数理解析研究所講究録
第 674 巻 1988 年 105-126

Von Neumann代数のpredualにおける閉ユニタリー軌道の空間

北大応電研　日合文雄（Fumio Hiai）

§1. 序論

$\mathcal{M}$はvon Neumann代数，$\mathcal{M}_*$は$\mathcal{M}$のpredual，$\mathcal{M}_*^+$は$\mathcal{M}_*$のpositive cone（i.e. $\mathcal{M}_*^+$は$\mathcal{M}$上の正の正規線形汎関数の全体）とする．さらに，$\mathcal{S}(\mathcal{M})$ $(\subset \mathcal{M}_*^+)$は$\mathcal{M}$上の正規statesの全体とする．$\mathcal{U}$は$\mathcal{M}$に属するユニタリー全体とする．$\varphi \in \mathcal{M}_*^+$のユニタリー軌道$\{u\varphi u^* = \varphi(u^* \cdot u) : u \in \mathcal{U}\}$のノルム閉包を$[\varphi]$で表すと，$\mathcal{M}_*^+$に次の同値関係が入る：$\varphi \sim \psi \overset{}{\underset{def}{\Longleftrightarrow}} \varphi \in [\psi]$．このとき，商空間$\mathcal{M}_*^+/\sim$は距離

$$d([\varphi],[\psi]) = \inf\{\|\varphi' - \psi'\| : \varphi' \in [\varphi], \psi' \in [\psi]\}$$
$$= \inf_{u \in \mathcal{U}} \|\varphi - u\psi u^*\|$$

により距離空間となる．この距離空間$\mathcal{M}_*^+/\sim$の完備性は容易にわかる．

最近，Haagerup-Størmer [5] が$\mathcal{M}_*^+/\sim$のisometric characterization を与えたので，次節以下でそれを紹介しよう．さらに筆者と中村美浩氏が最近得た関連結果 [6, 7] も報告する．

以下この節では，$\mathcal{M}_*^+/\sim$ に関してこれまで知られていた結果をいくつか挙げておこう．

(1°) $\mathcal{M}$ が I_n 型 factor, i.e. $\mathcal{M} = \mathbb{M}_n$ ($n \times n$ 行列全体) の場合，$\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ は $0 \leqq h_\varphi \in \mathbb{M}_n$ により $\varphi(x) = tr(h_\varphi x)$ と書けて，

$$d([\varphi],[\psi]) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \| h_\varphi - u h_\psi u^* \|_1 .$$

ただし $\|\cdot\|_p$ は Schatten p-ノルムとする．行列については，次の結果がよく知られている：Hermite 行列 $h, k \in \mathbb{M}_n$ の固有値をそれぞれ $\alpha_1 \geqq \cdots \geqq \alpha_n$, $\beta_1 \geqq \cdots \beta_n$ とするとき，

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \| h - u k u^* \|_p = \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|^p \right\}^{1/p}, \qquad 1 \leqq p \leqq \infty,$$

ただし $p = \infty$ では 右辺 $= \max_{1 \leqq i \leqq n} |\alpha_i - \beta_i|$．これは Lidskii-Wielandt の定理の系であり，$p = \infty$ の場合は H. Weyl (1912) の古典的結果である．

(2°) $\mathcal{M}$ が III_1 型 factor の場合，Connes-Størmer [4] による $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ の homogeneity (i.e. $\mathcal{S}(\mathcal{M})/\sim$ が一点集合) から次が成立：任意の $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$ に対して

$$d([\varphi],[\psi]) = |\varphi(1) - \psi(1)| .$$

つまり $[\varphi] \longmapsto \varphi(1)$ は $\mathcal{M}_*^+/\sim$ から $[0,\infty)$ への isometry. [4] では $\mathcal{M}$ が separable predual を仮定しているが，この仮定は要らない．

(3°) $\mathcal{M}$ が separable predual の III_λ 型 factor $(0 \leqq \lambda < 1)$ の場合，Bion-Nadal [1] は discrete 分解 $\mathcal{M} = \mathcal{N} \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ を用いて，$\mathcal{S}(\mathcal{M})/\sim$ を flow of weights 上の Borel 確率測度のある集合と対応させた．特に $0<\lambda<1$ の場合，$\mathcal{S}(\mathcal{M})/\sim$ が単位円周上の Borel 確率測度の全体と対応することと

$$\mathrm{diam}\,(\mathcal{S}(\mathcal{M})/\sim) \leqq 2\,(1-\sqrt{\lambda})$$

を示した．ただし上の左辺は $\mathcal{S}(\mathcal{M})/\sim$ の直径．

(4°) Connes-Haagerup-Størmer [3] は，$\mathcal{M}$ が σ-finite な III_λ 型 factor $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ のとき，

$$\mathrm{diam}\,(\mathcal{S}(\mathcal{M})/\sim) = 2\,\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}$$

を示した．（$\lambda=1$ の場合が (2°) で述べた結果 [4].）

§2. Haagerup-Størmer の主定理

$\mathcal{M}$ 上の忠実な正規 semifinite weight ω を取り，$\mathcal{M}$ のモジュラー自己同型群 σ_t^ω による接合積を $\mathcal{N} = \mathcal{M} \rtimes_{\sigma^\omega} \mathbb{R}$ とすると，$\mathcal{N}$ は semifinite であり，$\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau$ $(s \in \mathbb{R})$ を満す忠実

な正規トレース τ をもつ．ここに，$\mathcal{N}$ 上の自己同型群 θ_s は σ_t^{ω} の dual action．$\mathcal{N}$ に affiliate する τ-可測作用素の全体を $\tilde{\mathcal{N}}$ で表し，$\tilde{\mathcal{N}}_+$ は $\tilde{\mathcal{N}}$ の positive cone とする．$\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ に対して，$\mathcal{N}$ 上の dual weight $\tilde{\varphi}$ を取ると，Radon-Nikodym 微分 $h_\varphi = \dfrac{d\tilde{\varphi}}{d\tau}$ は $\tilde{\mathcal{N}}_+$ に属し $\theta_s(h_\varphi) = e^{-s} h_\varphi$ $(s \in \mathbb{R})$ を満す．(実際，この対応 $\varphi \longmapsto h_\varphi$ を linear extension したものが，$\mathcal{M}_*$ と Haagerup L^1-空間 $L^1(\mathcal{M}) = \{a \in \tilde{\mathcal{N}} : \theta_s(a) = e^{-s} a \ (s \in \mathbb{R})\}$ の間の同型対応になる．) そこで，各 $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ に対して，$\mathcal{N}$ に属する射影 $e_\varphi = \chi_{(1,\infty)}(h_\varphi)$ が定まる．ここに，$\chi_{(\alpha,\beta)}(h_\varphi)$ は h_φ の区間 (α, β) に対応するスペクトル射影を表す．$\theta_s(e_\varphi) = \chi_{(e^s,\infty)}(h_\varphi)$ より

$$\begin{aligned}
\tau(e_\varphi) &= \tilde{\varphi}(h_\varphi^{-1} e_\varphi) = \varphi\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \theta_s(h_\varphi^{-1} e_\varphi)\, ds\Big) \\
&= \varphi\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^s h_\varphi^{-1} \chi_{(e^s,\infty)}(h_\varphi)\, ds\Big) \\
&= \varphi\Big(h_\varphi^{-1} \int_0^{\infty} \chi_{(\lambda,\infty)}(h_\varphi)\, d\lambda\Big) \\
&= \varphi(\mathrm{supp}\, h_\varphi) = \varphi(\mathrm{supp}\, \varphi) = \varphi(1).
\end{aligned}$$

よって $\hat{\varphi} \in Z(\mathcal{N})_*^+$ (ただし $Z(\mathcal{N})$ は $\mathcal{N}$ の center) が

$$\hat{\varphi}(z) = \tau(e_\varphi z), \qquad z \in Z(\mathcal{N}),$$

で定義できる．このとき，任意の $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$ に対して，

(1) $\varphi \leqq \psi \Longrightarrow \hat{\varphi} \leqq \hat{\psi}$,

(2) $\|\hat{\varphi}-\hat{\psi}\| \leqq d([\varphi],[\psi])$,

(3) $\hat{\varphi}\circ\theta_s \geqq e^{-s}\hat{\varphi} \quad (s>0)$.

(1) は容易であり, (2) を示すには $\varphi\vee\psi = \varphi+(\varphi-\psi)_- = \psi+(\varphi-\psi)_+$ とおいて,

$$
\begin{aligned}
\|\hat{\varphi}-\hat{\psi}\| &\leqq \|(\varphi\vee\psi)^\wedge-\hat{\varphi}\| + \|(\varphi\vee\psi)^\wedge-\hat{\psi}\| \\
&= 2(\varphi\vee\psi)^\wedge(1) - \hat{\varphi}(1) - \hat{\psi}(1) \qquad (\text{by } (1)) \\
&= 2(\varphi\vee\psi)(1) - \varphi(1) - \psi(1) \\
&= \|\varphi-\psi\|.
\end{aligned}
$$

任意の $u\in\mathcal{U}$ に対して, $(u\psi u^*)^\wedge = \hat{\psi}$ より $\|\hat{\varphi}-\hat{\psi}\| \leqq \|\varphi-u\psi u^*\|$ となり, (2) が成立. (3) は $\theta_s(h_\varphi) = e^{-s}h_\varphi$ より容易.

(2) より $[\varphi]\in\mathcal{M}_*^+/\sim \longmapsto \hat{\varphi}\in Z(\mathcal{N})_*^+$ が well-defined. そこで Haagerup-Størmer [5] の主定理は,

定理 (i) $[\varphi]\longmapsto\hat{\varphi}$ は $\mathcal{M}_*^+/\sim$ から $Z(\mathcal{N})_*^+$ への isometry.

(ii) $\mathcal{M}$ が properly infinite で I型 direct summand をもたないとき, $[\varphi]\mapsto\hat{\varphi}$ の値域は

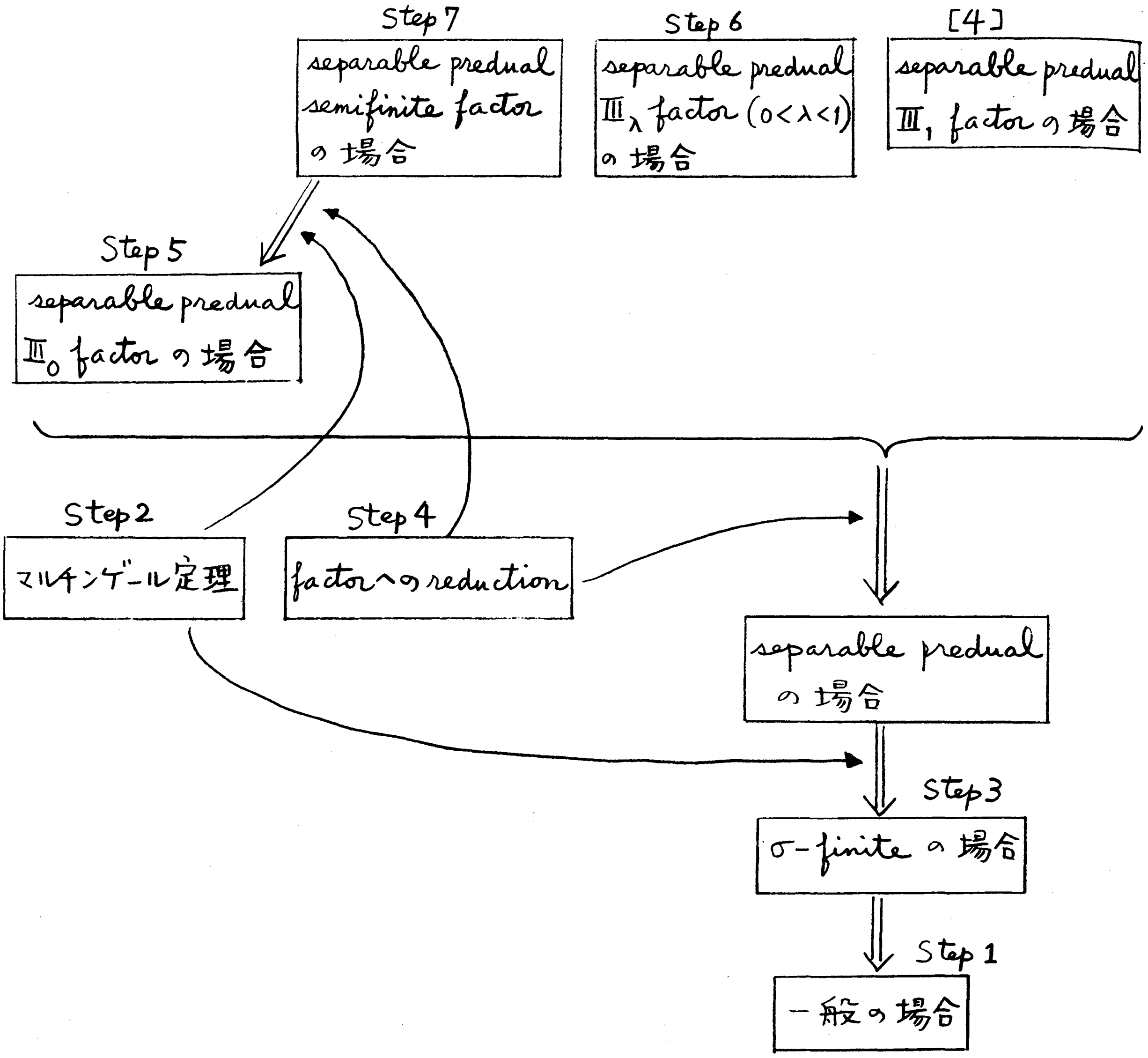
$$P(\mathcal{M}) \underset{\text{def}}{=} \{\chi\in Z(\mathcal{N})_*^+ : \chi\circ\theta_s \geqq e^{-s}\chi \ (s>0)\}.$$

(iii) $\mathcal{M}$ が II_1 型のとき, $[\varphi]\mapsto\hat{\varphi}$ の値域は

$$\{\chi\in P(\mathcal{M}) : \chi \leqq \tau|_{Z(\mathcal{N})}\}.$$

§3. 証明の概略

定理の証明はかなり長いので，その方針を流れ図に書いておくと次のようになる．



対応 $\varphi \longmapsto \hat{\varphi}$ を具体的に計算するのは，separable predual の semifinite factor および III_λ 型 factor $(0<\lambda<1)$ の場合である．III_1 型 factor の場合は [4] から成立．separable predual の各 factor で定理が成立すれば，separable predual 一般で成立す

ることは reduction theory を使って証明される. III_0 型 factor の場合は, 具体的な計算をしないで（直接計算はほとんど不可能か）, II_∞ 型の場合に帰着させて証明する. このためにマルチンゲール定理を用意する. σ-finite の場合は, separable predual の場合に帰着させて証明する. ここでもマルチンゲール定理が使われる. 最後に, 一般の場合は σ-finite の場合に帰着させる.

証明全体として, semifinite factor および III_λ factor $(0<\lambda<1)$ での直接計算を除けば, マルチンゲール定理が最大のポイントであり, 残りの証明は概ね形式的なものである.

この節で以下, 証明の最後からほぼ逆順に各ステップのスケッチを述べよう.

Step 1　まず, 次の2つのことをチェックする:

(1) $\mathcal{M}=\sum_{i\in I}^{\oplus}\mathcal{M}_i$ のとき, 各 $\mathcal{M}_i$ で定理が成立すれば $\mathcal{M}$ でも成立.

(2) $\mathcal{M}=\mathcal{P}\otimes\mathbb{B}(\mathcal{H})$ （ただし $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素全体）のとき, $\mathcal{P}$ で定理が成立すれば $\mathcal{M}$ でも成立.

一般に, finite な $\mathcal{M}$ は σ-finite かつ finite な $\mathcal{M}_i$ の直和 $\mathcal{M}=\sum_{i\in I}^{\oplus}\mathcal{M}_i$ と書ける. ここで $\mathcal{M}$ が II_1 型ならば各 $\mathcal{M}_i$ は II_1 型. また properly infinite な $\mathcal{M}$ は σ-finite かつ properly infinite

な P_i で $\mathcal{M}=\sum_{i\in I}^{\oplus} P_i \otimes \mathbb{B}(\mathcal{H}_i)$ と書ける. よって (1), (2) から, 一般の場合は σ-finite の場合に帰着する.

<u>Step 2 (マルチンゲール定理)</u> $\mathcal{M}_\alpha \nearrow \mathcal{M}$ とし, 各 α に対し conditional expectation $E_\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_\alpha$ が存在してマルチンゲール条件を満すとき, 各 $\mathcal{M}_\alpha$ で定理が成立すれば,

(1) $\mathcal{M}$ でも定理の (i) が成立,

(2) $\mathcal{M}$ および各 $\mathcal{M}_\alpha$ が properly infinite で I 型 direct summand をもたないとき, $\mathcal{M}$ でも定理の (ii) が成立,

(3) $\mathcal{M}$ および各 $\mathcal{M}_\alpha$ が II_1 型のとき, $\mathcal{M}$ でも定理の (iii) が成立.

証明は, α_0 を取って $\alpha \geqq \alpha_0$ で考えてよい. $\mathcal{M}_{\alpha_0}$ 上の忠実な正規 semifinite weight ω_0 を取り $\omega = \omega_0 \circ E_{\alpha_0}$ とすると (定理の成立は ω の取り方に依らないことに注意), $\alpha \geqq \alpha_0$ に対し $\omega \circ E_\alpha = \omega$ より $\sigma_t^{\omega_\alpha} = \sigma_t^{\omega} | \mathcal{M}_\alpha$ (ただし $\omega_\alpha = \omega | \mathcal{M}_\alpha$). このとき, $\mathcal{N}_\alpha \ (= \mathcal{M}_\alpha \rtimes_{\sigma^{\omega_\alpha}} \mathbb{R}) \subset \mathcal{N} \ (= \mathcal{M} \rtimes_{\sigma^\omega} \mathbb{R})$ で $\mathcal{N}_\alpha \nearrow \mathcal{N}$, $\theta_\alpha = \theta | \mathcal{N}_\alpha$, $\tau_\alpha = \tau | \mathcal{N}_\alpha$. さらに, $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ に対して $\tilde{\varphi}_\alpha = \tilde{\varphi} | \mathcal{N}_\alpha$ (ただし $\varphi_\alpha = \varphi | \mathcal{M}_\alpha$). conditional expectation $E_\alpha \otimes id_{\mathbb{B}(L^2(\mathbb{R}))} : \mathcal{M} \otimes \mathbb{B}(L^2(\mathbb{R})) \to \mathcal{M}_\alpha \otimes \mathbb{B}(L^2(\mathbb{R}))$ の $\mathcal{N} \ (\subset \mathcal{M} \otimes \mathbb{B}(L^2(\mathbb{R})))$ への制限 F_α は $\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}_\alpha$ への conditional expectation となり,

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau} = \frac{d(\tilde{\varphi}_\alpha \circ F_\alpha)}{d(\tau_\alpha \circ F_\alpha)} = \frac{d\tilde{\varphi}_\alpha}{d\tau_\alpha}$$

より $e_\varphi = e_{\varphi_\alpha}$ $(\alpha \geqq \alpha_0)$. よって $\varphi, \psi \in M_*^+$ のとき, $\chi = \tau((e_\varphi - e_\psi)\cdot) \in N_*$ とおいて

$$d([\varphi],[\psi]) \leqq d_\alpha([\varphi_\alpha],[\psi_\alpha]) = \|\hat{\varphi}_\alpha - \hat{\psi}_\alpha\|$$

$$= \|\chi|Z(N_\alpha)\| \longrightarrow \|\chi|Z(N)\| = \|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\|$$

が示せるので, §2の(2)と合わせて(1)がわかる. (2)は, $P(M)$ が

$$P_0 = \{\chi \in Z(N)_*^+ : \chi = \int_{-\infty}^0 e^s \rho \circ \theta_s \, ds, \ \rho \in Z(N)_*^+\}$$

のノルム閉包であることを使って示せる. さらに(3)の証明には, center-valued トレースに対する Dixmier approximation theorem が使われる.

<u>Step 3</u> M が σ-finite な II_1 (resp. II_∞, III) 型のとき, countably generated な v.N. 部分代数 $M_0 \subset M$ と conditional expectation $E_0 : M \to M_0$ が存在して, $M_0 \subset P \subset M$ で $E_0 = E_0 E_P$ となる conditional expectation $E_P : M \to P$ をもつ v.N. 部分代数 P がすべて II_1 (resp. II_∞, III) 型であることが証明できる. これの証明は, II_1, II_∞ 型の場合は容易であるが, III 型の場合は $\varphi \in S(M)$ のユニタリー軌道の閉凸包に関する巧妙な議論を用いる. そこで, $M_0 \subset P \subset M$ である countably generated v.N. 部分代数 P に対して $\bigvee_{t\in\mathbb{R}} \sigma_t^\omega(P) = \bigvee_{t\in\mathbb{Q}} \sigma_t^\omega(P)$ が σ^ω-

不変かつ countably generated となるから，countably generated な II_1 (resp. II_∞, III) 型の $\mathcal{M}_\alpha \nearrow \mathcal{M}$ が存在して Step 2 の仮定を満すことがわかる．よって σ-finite の場合は separable predual の場合に帰着する．

<u>Step 4 (factor への reduction)</u> $\mathcal{M}$ が separable predual のとき，direct integral による factor 分解

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{M}, \omega\} = \int_\Gamma^\oplus \{\mathcal{H}(\gamma), \mathcal{M}(\gamma), \omega_\gamma\}\, d\nu(\gamma)$$

を取ると，

$$\mathcal{N} = \int_\Gamma^\oplus \mathcal{N}(\gamma)\, d\nu(\gamma) \quad (\text{ただし } \mathcal{N}(\gamma) = \mathcal{M}(\gamma) \rtimes_{\sigma^{\omega_\gamma}} \mathbb{R}),$$

$$Z(\mathcal{N}) = \int_\Gamma^\oplus Z(\mathcal{N}(\gamma))\, d\nu(\gamma),$$

$$\theta_s = \int_\Gamma^\oplus \theta_s(\gamma)\, d\nu(\gamma), \quad \tau = \int_\Gamma^\oplus \tau_\gamma\, d\nu(\gamma).$$

各 $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ を $\varphi = \int_\Gamma^\oplus \varphi_\gamma\, d\nu(\gamma)$ $(\varphi_\gamma \in \mathcal{M}(\gamma)_*^+)$ と書くと，$h_\varphi = \int_\Gamma^\oplus h_{\varphi_\gamma}\, d\nu(\gamma)$ (ただし $h_{\varphi_\gamma} = \dfrac{d\tilde{\varphi}_\gamma}{d\tau_\gamma}$)．よって $e_\varphi = \int_\Gamma^\oplus e_{\varphi_\gamma}\, d\nu(\gamma)$ となり $\hat{\varphi} = \int_\Gamma^\oplus \hat{\varphi}_\gamma\, d\nu(\gamma)$．従って，各 $\mathcal{M}(\gamma)$ で定理が成立すれば，

$$\begin{aligned}\|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| &= \int_\Gamma \|\hat{\varphi}_\gamma - \hat{\psi}_\gamma\|\, d\nu(\gamma) = \int_\Gamma d([\varphi_\gamma], [\psi_\gamma])\, d\nu(\gamma) \\ &= d([\varphi], [\psi])\end{aligned}$$

が示せるので，$\mathcal{M}$ でも定理の (i) が成立．$\mathcal{M}$ が properly infinite

で I 型 direct summand をもたないとき, a.e. γ に対し $\mathcal{M}(\gamma)$ もそうであるから, direct integral の常套的議論により $\mathcal{M}$ でも定理の (ii) が成立するのがわかる. 定理の (iii) も同様.

<u>Step 5</u> $\mathcal{M}$ が separable predual の III_0 型 factor のとき, II_∞ 型の $\mathcal{P}$ により $\mathcal{M} = \mathcal{P} \rtimes \mathbb{Z}_2^{(\infty)}$ と書ける [2]. $\mathcal{M}_n = \mathcal{P} \rtimes \mathbb{Z}_2^{(n)}$ とすると, $\mathcal{M}_n \nearrow \mathcal{M}$ でマルチンゲール条件を満す conditional expectation $E_n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_n$ が存在する. $\mathbb{Z}_2^{(n)}$ が有限群だから, $\mathcal{M}_n$ は II_∞ 型である. よって Step 2 から, $\mathcal{M}$ に対する定理は II_∞ 型の場合に帰着し, さらに Step 4 から semifinite factor の場合 (Step 7) に帰着する.

<u>Step 6</u> $\mathcal{M}$ が separable predual の III_λ 型 factor $(0<\lambda<1)$ のとき, $\sigma_{t_0}^\omega = id$ (ただし $t_0 = -2\pi/\log\lambda$) となる忠実な正規 semifinite weight ω が取れて, 接合積 $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M} \rtimes_{\sigma\omega} (\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z})$ は $\mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z})$ 上の II_∞ 型 factor になる. このとき, σ^ω の dual action $(\theta_0^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (ここに $(\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z})^\wedge = \mathbb{Z}$ とみなす) と $\mathcal{N}_0$ 上の正規トレース τ_0 について, $\tau_0 \circ \theta_0 = \lambda\tau_0$ が成立している. $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ に対して, $\mathcal{N} = \mathcal{M} \rtimes_{\sigma\omega} \mathbb{R}$ 上の dual weight $\tilde{\varphi}$ と別に, $\mathcal{N}_0$ 上の dual weight $\bar{\varphi}$ が定まる (i.e. $\mathcal{N}_0$ から $\mathcal{M}$ への operator valued weight $T_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_0^n(\cdot)$ により $\bar{\varphi} = \varphi \circ T_0$).

いま

$$f_\varphi(s) = \tau_0\Big(\chi_{(s,\infty)}\Big(\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0}\Big)\Big), \qquad s>0,$$

とおくと，次が計算できる：

(1) $f_\varphi(s) = \lambda f_\varphi(\lambda s) \quad (s>0)$,

(2) $\varphi(1) = \int_\lambda^1 f_\varphi(s)\,ds$,

(3) $\varphi \sim \psi \Longleftrightarrow f_\varphi = f_\psi$,

(4) $d([\varphi],[\psi]) = \int_\lambda^1 |f_\varphi(s) - f_\psi(s)|\,ds$,

(5) $\{f_\varphi : [\varphi] \in \mathcal{M}_*^+/\sim\} = \{f:(0,\infty)\to[0,\infty) \mid$ 非増加，右連続，$f(s) = \lambda f(\lambda s)\ (s>0)\}$.

そこで f_φ が $\hat{\varphi}$ と等価であることをチェックすればよい．ユニタリー

$$V: \mathcal{H}\otimes L^2(\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z})\otimes L^2(0,\gamma_0) \longrightarrow \mathcal{H}\otimes L^2(\mathbb{R})$$

(ただし $\gamma_0 = -\log\lambda$) を適当に定めると，$V^*\cdot V$ による同一視で

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \otimes L^\infty(0,\gamma_0) = \int_{[0,\gamma_0)}^\oplus \mathcal{N}_0\,d\gamma.$$

このとき，

$$\tau = \int_{[0,\gamma_0)}^\oplus e^{-\gamma}\tau_0\,d\gamma, \quad \text{i.e.} \quad \tau = \tau_0 \otimes e^{-\gamma}d\gamma.$$

$y \in \mathcal{N}_0 \otimes L^\infty(0,\gamma_0)\ (= L^\infty([0,\gamma_0),\mathcal{N}_0))$ と $s = r + n\gamma_0\ (r\in[0,\gamma_0),$ $n\in\mathbb{Z})$ に対して，

$$(\theta_s(y))(\gamma) = \begin{cases} \theta_0^{n+1}(y(\gamma - r + \gamma_0)), & 0 \leqq \gamma < r, \\ \theta_0^n(y(\gamma - r)), & r < \gamma < \gamma_0. \end{cases}$$

これより, $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ に対し $\tilde{\varphi} = \bar{\varphi} \otimes d\gamma$ がわかり,

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau} = \frac{d(\bar{\varphi} \otimes d\gamma)}{d(\tau_0 \otimes e^{-\gamma} d\gamma)} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0} \otimes m(e^\gamma)$$

(ただし $m(e^\gamma)$ は e^γ の掛算作用素). よって

$$e_\varphi = \int_{[0,\gamma_0)}^{\oplus} \chi_{(1,\infty)}\left(e^\gamma \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0}\right) d\gamma = \int_{[0,\gamma_0)}^{\oplus} \chi_{(e^{-\gamma},\infty)}\left(\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0}\right) d\gamma$$

となり, $z \in Z(\mathcal{N}) = L^\infty(0,\gamma_0)$ に対して

$$\hat{\varphi}(z) = \tau(e_\varphi z) = \int_0^{\gamma_0} \tau_0\left(\chi_{(e^{-\gamma},\infty)}\left(\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0}\right) z(\gamma)\right) e^{-\gamma} d\gamma$$
$$= \int_\lambda^1 f_\varphi(s)\, z(-\log s)\, ds.$$

従って, $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$ のとき

$$\|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| = \int_\lambda^1 |f_\varphi(s) - f_\psi(s)|\, ds = d([\varphi],[\psi]) \quad (\text{by } (4))$$

より, 定理の (i) が成立. 定理の (ii) は (5) からわかる.

<u>Step 7</u> $\mathcal{M}$ が separable predual の semifinite factor のとき, $\mathcal{M}$ 上の正規トレース τ_0 を

$$J \underset{\mathrm{def}}{=} \{\tau_0(p) : p \in \mathcal{M} \text{ 射影}\} = \begin{cases} \{0, 1, 2, \cdots\} & (\mathcal{M}\text{が I 型}) \\ [0, 1] & (\mathcal{M}\text{が II}_1\text{型}) \\ [0, \infty) & (\mathcal{M}\text{が II}_\infty\text{型}) \end{cases}$$

のように取って，$\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ に対して

$$f_\varphi(s) = \tau_0\left(\chi_{(s,\infty)}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)\right), \qquad s > 0,$$

とおくと，次が計算できる：

(1) $\varphi(1) = \int_0^\infty f_\varphi(s)\, ds$,

(2) $\varphi \sim \psi \iff f_\varphi = f_\psi$,

(3) $d([\varphi], [\psi]) = \int_0^\infty |f_\varphi(s) - f_\psi(s)|\, ds$,

(4) $\{f_\varphi : [\varphi] \in \mathcal{M}_*^+/\sim\} = \{f : [0, \infty) \to J \mid \text{非増加, 右連続 } L^1\text{-関数}\}$.

$\sigma_t^{\tau_0} = \mathrm{id}$ より $\mathcal{N} \cong \mathcal{M} \otimes L^\infty(\mathbb{R})$ なので，

$$\mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes L^\infty(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathcal{M}\, d\gamma$$

と同一視すると，$\tau = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} e^{-\gamma} \tau_0\, d\gamma$, $(\theta_s(y))(\gamma) = y(\gamma - s)$ $(\gamma \in \mathbb{R})$.
よって $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ に対し，$\tilde{\varphi} = \varphi \otimes d\gamma$ となり $\frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau_0} \otimes m(e^\gamma)$,
$e_\varphi = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_{(e^{-\gamma},\infty)}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right) d\gamma$. $z \in Z(\mathcal{N}) = L^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(z) = \tau(e_\varphi z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0\left(\chi_{(e^{-\gamma},\infty)}\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right) z(\gamma)\right) e^{-\gamma}\, d\gamma \\ &= \int_0^\infty f_\varphi(s)\, z(-\log s)\, ds. \end{aligned}$$

従って(3)より定理の(i)が成立. $\mathcal{M}$ が II_∞ 型のとき, 定理の(ii)は(4)からわかる. $\mathcal{M}$ が II_1 型のとき, 定理の(iii)は $J=[0,1]$ に注意すると同じく(4)からわかる.

最後に, 説明を省略した Step 6 の(1)-(5)と Step 7の(1)-(4)が最も具体的な計算部分であることに注意しておく.

§4. 定理の応用

定理の直接的な応用として, $\mathcal{S}(\mathcal{M})/\sim$ に関する以下の結果が[5]で与えてある.

(1°) $\mathcal{M}$ が properly infinite で I型 direct summand をもたないとき, $[\varphi]\longmapsto\hat{\varphi}$ は $\mathcal{S}(\mathcal{M})/\sim$ から

$$P_1(\mathcal{M})=\{\chi\in\mathcal{S}(Z(\mathcal{N})):\chi\circ\theta_s\geqq e^{-s}\chi\ (s>0)\}$$

への onto isometry. また $P_1(\mathcal{M})$ は Choquet simplex.

これの前半は定理の(ii)であり, 後半は容易にわかる.

(2°) $\mathcal{M}$ が III_λ 型 factor $(0\leqq\lambda\leqq 1)$ のとき,

$$\mathrm{diam}(\mathcal{S}(\mathcal{M})/\sim)=2\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}.$$

これは§1の(4°)で述べた結果であるが, [3]の証明は分り易くない. 上の(1°)を使って計算すると, より初等的な別証が得られる. ただし $\lambda=1$ の場合は, 定理の証明で $\mathcal{S}(\mathcal{M})$

の homogeneity を使っているから，別証にはなっていない．尚[5]では M が separable predual を仮定しているが，この仮定は不要であろう．

(3°) M が III_λ 型 factor ($0<\lambda<1$) のとき，$P_1(M)$ はコンパクトな Bauer simplex (i.e. $\mathrm{ex}\,P_1(M)$ がコンパクト) であり，従って $\mathcal{S}(M)/\sim$ はコンパクト．

(4°) M が III_0 型 factor のとき，$\mathrm{ex}\,P_1(M)=\emptyset$ であり，従って $P_1(M)$ および $\mathcal{S}(M)/\sim$ はコンパクトでない．

ついでに，M が I_n 型を除く semifinite factor のときも，$\mathcal{S}(M)/\sim$ がコンパクトでないことに注意しておく．

[5]では他にも定理の応用として，centralizer が II_1 型の忠実正規 state の存在に関する結果と，approximate pointwise inner 自己同型 (i.e. $\varphi\circ\alpha^{-1}\sim\varphi$ ($\varphi\in M_*^+$) となる $\alpha\in \mathrm{Aut}(M)$) に関する興味ある結果が与えてある．

§5. 関連結果

筆者と中村氏が[6,7]で得た結果は Haagerup-Størmer の主定理に密接に関連している．この節でそれらを報告しよう．まず M は忠実な正規トレース τ をもつ semifinite v.N. 代数とする．(M,τ) 上の L^p-空間は

$$L^p(M)=\{x\in\tilde{M}:\|x\|_p=\tau(|x|^p)^{1/p}<\infty\},\quad 1\leq p<\infty,$$

$$L^{\infty}(\mathcal{M})=\mathcal{M}, \quad \|\cdot\|_{\infty}=\|\cdot\|.$$

また

$$\tilde{\mathfrak{S}}=\{x\in\tilde{\mathcal{M}}: \tau(\chi_{(s,\infty)}(|x|))<\infty \ (s>0)\}$$

とすると，$\tilde{\mathfrak{S}}\supset L^p(\mathcal{M})$ $(1\leqq p<\infty)$．$x\in\tilde{\mathcal{M}}$ の generalized s-numbers $\mu_t(x)$, $t>0$, は

$$\mu_t(x)=\inf\{s\geqq 0: \tau(\chi_{(s,\infty)}(|x|))\leqq t\}.$$

$\tau(1)<\infty$ のとき，$x\in\tilde{\mathcal{M}}_{sa}$ (selfadjoint な $\tilde{\mathcal{M}}$ の元) の spectral scale $\lambda_t(x)$, $0<t<\tau(1)$, は

$$\lambda_t(x)=\inf\{s\in\mathbb{R}: \tau(\chi_{(s,\infty)}(x))\leqq t\}.$$

このとき，majorization の手法を使って次が得られる．

(1°) $\mathcal{M}$ が finite factor のとき，$x, y\in\tilde{\mathcal{M}}_{sa}$ に対して

$$\inf_{u\in\mathcal{U}}\|x-uyu^*\|_p=\left\{\int_0^{\tau(1)}|\lambda_t(x)-\lambda_t(y)|^p dt\right\}^{1/p}, \quad 1\leqq p\leqq\infty.$$

ただし $p=\infty$ では 右辺 $=\sup_{0<t<\tau(1)}|\lambda_t(x)-\lambda_t(y)|$.

(2°) $\mathcal{M}$ が infinite な semifinite factor のとき，$x, y\in\tilde{\mathfrak{S}}_{sa}$ に対して

$$\inf_{u\in\mathcal{U}}\|x-uyu^*\|_p=\left\{\int_0^{\infty}|\mu_t(x_+)-\mu_t(y_+)|^p dt+\int_0^{\infty}|\mu_t(x_-)-\mu_t(y_-)|^p dt\right\}^{1/p},$$
$$1\leqq p\leqq\infty.$$

ただし $p=\infty$ では 右辺 $=\max\{\sup_{t>0}|\mu_t(x_+)-\mu_t(y_+)|,\ \sup_{t>0}|\mu_t(x_-)-\mu_t(y_-)|\}$.
また $x=x_+-x_-$ は x の Jordan 分解.

いま $\varphi,\psi\in\mathcal{M}_*^+$ のとき, $x=\dfrac{d\varphi}{d\tau}$, $y=\dfrac{d\psi}{d\tau}\in L^1(\mathcal{M})_+$ となり, (1°), (2°) から

$$d([\varphi],[\psi])=\inf_{u\in\mathcal{U}}\|x-uyu^*\|_1=\int_0^\infty|\mu_t(x)-\mu_t(y)|\,dt.$$

$\mu_t(x)$ は $f_\varphi(s)=\tau(\chi_{(s,\infty)}(x))$ の "inverse" 関数であり,

$$\int_0^\infty|\mu_t(x)-\mu_t(y)|\,dt=\int_0^\infty|f_\varphi(s)-f_\psi(s)|\,ds$$

に注意すると, 上の (1°), (2°) は $\mathcal{M}$ が semifinite factor の場合で $\mathcal{M}_*^+=L^1(\mathcal{M})_+$ に対する定理の (i) を $L^p(\mathcal{M})_{sa}$, $1\leqq p\leqq\infty$, に拡張していることがわかる.

次に $\mathcal{M}$ が III型の場合を考えよう.

(3°) $\mathcal{M}$ が σ-finite な III型 factor のとき, 正規な $x,y\in\mathcal{M}$ に対して

$$\inf_{u\in\mathcal{U}}\|x-uyu^*\|=h(\sigma(x),\sigma(y)).$$

ここに 右辺は x,y のスペクトル $\sigma(x)$, $\sigma(y)$ の間の Hausdorff 距離.

さて, §2 の $\mathcal{N}$ と θ_s を用いて, Haagerup L^p-空間は

$$L^p(\mathcal{M})=\{x\in\tilde{\mathcal{N}}:\theta_s(x)=e^{-s/p}x\quad(s\in\mathbb{R})\},\quad 1\leqq p\leqq\infty.$$

特に$\mathcal{M}$がIII_λ型factor $(0<\lambda<1)$の場合, §3のStep 6の$\mathcal{N}_0$とθ_0を用いて, "discrete" Haagerup L^p-空間は

$$L^p_0(\mathcal{M})=\{x\in\tilde{\mathcal{N}}_0:\theta_0(x)=\lambda^{1/p}x\},\qquad 1\leqq p\leqq\infty.$$

(4°) $\mathcal{M}$がIII_1型factorのとき, $x,y\in L^p(\mathcal{M})_{sa}$, $1\leqq p<\infty$, に対して

$$\inf_{u\in\mathcal{U}}\|x-uyu^*\|_p=\left\{\left|\|x_+\|_p-\|y_+\|_p\right|^p+\left|\|x_-\|_p-\|y_-\|_p\right|^p\right\}^{1/p}.$$

これの左辺≧右辺は$x\in L^p(\mathcal{M})$の$\tilde{\mathcal{N}}$でのgeneralized s-numbersが$\mu_t(x)=t^{1/p}\|x\|_p$であることからmajorizationの手法で証明される. 左辺≦右辺は$\mathcal{S}(\mathcal{M})$のhomogeneityとgeneralized Powers-Størmer不等式(by Kosaki)を使って証明される.

(5°) $\mathcal{M}$がIII_λ型factor $(0<\lambda<1)$のとき, $x,y\in L^p_0(\mathcal{M})_{sa}$, $1\leqq p<\infty$, に対して

$$\inf_{u\in\mathcal{U}}\|x-uyu^*\|_p=\left\{\int_\lambda^1|\mu_t(x_+)-\mu_t(y_+)|^p dt+\int_\lambda^1|\mu_t(x_-)-\mu_t(y_-)|^p dt\right\}^{1/p}.$$

ここに$\mu_t(x)$はxの$\tilde{\mathcal{N}}_0$でのgeneralized s-numbers.

これも$\mu_t(x)=\lambda^{1/p}\mu_{\lambda t}(x)$であることからmajorizationの手法

で証明される.

いま $\varphi,\psi\in\mathcal{M}_*^+$ のとき, $x=\dfrac{d\bar\varphi}{d\tau_0}$, $y=\dfrac{d\bar\psi}{d\tau_0}\in L_0^1(M)_+$ となり (cf. §3の Step 6),

$$d([\varphi],[\psi])=\inf_{u\in\mathcal{U}}\|x-uyu^*\|_1=\int_\lambda^1|\mu_t(x)-\mu_t(y)|\,dt.$$

$\mu_t(x)$ は $f_\varphi(s)=\tau_0(\chi_{(s,\infty)}(x))$ の "inverse" 関数であり,

$$\int_\lambda^1|\mu_t(x)-\mu_t(y)|\,dt=\int_\lambda^1|f_\varphi(s)-f_\psi(s)|\,ds$$

に注意すると, (5°) は M が III_λ 型 factor $(0<\lambda<1)$ の場合で $\mathcal{M}_*^+=L_0^1(M)_+$ に対する定理の (i) を $L_0^p(M)_{sa}$, $1\leqq p<\infty$, に拡張していることがわかる.

次は (5°) の系である.

(6°) M が III_λ 型 factor $(0<\lambda<1)$ のとき,

$$\mathrm{diam}\,(L^p(M)_{+,1}/\sim)=2^{1/p}\frac{1-\lambda^{1/2p}}{(1+\lambda^{1/2})^{1/p}},\quad 1\leqq p\leqq 2.$$

ここに $L^p(M)_{+,1}/\sim$ は $L^p(M)_{+,1}=\{x\in L^p(M)_+:\|x\|_p=1\}$ の閉ユニタリー軌道の空間 (特に $L^1(M)_{+,1}/\sim\;=\mathcal{S}(M)/\sim$).

§6. 問題と予想

Haagerup-Størmer の主定理が $\mathcal{M}_*^+=L^1(M)_+$ における結果であるのに対し, §5の われわれの結果は $L^p(M)_{sa}$ におけるもので

あるから強い．他方，Haagerup-Størmerのが unified theorem であるのに対し，われわれのはタイプごとの結果であり，しかも III_0 型が抜けているのが弱い．$L^p(M)_{sa}$ における unified theorem が出来れば申し分ないが，当面の問題として以下のものが考えられる．

（問題1）M が III_0 型 factor の場合，$x, y \in L^p(M)_{sa}$，$1 \leqq p < \infty$，に対して $\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - uyu^*\|_p$ を exact に評価すること．われわれの majorization の方法では，$\mu_t(x)$ が $\|x\|_p$ だけで決まるので exact な評価は望めない．対応 $[\varphi] \in M_*^+/\sim \ \mapsto \hat{\varphi} \in Z(N)_*^+$ を $L^p(M)_+/\sim$ の元にまで modify して §3 のマルチンゲールの定理の方法を使うことが考えられるが，それだけでは無理なように思われる．

（問題2）M が III_0 型 factor の場合，問題1を矮小化した問題として予想 $\mathrm{diam}\,(L^p(M)_{+,1}/\sim) = 2^{1/p}$，$1 \leqq p < \infty$，がある．

（問題3）§5 の (2°), (4°), (5°) を考慮すると，M が properly infinite のとき，$x, y \in L^p(M)_{sa}$，$1 \leqq p < \infty$，に対して

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - uyu^*\|_p = \left\{ \inf_{u \in \mathcal{U}} \|x_+ - uy_+u^*\|_p^p + \inf_{u \in \mathcal{U}} \|x_- - uy_-u^*\|_p^p \right\}^{1/p}$$

が予想される．M が separable predual とすると，$L^p(M)$ に対する reduction theory が使えるから，M が infinite factor のと

きに証明すれば十分であろう. 従ってMがIII_0型 factor の場合が問題となる. 特に$p=1$の場合, この問題は selfadjoint な$\varphi, \psi \in M_*$に対して

$$d([\varphi],[\psi]) = d([\varphi_+],[\psi_+]) + d([\varphi_-],[\psi_-])$$
$$\left(= \|\hat{\varphi}_+ - \hat{\psi}_+\| + \|\hat{\varphi}_- - \hat{\psi}_-\|\right)$$

と同じである. これが証明できれば, 問題1で$p=1$の場合が一応解決することになる. Mが finite な場合, 上の等式が成立しないことに注意しておく.

文献

[1] J. Bion-Nadal, Espace des états normaux d'un facteur de type III_λ, $0<\lambda<1$, et d'un facteur de type III_0, Canad. J. Math., 36 (1984), 830-882.

[2] A. Connes, Une classification des facteurs de type III, Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 4, 6 (1973), 133-252.

[3] A. Connes, U. Haagerup and E. Størmer, Diameters of state spaces of type III factors, Lecture Notes in Math. 1132, Springer, 1985, pp. 91-116.

[4] A. Connes and E. Størmer, Homogeneity of the state space of factors of type III_1, J. Funct. Anal., 28 (1978), 187-196.

[5] U. Haagerup and E. Størmer, Equivalence of normal stats on von Neumann algebras and the flow of weights, Preprint.

[6] F. Hiai and Y. Nakamura, Distance between unitary orbits in von Neumann algebras, Pacific J. Math., to appear.

[7] Y. Nakamura, L^p-distance between unitary orbits in type III factors, Preprint.