

Gauss 型確率場の変分

名古屋大学 飛田武幸 (Takeyuki HIDA)

§1. 序

多次元パラメータをもつ Gauss 型確率場の研究には、種々な方法が試みられているが、ここでは次のような方法を提唱したい。

- i) パラメータを低次元の *sub-manifold* に制限して得られる確率場、さらにそのような場の族を考える。特に曲線をとって考えたとき、通常の Gauss 過程が得られ、標準表現などの既存の研究方法を利用することができる。
- ii) 上のようにして得られた確率場の族において、*sub-manifold* を動かしてみると、従属性の変化において新たな視点を見出すことができる。このとき変分法の古典論の一つの研究手段を与えている。
- iii) さらに与えられた確率場から線型演算によって、*sub-manifold* をパラメータとする場を構成し、ii) と同様の

アプローチを試みる。

上のような立場から、多次元パラメータの Lévy の Brown 運動, Wiener 過程, Ornstein-Uhlenbeck 過程等の研究において興味ある事実が見出されており (本報告集の中の野田, $S_i S_i$ の論文, 及び文献 [5], [6] 参照), 今後の一般論の発展が期待される。

このような目標に対する我々の試みは, ホワイトノイズ解析の一環として位置づけることができる。具体的には次のような展開となる。

まず §2 で R^d -パラメータのホワイトノイズを準備し, その線型汎関数として表される Gauss 型確率場を考察する。この場合, いわゆる ϕ -変換によって, ランダムな汎関数が R^d 上の C^∞ -級の関数の汎関数に移されて, 古典関数解析の適用を可能にしている。

いま, $\mathcal{C} = \{C; \text{単位円 } S^1 \text{ と } C^\infty\text{-級微分同相な閉曲線}\}$ とし, C をパラメータにもつ Gauss 型確率場 $X(C)$ を考之る。曲線 C が \mathcal{C} 内を動いたときの $X(C)$ の変化, 特にその従属性の推移に着目したい。一般論は困難で, 特別な場合 (例之は §4, 2), また文献 [5] など) に興味がある。

特に \mathbb{C} の部分族 $\mathcal{S} = \{ \mathbb{R}^2 \text{ 内の円周} \}$ ととって, C が \mathcal{S} 内を動くとしたとき, 無限次元回転群のある部分群が有効に用いられて (§4, 1), $X(C)$ の変分 $\delta X(C)$ の具体的な形を与えられることができる。このとき円周をパラメータ空間に与え, singularity のある Gauss 型の確率変数系が出現する。そして既製の取扱法では御しきれない興味深い対象となっている。

また §4, 2) で示すように, Green 関数についての諸結果, 特に変分, を用いて, Lévy の infinitesimal equation のアイディアの一端を確率場において見出すことができる。この観点は, 今後の一般論に向けた, 一つの礎石となると考えられ, 大いに注目したい事実である。

§2. ホワイトノイズと Gauss 型確率場

次のような Gel'fand triple から出発する:

$$E \subset L^2(\mathbb{R}^d) \subset E^*$$

ここで E は適当な核型空間, E^* は E の共役空間である。 E と

E^* と結ぶ双一次形式は記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す: $\langle x, \xi \rangle$, $x \in E^*$,

$\xi \in E$. 超円数の空間 E^* 上の確率測度 μ で, その特性汎関数

$C(\xi)$, $\xi \in E$, が $\exp[-\frac{1}{2}\|\xi\|^2]$ であるものを ホワイトノイズ

測度 といい、測度空間 (E^*, μ) を ホワイトノイズ と呼ぶ。 R^d はそのパラメータ空間である。

R^d 内で S^{d-1} と C^∞ 級微分同相写曲面 C をとる。 C は良い解析的構造をもつので、それをパラメータ空間にもつホワイトノイズ測度 μ_C を定義することができる。これは μ の制限とも考えることができ、 C を種々に動かすとき consistent な測度の族 $\{\mu_C\}$ が与えられる。

もとのホワイトノイズに戻り、ヒルベルト空間 $(L^2) = L^2(E^*, \mu)$ を考えよう。 ξ を固定したとき $\langle x, \xi \rangle$ は x の汎関数とみて (L^2) の要素である。これはまた確率空間 (E^*, μ) 上の Gauss 型確率変数で、その分布は $N(0, \|\xi\|^2)$ である。そこで $\{\langle x, \xi \rangle ; \xi \in E\}$ の張る (L^2) の部分空間 \mathcal{N}_1 を構成すると、 \mathcal{N}_1 は Gaussian system である。

(L^2) の要素 $\Phi(x)$ の \mathcal{S} -変換 は次式で与えられる：

$$(2.1) \quad (\mathcal{S}\Phi)(\xi) = \int \Phi(x+\xi) d\mu(x), \quad \xi \in E.$$

$(\mathcal{S}\Phi)(\xi)$ を $U(\xi)$ と書き、 Φ の U -functional と呼ぶ。この変換 \mathcal{S} を \mathcal{N}_1 に制限したとき、 U -functional は常に

$$(2.2) \quad U(\xi) = \int_{R^d} F(u) \xi(u) du, \quad F \in L^2(R^d),$$

と表すことができる、同型対応

$$(2.3) \quad \mathcal{N}_1 \cong L^2(R^d) \quad \text{under } \mathcal{S}.$$

が証明される。

パラメータ空間 C にとりて、確率測度 μ_C を考えても、同様にして、Gaussian system $\mathcal{N}_1(C)$ が得られ (2.2) に対応する U -functional を用いた $\mathcal{N}_1(C)$ の元重 $(C; x)$ の表現は

$$(2.4) \quad U(C; \xi) = \int_C F(s) \xi(s) ds$$

と書くことができる。ここで $\xi(s)$ は $\xi(u)$ の C 上の制限、 ds は C 上の面積要素である。ここで C を動かしたとき、 $\{重(C; x)\}$ は C をパラメータとする Gauss 型の確率場である。従ってその変分 $\delta重(C; x)$ を見るのは自然である。重自身はランダムな汎関数であり、直接 $\delta重$ を扱うには準備が必要である。しかし、実際は δ -変換を用いて (2.4) の形の汎関数の変分を扱えばよい。ただし、 F が一般には C に依存するので安易な計算とは限らないことを注意する。

§3. 関数解析よりの準備

1) 古典的変分の理論より、直接関係のある事実を列挙しておこう。

i) Lévy の関数解析より ([2] 参照, 特に第 I 部)

$d=2$ のとき、 R^2 の領域、或はその境界の汎関数が対象となる

る。典型的な例をあげよう。

a). G は領域 ($\subset \mathbb{R}^2$). その境界 $C = \partial G$ は十分滑らかなものとする。たとえは $C \in \mathcal{C}^1$ とする。

$$U(C) = \iint_G F(u, v) \, du \, dv$$

たゞし

$$(3.1) \quad \delta U = \int_C F(s) \delta n(s) \, ds, \quad ds \text{ は } C \text{ 上の長さ.}$$

b). C は S^1 と微分同相で

$$U(C) = \int_C G(s) \, ds, \quad G(s) \text{ は } G(u, v)|_C \text{ を表す,}$$

たゞし

$$(3.2) \quad \delta U(C) = \int_C \left(\frac{\partial G}{\partial n} - \kappa G \right) \delta n(s) \, ds, \quad \kappa: \text{曲率}$$

ただし $\frac{\partial}{\partial n}$ は外向きの法線微分を表す。

c). C は上と同じ。

$$U(C) = \int_C F(C; s) G(s) \, ds$$

たゞし ([6] 参照)

$$(3.3) \quad \delta U(C) = \int_C \left\{ \delta F(C; s) - \kappa F(C; s) \delta n(s) \right\} G(s) \, ds \\ + \int_C F(C; s) \frac{\partial}{\partial n} G(s) \delta n(s) \, ds.$$

ii) Hadamard equation. C は前出の C を動くものとする. C に対する (ラプラシアンに関する) Green 関数を $g(z, y; C)$ とかく. C の微小変化による g の変化は, 周知のように次式で与えられる.

$$(3.4) \quad \delta g(z, y; C) = -\frac{1}{2\pi} \int_{t \in C} \frac{\partial g(t, z; C)}{\partial n_t} \frac{\partial g(y, t; C)}{\partial n_t} \delta n(s_t) ds_t.$$

この公式の一般化には種々の試みがある. 例としてラプラシアン Δ の代りに Δ^2 をとった 2 次の Green 関数 $G(z, y; C)$ の場合は

$$(3.5) \quad \delta G(z, y; C) = \frac{1}{8\pi} \int_{t \in C} \Delta_t G(z, t; C) \Delta_t G(t, y; C) \delta n(s) ds, \quad (\Delta = \Delta_t).$$

となる, 等が知られている.

2) 回転群 $O(E)$

本節点に与った Gelfand triple のメンバー E とし

$$(3.6) \quad E = \left\{ \xi \in C^\infty(\mathbb{R}^d); (w\xi)(u) = \xi\left(\frac{u}{|u|^2}\right) \frac{1}{|u|^d} \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \right\}$$

を選ぶ. E の回転の全体 $O(E)$ は群となる. これを E の回転群という.

任意の $g \in O(E)$ に対して, その共役変換 g^* は E^* 上に働き, μ を不変にする:

$$(3.7) \quad g^* \cdot \mu = \mu.$$

この事実は、回転群がホワイトノイズ解析において重要な役割を果たすであろうことを示唆している。実際これと実証する多くの結果が得られている。

$O(E)$ では、それぞれの役割を担ったいくつかの部分群が知られている。ここでは、ホワイトノイズのパラメータ空間 R^d の変換によって得られる E の回転を考之、それらから作られる、いくつかの1径数部分群に着目しよう。それらに列挙すると

i) Shifts $\{S_t^j\}$, $j=1, 2, \dots, d$.

$$(S_t^j \xi)(u) = \xi(u - te_j), \quad t \in R^1.$$

ただし、 e_1, \dots, e_d は R^d の座標ベクトル。

ii) Isotropic dilation $\{\tau_t\}$.

$$(\tau_t \xi)(u) = \xi(e^t u) e^{td/2}, \quad t \in R^1.$$

iii) R^d の回転 $SO(d)$ から引き起こされる $\xi \in E$ の変換。

$\binom{d}{2}$ 個の1径数群から生成される

iv) Special conformal transformations $\{K_t^j\}$, $j=1, 2, \dots, d$.

$$K_t^j = w S_t^j w,$$

ただし、 w は (3.6) で用いた reflection を表す。

上記 i) ~ iv) に挙げた全1径数部分群の生成する $O(E)$ の部分群を $C(d)$ とかく。それは $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ 次元の Lie 群とみなすことができる。

$$(3.8) \quad C(d) \cong SO(d+1, 1)$$

が示される ([4]).

また, 明らかに $C(d)$ の各元を定義する R^d の変換の全体を $\tilde{C}(d)$ とかくと

$$(3.9) \quad \tilde{C}(d) \cong C(d).$$

特に $d=2$ のとき, $\tilde{C}(2)$ は円の族 \mathcal{S} を不変にし, かつ transitive に働くことがわかる.

§4 変分問題

Gauss 型確率場の変分について, 典型的な 2 例を紹介する. 詳細は [5] に譲り, ここではアイティアのみの説明にとどめておく.

1) R^2 をパラメータ空間にもつ Gauss 型確率場 $X(t)$, $t \in R^2$, が与えられたとし, これから

$$(4.1) \quad X(C) = \int_C F(s) X(s) ds, \quad C \in \mathcal{S},$$

を定義する. この $X(C)$ の変分を問題にしない. 但し, C の変形は $\tilde{C}(2)$ のみによるものとする. また $X(s)$ はホワイトノイズによる空間 \mathcal{H}_1 で実現され, \mathcal{S} -変換を通して, 古典的変分法が適用できるものと仮定しておく.

さて、実際は $\delta X(C)$ を計算するにあたっては、(4.1) における ds が $\tilde{C}(2)$ の元によつて、どのように変化するかを見なければならぬ。

i) Shift と R^2 の回転では ds は変化しない。

ii) Isotropic dilation の無限小変換では

$$ds \longrightarrow ds' = (1 + dt) ds.$$

iii) Special conformal transformation の場合

\tilde{K}_t^1 の無限小変換では

$$ds \longrightarrow ds' = ds + 4u \left(\frac{du}{ds} \right)^2 dt ds$$

\tilde{K}_t^2 については

$$ds \longrightarrow ds' = ds + 4v \left(\frac{dv}{ds} \right) dt ds$$

となる。ただし、 \hat{K}_t^j は K_t^j に対応する R^2 の変換を表し、 (u, v) は R^2 の座標を表す。

上記 6 個の無限小変換からなる generators を α_j , $j=1, 2, \dots, 6$, と書き、対応する ds の変化を $\delta_j(ds)$ で、また C と $C + \delta C$ との差を $\delta_j(s)$ で表せば

定理 $X(C)$ の変分 $\delta X(C)$ は

$$(4.2) \quad \delta X(C) = \sum_{j=1}^6 dt_j \int_C \{ \alpha_j(FX)(s) \delta_j(s) ds + (FX)(s) \delta_j(ds) \}$$

で表わされる。

[註] 通常 $Gauss$ 過程 $X(t)$, $t \in R^1$, に対して dt 間の

変分 $\delta X(t)$ を考へるのと同様に, (4.1) による例では, C を変数, あるいはパラメータと考へて, 変分 $\delta X(C)$ の意義が理解される. また $C(2)$ のユニタリ表現を $L^2(\mathbb{R}^2)$ で考へるとき, 簡単な計算で Casimir 作用素が定数になることがわかる. これは $X(C)$ に対する標準表現を定義しようとするとき, 一つのヒントになるであろう.

2). Green 関数の方法.

同じく, パラメータ空間は \mathbb{R}^2 とする. \mathcal{H}_1 の元は

$$(4.3) \quad U(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} F(u) \xi(u) du, \quad F \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

なる表現をもつ ((2.2) より). 領域 G をとり, F が $C = \partial G$ に対する Green 関数の場合を考へよう:

$$(4.4) \quad U(C; \xi, \zeta) = \int_G g(z, u; C) \zeta(u) du$$

2次元パラメータホワイトノイズを考へるとき, これは \mathcal{H}_1 の元

$$(4.5) \quad X(C; \Sigma, \alpha) = \int_G g(z, u; C) \alpha(u) du, \quad \alpha \in E^+$$

の U -functional に合っている. Green 関数の性質から

$$\Delta_z U(C; \Sigma, \zeta) = \zeta(\Sigma).$$

これは 形式的な計算

$$(4.6) \quad \Delta_z X(C; z, x) = x(z)$$

z を正当化するものがある。 C を固定して、 $z \in G$ をパラメータとする確率場として $\{X(C; z, x); z \in G\}$ を与えるとき、平均値は 0、共分散関数が

$$\Gamma(z, z') = \int_G g(z, u; C) g(z', u; C) du$$

である Gauss 型のものがある。 それに対しては (4.6) が示すように、ラプラス変換によつて、innovation の如き、ホワイトノイズが取り込まれることになる。

一方、 z を固定したとき

$$(4.7) \quad \delta X(C) = \int_G \delta g(z, u; C) x(u) du \\ + \int_C \left\{ \frac{\partial}{\partial n} g(z, s; C) \cdot x(s) + g(z, s; C) \frac{\partial}{\partial n} x(s) \right\} \times \delta n(s) ds$$

となるが、 δg は、§3. 1), ii) の (3.4) で与えられており、従つて $\delta X(C)$ は具体的に与えられることになり得る。但し、i) のときも同じことであるが $X(s)$ や $x(s)$ などの法線微分の系を、確率超過程のように考へようとする場合は、さらに深い考察を必要とすることを注意しておきたい。

[文 献]

- [1] P. Lévy, Sur la variation de la distribution de l'électricité sur un conducteur dont la surface se déforme, Bull. Soc. mathématique de France, 46 (1918), 35-68.
- [2] _____, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars, Paris, 1951.
- [3] T. Hida, Brownian motion, (in Japanese) Iwanami, 1975; English edition Springer-Verlag, New York, 1980.
- [4] _____, K.-S. Lee and S.-S. Lee, Conformal invariance of white noise, Nagoya Math. J. 98 (1985), 87-98.
- [5] _____, and Si Si, A variational calculus for Gaussian random fields, to appear.
- [6] Si Si, A note on Lévy's Brownian motion, Nagoya Math. J. 108 (1987), 121-130; 同 Part II, Nagoya Math. J. 114 to appear in 1989.