数理解析研究所講究録
第674巻 1988年 68-78

高階の微分作用素の生成する半群

山形大.理
中里博 (Hiroshi Nakazato)

§1. 設定および基本的な例

G : Lie 群, K : G のコンパクト部分群 (例えば, $K=\{e\}$) とし,

G の等質 Riemann 空間 G/K への作用

$$G \curvearrowright G/K \qquad g\cdot hK = (gh)K, \quad g, h \in G$$

及び G の $C_0(G/K)$ への作用

$$G \curvearrowright C_0(G/K) \; ; \; (gf)(x) = f(g^{-1}x)$$
$$g \in G,\ f \in C_0(G/K),\ x \in G/K$$

を考える. ただし $C_0(G/K)$ は, G/K 上の複素数値連続関数で, 無限遠点で 0 となるもの全体とする. D を G/K 上の G ー不変(*)な微分作用素とする. ただし, D の定義域 $\mathcal{D}(D)$ は, G/K 上の無限回連続微分可能かつコンパクト台をもつ関数の全体 $C_c^\infty(G/K)$ とする.

[(*) 即ち. $g(Df) = D(gf)$, $\forall f \in C_c^\infty(G/K), \forall g\in G$]

《問》1. D は, どのような条件の下で, $C_0(G/K)$ における強連続一径数半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ の(前)生成

作用素となるか？　即ち，11つ

$$T_0 = I,\quad T_{t+s} = T_t \circ T_s,\quad t, s \geqq 0,$$

$$\| T_t f - f \|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{as } t \downarrow 0$$

$$\text{for } {}^\forall f \in C_0(G/K)$$

$$Df = s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \{ T_t f - f \} : {}^\forall f \in C_c^\infty(G/K)$$

かつ $\overline{D} = s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \{ T_t - I \}$ （定義域の一致を含めて）

となるか？

2．D が生成作用素である場合に，

$\{ \exp tD \}_{t \geqq 0}$ の基本解をどう求めるか？

次に，簡単な例を二つ考える

どちらも $G = \mathbb{R}$，$K = \{0\}$，$G/K = \mathbb{R}$ とする

① $D = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$

$$(T_t f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy \quad (t>0,\ x \in \mathbb{R})$$

$$f \in C_0(\mathbb{R})$$

基本解 $f_t(x)$ は

$$f_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\, e^{-\frac{ty^2}{2}}\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad (t>0) \quad \text{で}$$

与えられ，$f_t \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ $(t>0)$ であって

$$f_t(x) = t^{-\frac{1}{2}} f_1(t^{-\frac{1}{2}} x) \quad \left(\begin{matrix} t>0 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right) \text{ が成立する.}$$

② $D = -\dfrac{d^4}{dx^4}$ 　　$f \in C_0(\mathbb{R})$ に対し

$$(T_t f)(x) = (f * f_t)(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) f_t(y)\, dy$$

基本解 f_t は，$f_t(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} e^{-ty^4} dy$

$(t>0,\ x \in \mathbb{R})$ で与えられ，

(*) $f_t(x) = t^{-\frac{1}{4}} f_1(t^{-\frac{1}{4}} x)$ ，$^\forall t>0$，$^\forall x \in \mathbb{R}$

が成り立つ．f_1 は Schwartz 空間に属するから，

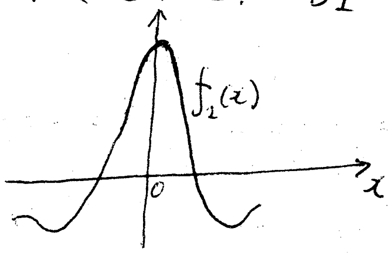
$f_1 \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ となり，さらに上記の(*)より

$\|f_t\|_{L^1} = \|f_1\| (<\infty)\ (^\forall t>0)$ となることが

わかる．$x (\in \mathbb{R}) \longrightarrow e^{-x^4}$ が $\mathbb{R}$ 上の正定値

関数ではないことから，f_1 が負の値も取ること

がわかる．



§2. Langlands の定理及びその一般化の限界

まず可微分多様体 M (n次元) 上の微分

作用素 (＝反変テンソル場) D を局所座標系

$(U, x_1, \cdots x_n)$ を用いて

$$D = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n \leqq m} a_{i_1, i_2, \cdots i_n}(x_1, x_2, \cdots x_n) \frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}}$$

と U 上で表示する．

ただし $a_{i_1 \cdots i_n}$ は U 上の C^∞ 級の複素数値関数とする。このとき、点 $(x_1, \cdots x_n)$ における D の主表象 principal symbol : $\sigma(D)(x)$ を $\sigma(D)(x : \xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$

$$= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=m} a_{i_1,\cdots i_n}(x_1, \cdots x_n)\sqrt{-1}^{\,i_1+i_2+\cdots+i_n}\,\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\cdots\xi_n^{i_n}$$

$(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n \in \mathbb{R})$ なる斉次多項式として定める。

定義. M 上の微分作用素 D に対して次の条件が成り立つとき、D は強楕円型である (strongly elliptic) という : m は偶数かつ 各 $x \in M$ に対し $^\exists \rho_x > 0$

$$\mathrm{Re}\ \sigma(D)(x : \xi_1, \cdots \xi_n) \geq \rho_x\,(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2)^{\frac{m}{2}}$$

$$\text{for } {}^\forall(\xi_1, \cdots \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

【R. P. Langlands の定理 ([1], [2])】

D が Lie 群 G 上の左不変な強楕円型偏微分作用素ならば、$-\overline{D}$ は $C_0(G)$ における強連続一径数半群 (さらに実はもっと強く、正則半群) の生成作用素となる。 //

この定理の系としてただちに次の結論が得られる。

系．D を Lie 群 G 上の左不変な強楕円型の偏微分作用素とする．このとき，D は $L^2(G, d\rho)$ において［ただし ρ は G 上の右不変 Haar 測度］

$$-\infty < {}^{\exists}M < \infty \ : \ \mathrm{Re}\,(D\xi, \xi)_{L^2(G)} \geq M(\xi, \xi)_{L^2(G)} \quad \text{for } {}^{\forall}\xi \in C_c^\infty(G)$$

を満たす．//

さて，上述の定理及び系の結論が成立するためには，D が強楕円型であることは必要であろうか？ 次のような例より必要条件ではないことがわかる．

《例》 G を 3 次元 Heisenberg 群とし，G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし，$\mathfrak{g}$ の基底 $\{X, Y, Z\}$：

$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = [Y, Z] = 0$ を取る．

このとき，

$$D = (-1)^n (X^2 + Y^2 + Z^2)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$D^\sim = (-1)^n (X^2 + Y^2)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

なる G 上の左不変微分作用素 D，$D^\sim$ を考える．D は強楕円型であるが，$D^\sim$ は強楕円型ではない．しかしながら，$-D$，$-D^\sim$ ともに $C_0(G)$ における強連続一径数半群を生成する（cf. ［4］）

ここで，Langlands 型の定理を成立させる十分条件の候補として，筆者は，次の 1°), 2°), 3°) を提案したい．

まず，G を Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 環，$\mathfrak{g}^*$ を実線形空間 $\mathfrak{g}$ の共役空間とし，$\mathfrak{g}$ の基底 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 及びその双対基底 $\{X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*\}$ を取る．G 上の左不変な m 階の微分作用素 D を

$$D = \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2, \cdots i_k \leq n \\ 0 \leq k \leq m}} a_{i_1, i_2, \cdots i_k} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}, \quad a_{i_1, \cdots i_k} \in \mathbb{C}$$

と表示する．ただし，各 $2 \leq k \leq m$ に対して

$$a_{i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \cdots, i_{\sigma(k)}} = a_{i_1, i_2, \cdots, i_k}$$

$\forall \sigma \in S_k$: (S_k は $\{1, 2, \cdots k\}$ の置換の全体)

とする．このとき，D の主表象 $\sigma(D)$ を $\mathfrak{g}^*$ 上の多項式関数として

$$\sigma(D)(\xi_1 X_1^* + \xi_2 X_2^* + \cdots + \xi_n X_n^*) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \cdots, i_m \leq n} \sqrt{-1}^{\,m} a_{i_1, i_2, \cdots, i_m} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_m}$$

と定める．（この関数は基底 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ の取り方に依らず，$\mathfrak{g}^*$ 上の関数として一意）．ここで，次の三条件を考える　1°) $\mathrm{Re}\, \sigma(D)(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*$;

2°) $\mathfrak{h} \equiv \{\xi \in \mathfrak{g}^* : \sigma(D)(\xi) = 0\}$ が $\mathfrak{g}^*$ の線形部分空間

となる； 3°) $\sigma(D)(\xi+\eta)=\sigma(D)(\xi)$
$\forall \xi \in \mathfrak{g}^*$, $\forall \eta \in \mathcal{Z}$;

この条件に関して、次の例より、条件 1°) を満たすだけでは、前出の系の結論が導き出せないことがわかる［さらに、次の例を少しあらためると、1°), 2°) を満たし、3°) を満たさず、系の結論が成立しないという例も作れる］

《例》 G を 3次元 Heisenberg 群とし、先ほどの例のように $\mathfrak{g}$ の基底を取り、

$$D = X^2Y^2 + Y^2X^2 + XYYX + YXXY + XYXY + YXYX$$

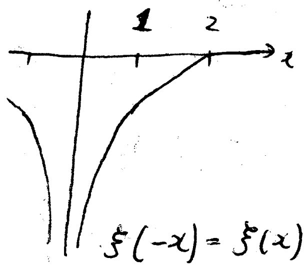
で与えられる 4階の左不変微分作用素 D を考える。D は、前出の条件 1°) を満たす。

$\overline{D}^{L^2(G)}$ は、$L^2(G)$ における対称（閉）作用素となる。ここで、$\overline{D}$ が、下に有界とはならないことが次のようにしてわかる。π_t $(t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$ を G の既約 unitary 表現で、それを $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ に拡張したものが、$(\pi_t(X)\xi)(x) = -\frac{d}{dx}\xi(x)$
$(\pi_t(Y)\xi)(x) = itx\,\xi(x)$, $\xi \in L^2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$
を満たすものとする［π_t の表現空間は $L^2(\mathbb{R}, dx)$］

このとき、$\pi_t(D) = -6t^2x^2\dfrac{d^2}{dx^2} - 12t^2x\dfrac{d}{dx} - 3t^2 I$

であり、$\pi_t(D) = -t^2\,\pi_1(D) \quad ({}^\forall t\in\mathbb{R},\ t\neq 0)$

$$\xi(x) = \begin{cases} 1-\frac{1}{8}-x^{-\frac{1}{4}} & : \ 0<x\leqq 1 \\ -\frac{1}{8}(x-2)^2 & : \ 1<x\leqq 2 \\ 0 & : \ 2<x \end{cases}$$



なる関数 $\xi\in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$(\overline{\pi_1(D)}\ \xi \mid \xi)_{L^2(\mathbb{R})} \lneq 0.$$

§3 コンパクト群上の強楕円型微分作用素の生成する半群

まず、G を中心有限な非コンパクト半単純 Lie 群、K を G の極大コンパクト群とし、非コンパクト型の対称 Riemann 空間 G/K を考える。このとき G/K 上の G-不変な強楕円型微分作用素 D が生成する半群 $\{\exp(tD)\}_{t\geq 0}$ の基本解 $\{f_t\}_{t>0} \subset L^1(K\backslash G/K)$ は、次のような特殊な場合に対しては、$\mathbb{R}^n$ における Fourier 変換と Abel 変換の反転を用いて求めることができる

I) G が複素 Lie 群の場合　II) G の real rank が 1 である場合、III) $G = SU(p,q)$ の場合

(cf [4])

ここでは，G を単連結なコンパクト半単純 Lie 群，A を G の一つの極大トーラス，

D を G 上の両側不変な強楕円型微分作用素とするとき，

$$\exp\{-t\bar{D}\}(f) = f * f_t \quad (t>0)$$

$^{\forall}f \in L^1(G)$ なる基本解 $(f_t)_{t>0} \subset L^1(G)$

[$f_t(xy) = f_t(yx)$ $\quad {}^{\forall}x, {}^{\forall}y \in G$] を，A 上の微分作用素の生成する半群との関連で求める.

$\mathfrak{a}$: A の Lie 環. $\quad \exp : \mathfrak{a} \longrightarrow A$

を考え，$a \in \mathfrak{a}$ に対し，$\delta(a)$: Weyl の指標公式における分母とすれば，

$f \in C(G)$ s.t. $\quad f(gxg^{-1}) = f(x) \quad {}^{\forall}g, {}^{\forall}x \in G$

に対し，
$$\int_G f(g)\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Haar 測度}}}{dg} = \int_A f(a)\, |\delta(a)|^2\, da$$
[積分公式]

[熱方程式の基本解] (浦川 [3])

D : G 上の Laplace - Beltrami 作用素とすれば，$\exp(-t\bar{D})(f) = f * f_t \quad (t>0)$

なる $f_t \in L^1(G)$ に対して，次のような公式が成り立つ：

$$\left\{\begin{array}{l} f_t(\exp a)\cdot j(a) \\ \quad = C \quad e^{t(\delta,\delta)} \prod_{\alpha>0} \partial_{t_\alpha}(h_t)(\exp a) \end{array}\right.$$

$(a \in \mathfrak{a})$, $t > 0$ ：Cは定数$\neq 0$.

ただし $(h_t)_{t>0}$ は A 上の Laplacian $\mathring{D}$ に対する

$$\exp\{-t\mathring{D}\}(\varphi) = \varphi * h_t \quad (t>0),\ \varphi \in L^1(A)$$

なる基本解. $\alpha > 0$ …正のルート $(\alpha \in \mathfrak{a}^*)$

$t_\alpha \in \mathfrak{a}$: $\beta(t_\alpha) = (\alpha, \beta)$ $\forall\beta \in \mathfrak{a}^*$

$$(\partial_{t_\alpha}\psi)(\exp a) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{\psi(\exp(a+ht_\alpha)) - \psi(\exp a)\},$$

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha.$$

上記の公式は, 次のように一般化される

D : G 上の両側不変な(高階の)強楕円型微分作用素 とするとき,

$\{\exp(-t\bar{D})\}_{t\geq 0}$ の 基本解(のAへの制限)

$\sum_{\lambda\in P^+} e^{-tQ(\lambda+\delta)}\chi_\lambda(\exp a)$ が, A上の関数

$\sum_{\mu\in P} e^{-tQ(\mu)} e_\mu(\exp a)$ を 正のルートに対応する方向に偏微分を有限回施して得られる関数を用いて表示される：

(G, A) なる pair に対して

P : 整形式の全体の成す格子

P^+ : 優整形式の全体

χ_λ $(\lambda \in P^+)$: λ に対応する G の既約 unitary 表現の指標

e_μ $(\mu \in P)$: μ に対応する A の一次元 unitary 表現

W : (G, A) に対する Weyl 群

とするとき、強楕円型作用素 D に対し

$$D(\chi_\lambda) = Q(\lambda + \delta)\chi_\lambda \qquad ({}^\forall \lambda \in P^+)$$

となる $\mathfrak{a}^*$ 上の W-不変な多項式 Q が存在（Brezin の定理）し、Q の最高次部分を Q_m とすれば、$\min\{\mathrm{Re}\, Q_m(\beta) : \beta \in \mathfrak{a}^*, |\beta| = 1\} > 0$

$$\left\{ \begin{aligned} &\Big\{ \sum_{\lambda \in P^+} e^{-tQ(\lambda+\delta)} \chi_\lambda(\exp a) \Big\} \cdot \delta(a) \\ &= C \cdot \prod_{\alpha > 0} \partial_{t_\alpha} \Big(\sum_{\mu \in P} e^{-tQ(\mu)} e_\mu(\exp a) \Big) \end{aligned} \right.$$

C は定数, $C \neq 0$

参照文献

[1] R. P. Langlands "Semigroups and Representation of Lie groups" (Yale Univ. thesis.) 1960.

[2] R. P. Langlands "Some holomorphic semigroups" Pro. NAS.'60

[3] H. Urakawa "the Heat Equations on Compact Lie groups" Osaka J. Math. 12 (1975)

[4] H. Nakazato "Semigroups generated by higher order..." prepnnt '87.