	0	0	0	5	0	0
A_8	12	80	0	32	0	32	0	8	0	1	0	0

参考文献

[1] H.C. Chan, C.A. Rodger and J. Seberry, On inequivalent weighing matrices, Ars Combinatoria, 21-A (1986), 299-333.

[2] J. Coopen, J. Milas and W.D. Wallis, Hadamard equivalence, Vol 686 (1976), 126-135, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[3] A.V. Geramita and J. Seberry, "Orthogonal Designs: Quadratic Forms and Hadamard Matrices", Marcel Dekker, New York-Basel, 1979.

[4] Q.M. Husain, On the totality of the solutions for the symmetric incomplete block designs: $\lambda=2$, $k=5$ or 6, Sankyā 7 (1945).

[5] H. Kimura and H. Ohmori, Construction of Hadamard Matrices of Order 28, Graphs and Combinatorics 2 (1986), 247-257.

[6] H. Ohmori, On the classifications of weighing matrices of order 12 (to appear).