

Distance Formulae and Reflexivity in Operator Algebras

新潟大理 齋藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)

自己共役でない部分環の研究は 1960 年代以降、多くの研究者によってなされている。それは、正規でない作用素の構造研究と関連して発展し、現在では作用素環の 1 つの分野として発展している。その中で、多くの自己共役でない部分環、例えば、Nest 環、triangular 環、subdiagonal 環、reflexive 環など、多くのものがあり、Arveson の CBMS Lecture Note [4] によくまとめられている。そこで、ここでは、reflexive 環と距離公式に注目して、最近の結果までをまとめる事を目的とする。

reflexive 環に対する距離公式に関する問題は最近の十数年間に多くの研究者によって、研究され発展している。この問題への関心は Arveson [3] から生じた。即ち、 H を可分な Hilbert 空間とし、 A を Nest 環とする。この時、任意の $T \in L(H)$ に対して、

$$d(T, A) = \sup \{ \| (1-P)TP \| : P \in \text{Lat}(A) \}$$

が成り立つ。但し、 $d(T, A)$ は T と A との距離、 $\text{Lat}(A)$ は A -不変な H の部分空間とする。この結果は違った方法で Lance [24] 及び、Power [32] によって示された。この公式は Nest 環に対する Compact Perturbation と similarity を含む問題の研究に有用である。Nest 環は reflexive であることから、reflexive 環に対して成り立つのかどうか興味のある問題である。即ち、任意の $T \in L(H)$ に対して

$$d(T, A) \leq K \sup\{\|(1-P)TP\| : P \in \text{Lat}(A)\}$$

を満たす $K(>0)$ が存在するか? [22]において、このような $K(>0)$ が存在しない reflexive 環の例が示され、更に、[14]で Davidson と Power によって、この性質を持たない CSL 環の例が示された。そこで、この性質を持つ reflexive 環を Arveson によって、hyperreflexive 環と呼ばれている。

reflexive 環が自己共役の時、正確に von Neumann 環になる。そこで、全ての von Neumann 環が hyperreflexive かという問題があるが、現在まだ解けていない。この問題は C^* 環の微分子や準同型写像の $*$ -表現との相似性の問題と関係して興味のある問題である。

そこで、まず、2 節では reflexive 環と hyperreflexive 環の定義を述べ、その違いをその preannihilator の構造により説明する。3 節では、von Neumann 環がいつ hyperreflexive になるかを考える。更に、4 節では、自己共役でない reflexive 環の hyperreflexivity を考えると共に、作用素論との関係を考察する。

最近、Davidson [13] によって、Nest 環についての本が纏められた。興味のある方は参考されることを期待いたします。

2. reflexive 環と hyperreflexive 環

H を Hilbert 空間とし、 $L(H)$ を H 上の全ての有界線形作用素の全体とする。 A を $L(H)$ の σ -弱閉部分環とする。 $\text{Lat}(A)$ を H の全ての A -不変部分空間の全体とする。このとき、

$$\text{alg}(\text{Lat}(A)) = \{ T \in L(H) : (1-p)Tp = 0, \forall p \in \text{Lat}(A) \}$$

と定義する。

定義2.1. A を $L(H)$ の σ -弱閉部分空間とする。この時、 A が reflexiveであるとは、 $A = \text{alg}(\text{Lat}(A))$ である時を言う。

注意2.2. あらゆる von Neumann環は reflexive環である。なんとなれば、 $\text{Lat}(A)$ は丁度、 A の可換子環 A' の projectionの全体となるので、von Neumann環の double commutant Theoremより、 $T \in \text{alg}(\text{Lat}(A))$ ならば、 $T \in A$ が示せる。また、自己共役でない reflexive環の簡単な例を挙げよう。例えば、

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

は $L(\mathbb{C}^2)$ の reflexive環であり、また、

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

は reflexive環でない。

まず、 reflexive環の特徴付を preannihilatorにより示す。 $L(H)_*$ (簡単に L_*)を H 上の全ての σ -弱連続線形汎関数とする。この時、 L_* の全ての元 f は $f(B) = \text{tr}(CB)$ の形に書ける。但し、 tr は $L(H)$ 上の canonical traceであり、 C はトレースクラスの作用素で、 $\|f\| = \text{tr}(|C|)$ を満たす。 $(L_*)^* = L(H)$ であるので、 $B \in L(H)$ に対して、

$F_B(f) = f(B)$ ($B \in L_*$)と定義する。この時、 $\|F_B\| = \|B\|$ であり、

B より F_B の対応により、 $L(H)$ 上の σ -弱位相と L_* の共役空間の弱*

位相が同一視される。

今、 A を $L(H)$ の σ -弱閉部分空間とすると、

$$A_{\perp} = \{f \in L_* : f(a) = 0, \text{ for all } a \in A\}$$

と A のpreannihilatorを定義する。

定義2.3. f を L_* の任意の元とすると、 f に対応するトレイスクラ

スの作用素を C とする。このとき、 f がelementaryであるとは、 C が

rank 1 或は0であるときを言う。

この時、容易に、 f がelementaryであることと $f(a) = (ax, y)$ ($x, y \in H$)の形に書けることが同値になることが分かる。

定理2.4([25]). A を $L(H)$ の単位元を持つ σ -弱閉部分環とする。この時、 A がreflexiveであることと、 A_{\perp} が A_{\perp} の中に含まれるelementary functionalにより生成された閉部分空間になることが同値である。

証明. D を A_{\perp} の中に含まれるelementary functionalによって生成された閉部分空間とする。いま、 A をreflexive環と仮定する。 $D \subset A_{\perp}$ であることは明らかに成り立つので、 $D \neq A_{\perp}$ と仮定する。この時、

Hahn-Banach 拡張定理より $F_B(d)=0 (d \in D)$ かつ $F_B(f) \neq 0$ (ある $f \in A^\perp$)

となる $B \in (L_*)^*$ が存在する。この時、 $B \in \text{alg}(\text{lat}(A))$ である事を

示そう。 $p \in \text{Lat}(A) (p=0, 1)$ とする。 $x \in pH, y \in (1-p)H$ ($\|x\| = \|y\| = 1$) をとる。 $w_{x,y}(T) = (Tx, y)$ とおくと、 $a \in A$ ならば、

$$w_{x,y}(a) = (ax, y) = ((1-p)apx, y) = 0.$$

従って、 $w_{x,y} \in A^\perp$ であるから、 $w_{x,y} \in D$ 。よって、

$$(Bx, y) = w_{x,y}(B) = F_B(w_{x,y}) = 0.$$

これより、 $(1-p)Bp=0$ であるので、 $B \in \text{alg}(\text{lat}(A)) = A$ が示せる。一方 $F(f) \neq 0$ なる任意の $f \in A^\perp$ に対して、 $f(B) = F_B(f) = F(f) \neq 0$ 。従って、

$B \in (A^\perp)^\perp = A$ となるので、矛盾がでる。従って、 $D = A^\perp$ が示せる。

逆に、 $D = A^\perp$ と仮定する。このとき、 $B \in \text{alg}(\text{lat}A)$ ならば、 $B \in$

$(A^\perp)^\perp = A$ を示せば十分である。 A は σ -弱閉であるので、任意の $f \in$

A^\perp に対して、 $f(B) = 0$ 。そこで、 $D = A^\perp$ より、 $w_{x,y}(B) = 0 (\forall w_{x,y} \in A^\perp)$

を示せば十分。 $w_{x,y} \in A^\perp$ を固定する。 $P = P_{[Ax]}$ を $[Ax]$ の上への射影

作用素とする。 $P \in \text{lat}(A)$ で、 $1 \in A$ より、 $x = Px$ 。従って、任意の $a \in A$ に対して、 $(ax, y) = w_{x,y}(a) = 0$ 。そこで、 $y \perp [Ax] (= pH)$ 。よって、 $y =$

$(1-P)y$ 。そこで、

$$w_{x,y}(B) = (Bx, y) = (BPx, (1-P)y) = ((1-P)BPx, y) = 0.$$

従って、 $w_{x,y}(B)=0$.

q.e.d.

今、 A を $L(H)$ の σ -弱閉部分環とする。この時、任意の $T \in L(H)$ に対して、

$$d(T, A) = \inf \{ \|T - a\| : a \in A \}$$

により、 T より A の距離を定義する。この時、

$$\begin{aligned} \inf \{ \|T - a\| : a \in A \} &= \| [T] \| = \| F_{T|A_{\perp}} \| \\ &= \sup \{ |F_T(f)| : f \in A_{\perp}, \|f\| \leq 1 \}. \end{aligned}$$

従って、 $d(T, A) = \sup \{ \|f(T)\| : f \in A_{\perp}, \|f\| \leq 1 \}$ を得る。

一方、次の事が容易に成り立つ。任意の $B \in L(H)$ に対して、

$$(2.1) \quad \sup \{ \|(1-p)Bp\| : p \in \text{lat}(A) \} \leq d(B, A).$$

何となれば、 $B \in L(H)$ を固定する。この時、任意の $a \in A$ と任意の $p \in \text{lat}(A)$ に対して、

$$\|(1-p)Bp\| = \|(1-p)Bp - (1-p)ap\| \leq \|B - a\|$$

が成り立つので。

定義2.5. A を $L(H)$ のノルム閉部分環とする。 A を hyperreflexive であるとは、 $\sup \| (1-P)b_n p \| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ を満たす任意の $L(H)$ の列 $\{b_n\}$ に対して、 $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ を満たす A の列 $\{a_n\}$ が存在する。

容易に分かるように、 A がhyperreflexiveならば、reflexiveになり、自動的に、 A は弱閉になる。

今簡単のために、任意の $b \in L(H)$ に対して、

$$\alpha(b) = \sup\{\|(1-p)bp\| : p \in \text{lat}A\}$$

と $L(H)$ 上の半ノルムを定義する。この時、いつも、任意の $b \in L(H)$ に対して、 $\alpha(b) \leq d(b, A)$ が成り立つ。さらに、

定理2.6. A がhyperreflexiveであることと $L(H)$ 上の2つの半ノルム $\alpha(b)$ と $d(b, A)$ が同値である事が必要十分条件である。即ち、任意の $b \in L(H)$ に対して、

$$(2.2) \quad d(b, A) \leq K\alpha(b)$$

を満たす $K(>0)$ が存在することが必要十分条件である。

そこで、次の事が問題となるので、次節以降で考える。

問題2.7. あらゆるreflexive環はhyperreflexiveか？特に、全てのvon Neumann環はhyperreflexiveか？

問題2.8. (2.2)を満たす $K(>0)$ が存在するとき、その下限を $K(A)$ と置くとき、 $K(A)$ の大きさはどのくらいか？

次に、hyperreflexive環のpreannihilatorの構造を考える。

定理2.9([4, Theorem 7.4]). A を $L(H)$ の σ -弱閉部分環とする。この

時、 A が hyperreflexive環であるための必要十分条件は任意の $f \in A_{\perp}$

は $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ で各 f_n は A_{\perp} に含まれる elementary functionalで

$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty$ を満たすものに表せることである。

定理 2.4 より、 A が reflexive環ならば、 A_{\perp} は A_{\perp} に含まれる elementary functionalによって生成されるので、任意の $f \in A_{\perp}$ は $f =$

$\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ で各 g_n は A_{\perp} に含まれる elementary functionalの一次結合

で、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\| < \infty$ を満たすものである。従って、任意の $f \in A_{\perp}$ は

$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (f_n は A_{\perp} の elementary functional)と書ける。しかしな

がら、 $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty$ の条件は保証されない。この条件を満たすよ

うに f_n を取ることが出来れば、問題 2.7 は解決する。

3. von Neumann環と hyperreflexivity

A を $L(H)$ の selfadjoint reflexive環とする。即ち、 A を von Neumann環とする。この時、この節では、von Neumann環がいつ hyperreflexiveになるかを考える。序論でも触れたように、これが微分子のノルムと関係してくる。

定義3.1. δ を A より $L(H)$ への線形写像とする。この時、 δ が微分子であるとは、任意の $S, T \in A$ に対して、 $\delta(ST) = \delta(S)T + S\delta(T)$ を満たすときを言う。

今、 $T \in L(H)$ に対して、 $\Delta_T(S) = ST - TS (S \in A)$ と定義すると、 Δ_T は A より $L(H)$ への微分子になる。この形の微分子を inner という。[20, Lemma 1.2] から、任意の A から $L(H)$ への微分子はノルムの意味で連続になるのでその微分子のノルムを考えることができる。

命題3.2([35]). 任意の $b \in L(H)$ に対して、

$$\|\Delta_{b|A'}\| \leq 4 \sup\{\|(1-p)bp\| : p \in \text{lat}(A)\} \leq 2 \|\Delta_{b|A'}\|$$

証明。任意の $b \in L(H)$ に対して、

$$\begin{aligned} & 2 \sup_{p \in \text{lat}(A)} \|(1-p)bp\| \\ &= 2 \sup_{p \in \text{lat}(A)} (\max\{\|(1-p)bp\|, \|pb(1-p)\|\}) \\ &= 2 \sup_{p \in \text{lat}(A)} \|(1-p)bp - pb(1-p)\| = 2 \sup_{p \in \text{lat}(A)} \|pb - bp\| \\ &= \sup_{p \in \text{lat}(A)} \|(2p-1)b - b(2p-1)\| = \sup_{p \in \text{lat}(A)} \|\Delta_b(2p-1)\| \\ &\leq \|\Delta_{b|A'}\|. \end{aligned}$$

逆に、 $\sup_{p \in \text{lat}(A)} \|(1-p)bp\| = c$ とおく。この時、任意の $p \in \text{lat}(A)$ に対して、

$$\|\Delta_b(2p-1)\| = 2\|pb - bp\| \leq 2c.$$

K を A' の自己共約部分の単位球とする。この時、 K の端点の全体は、 $\{2p-1 : p \text{ は } A' \text{ の projection}\}$ となるので、

$$\|\Delta_{b|K}\| \leq 2c.$$

任意の $a \in (A')_1$ に対して、 $a = a_1 + ia_2$ ($a_1, a_2 \in K$) と書けるので、

$$\|\Delta_b(a)\| \leq \|\Delta_b(a_1)\| + \|\Delta_b(a_2)\| \leq 4c.$$

従って、命題を得る。

この様な微分子の研究は Kadison-Kastler [21], Johnson-Parrott [20] 及び Christensen [7], [8] 等に詳しく書かれている。微分子のノルムと A との距離の関係として、Johnson は [19] で次の問題を出している。

問題 3.3. A を $L(H)$ の von Neumann 環とする。この時、任意の $b \in L(H)$ に対して、 $(1/2)\|\Delta_{b|A'}\| \leq d(b, A) \leq K\|\Delta_{b|A'}\|$ を満たす $k(>0)$ が存在するか？

しかしながら、命題 3.2 より、問題 3.3 が成り立つことと、 A が hyperreflexive が同値になる事が分かる。更に、Christensen は次の事を示している。

定理 3.4 ([8, Theorem 3.1]). A を $L(H)$ の von Neumann 環とする。この時、次の事は同値である。

(1) A が hyperreflexive である。

(2) 任意の $b \in L(H)$ に対して、 $d(b, A) \leq K\|\Delta_{b|A'}\|$ を満たす $K(>0)$

が存在する。

(3) A' から $L(H)$ への任意の微分子は inner である。

(4) A' から $L(H)$ への任意の微分子は完全有界である。

今、 δ を A' より $L(H)$ への任意の微分子とする。この時、

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} x & \delta(x) \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x \in A'$$

と定義すると、 π は A' から $L(H \oplus H)$ への non-degenerate 表現となる。従って、Haagerup[18]により、この形の表現 π が $*$ -表現と相似であることと、 A が hyperreflexive が同値である事が解る。しかしながら、必要十分条件を並べても問題の解決にはならない。そこで、どんな von Neumann 環が hyperreflexive であるのか興味のある問題である。次の結果は Christensen による。

定理 3.5. A を separating vector を持つ von Neumann 環とする。この時、任意の $b \in L(H)$ に対して、

$$d(b, A) \leq 12 \|\Delta_{b|A'}\| \leq 48 \sup_{p \in \text{lat}(A)} \|(1-p)bp\|$$

が成り立つ。従って、 A は hyperreflexive であり、 $K(A) \leq 48$ である。

この定理より、 A が標準形 (Standard form) ならば、 A は hyperreflexive である。また、Rosenoer[35]により、 A' が properly infinite ならば、いつも separating vector が存在するので、 A は hyperreflexive であり、この時、 $K(A) \leq 6$ を満たす。また、 A が単射的 (injective) ならば、 $K(A) \leq 4$ であり、 A 或は A' が可換の時は、 $K(A) \leq 2$ が成り立つ。以上より、 A が separating vector を持たないときは

現在の所未解決である。

4. 自己共役でない reflexive 環

この節では、reflexive環が自己共役でない場合に付いて、距離公式との関係を考察する。その中で、reflexive環の2つの重要なクラスを定義する。

定義4.1. L を $L(H)$ の projection からなる族とする。この時、 L が subspace lattice であるとは、0と1を含む $L(H)$ の projection からなる強閉な束を言う。また、 P が nest であるとは、全順序である subspace lattice を言う。

P を nest とする。この時、

$$\text{alg}(P) = \{a \in L(H) : (1-p)ap = 0, (\forall p \in P)\}$$

と定義する。この $L(H)$ の σ -弱閉部分環を nest 環という。Loebl-Muhly[28]により、 $\text{alg}(P)$ は $L(H)$ 上の一係数同型群 $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ が存在して、

これより定義される解析的部分環となる。

更に、 L を subspace lattice とする。 L が CSL(commutative subspace lattice) であるとは、 L の元が互いに可換である時を言う。 L を CSL とするとき、 $\text{alg}(L) (= \{a \in L(H) : (1-p)ap = 0, (\forall p \in L)\})$ を CSL 環という。

容易に分かるように、nest環はCSL環であり、CSL環はreflexive環である。まず、Arveson[3]は次の結果を示した。

定理4.2. A をnest環とする。この時、任意の $b \in L(H)$ に対して、

$$d(b, A) = \sup_{p \in \text{lat}(A)} \|(1-p)bp\|$$

が成り立つ。また、この時、 $K(A)=1$ である。

問題2.7の解答として、Kraus-Larsonはhyperreflexiveでないreflexive環の例を[23]で示した。まず、

$$S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & -n(\lambda + \mu) \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

と置き、更に、

$$A_n = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 1 & S \\ 0 & \mu & 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}, S \in S_n \right\}$$

とする。この時、 $n > 3$ のとき、 A_n はhyperreflexive環で $K(A_n) >$

$(n/3)$ となる。そこで、 $A = \sum_{k=4}^{\infty} A_n$ 、 $H = \sum_{k=4}^{\infty} \oplus H_n$ ($H_n = \mathbb{C}^4$)

とすると、 A は $L(H)$ 上でhyperreflexive環でない。更に、Davidson-Power[14]でhyperreflexiveでないCSL環の例を示した。

次に、 $L(H)$ の元 T をとる。 $A(T)$ を T と 1 によって生成された $L(H)$ の σ -弱閉部分環とする。Sarason[37]によって、 T が正規作用素ならば、 $A(T)$ は reflexive 環であり、更に、Rosenroer[35]で $A(T)$ は hyperreflexive であり、 $K(A(T)) \leq 3$ であることが示された。Sarasonはまた、multiplicity one の片側シフト S とすると、 $A(S)$ は reflexive である事を示したが、 $A(S)$ が hyperreflexive であることは未解決であっ

たが、最近、Davidson[12]において、それを示した。実際、 $A(S)$ は解析的なToeplitz作用素全体からなり、 $L(H^2)$ のある極大可換部分環である。更に、 $K(A(S)) \leq 39$ である事を示した。また、未解決の問題としては、 T がsubnormalのとき、Oin-Thmoson[30]は $A(T)$ が reflexiveである事を示したが、 $A(T)$ はhyperreflexiveか？更に、 T がHypnormalのとき、 $A(T)$ はreflexiveか？

最後に、von Neumann環の解析的部分環に対する距離公式を示そう。 M をvon Neumann環とし、 $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を M 上の一径数同型群とする。 $H^\infty(\alpha)$ を α によって定義される解析的部分環とする。この時、 $\alpha_t = \text{ad}(W_t)$ で $W_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dp_s$ とする。この時、次の結果がある。

定理4.3([38]).上の条件を仮定する。もし M が単射的ならば、この時、任意の $x \in M$ に対して、

$$d(x, H^\infty(\alpha)) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \|(1-p_s)xp_s\|$$

しかしながら、最近、定理4.3は M が単射的でなくても成り立つことが示された(cf.[36])。

参考文献

- [1] N. T. Andersen, Compact perturbations of reflexive

- algebras, *J. Funct. Anal.*, 38(1980), 366-400.
- [2] N. T. Andersen, Similarity of continuous nests, *Bull. London Math. Soc.*, 15(1983), 131-132.
- [3] W. B. Arveson, Interpolation problems in nest algebras, *J. Funct. Anal.*, 20(1975), 208-233.
- [4] W. Arveson, Ten lectures on operator algebras, *CBMS Regional Conference Series 55*(AMS, 1984).
- [5] E. Azoff, K -reflexivity in finite-dimensional spaces, *Duke Math. J.*, 40(1973), 821-830.
- [6] H. Bercovici, C. Foias and C. Pearcy, Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory, *CBMS Regional Conference Series 56*(1985).
- [7] E. Christensen, Perturbations of operator algebras II, *Indiana Univ. Math. J.*, 26(1977), 891-904.
- [8] E. Christensen, Extensions of derivations II, *Math. Scand.*, 50(1982), 111-122.
- [9] E. Christensen, On non self-adjoint representations of C^* -algebras, *Amer. J. Math.*, 103(1981), 817-833.
- [10] K. Davidson, Commutative subspace lattices, *Indiana Univ. Math. J.*, 27(1978), 479-490.
- [11] K. Davidson, Similarity and compact perturbations of nest algebras, *J. Reine Angew. Math.*, 348(1984), 72-87.
- [12] K. Davidson, The distance to the analytic toeplitz operators, *Illinois J. Math.*, 31(1987), 265-273.
- [13] K. Davidson, Nest algebras, *Pitman Research Notes in*

Mathematics Series 191(1988).

- [14] K. Davidson and S. C. Power, Failure of the distance formula, *J. London Math. Soc.*, 32(1985), 157-165.
- [15] J. Erdos, Nonselfadjoint operator algebras, *Proc. Roy. Irish Acad.* 81(1981), 127-145.
- [16] T. Fall, W. Arveson and P. S. Muhly, Perturbations of nest algebras, *J. London Math. Soc.*, 1(1979), 137-150.
- [17] F. Gilfeather and D. Larson, Nest subalgebras of von Neumann algebras: commutants modulo compacts and distance estimates, *J. Operator Theory*, 7(1982), 279-302.
- [18] U. Haagerup, Solution of the similarity problem for cyclic representations of C^* -algebras, *Ann. of Math.*, 118(1983), 215-240.
- [19] B. E. Johnson, Characterization and norms on von Neumann algebras, *Lectures Note in Math.*, 725(1979), 228-236.
- [20] B. E. Johnson and S. K. Parrott, Operators commuting with a von Neumann algebra modulo the set of compact operators, *J. Funct. Anal.*, 11(1972), 39-61.
- [21] R. V. Kadison and D. Kastler, Perturbations of von Neumann algebras I, *Amer. J. Math.*, 94(1972), 38-54.
- [22] J. Kraus and D. Larson, Some applications of a technique for constructing reflexive operator algebras, *J. Operator Theory*, 13(1985), 227-236.

- [23] J. Kraus and D. Larson, Reflexivity and distance formulae, Proc. London Math. Soc., 53(1986),340-356.
- [24] E. C. Lance, Cohomology and perturbations of nest algebras, Proc. London Math. Soc., 43(1981), 334-356.
- [25] D. Larson, Annihilator of operator algebras, Topic in modern operator theory 6(1982), 119-130.
- [26] D. Larson, Nest algebras and similarity transformations Ann. of Math., 121(1985), 409-427.
- [27] D. Larson, Hyperreflexivity and a dual product construction, Trans. AMS, 294(1986),79-88.
- [28] R. I. LoebI and P. S. Muhly, Analyticity and flows in von Neumann algebras, J. Funct. Anal., 29(1978), 214-252.
- [29] A. Loginov and V. Sulman, Hereditary and intermediate reflexivity of W^* -algebras, Izv. Akad. Nauk SSSR, 39 (1975),1260-1273;Math. USSR-Izv., 9(1975), 1189-1201.
- [30] R. F. Olin and J. E. Thomson, Algebras of subnormal operators, J. Funct. Anal., 37(1980), 271-301.
- [31] F. Pop, Perturbations of nest-subalgebras of von Neumann algebras, preprint(1988).
- [32] S. Power, The distance to upper triangular operators, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 88(1980), 327-329.
- [33] J. Ringrose, On some algebras of operators, Proc. London Math. Soc., 15(1965),61-83.
- [34] J. Ringrose, On some algebras of operators II, Proc.

- London Math. Soc. 16(1966), 385-402.
- [35] S. Rosenoer, Distance estimates for von Neumann algebras, Proc. AMS, 86(1982), 248-252.
- [36] K. -S. Saito, The distance formulae for analytic subalgebras in von Neumann algebras, in preparation.
- [37] D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, Pacific J. Math., 17(1966), 511-517.
- [38] B. Solel, Distance formula for analytic operator algebras, Bull. London Math. Soc., 20(1988), 345-349.