数理解析研究所講究録
第675巻 1988年 159-164



# 可解格子模型（I）

京大教養　伊達　悦朗　(DATE Etsuro)
東大教養　国場　敦夫　(KUNIBA Atsuo)
京大数理研　三輪　哲二　(MIWA Tetsuji
京大数理研　尾角　正人　(OKADO Masato
京大数理研　神保　道夫　(JIMBO Michio

格子模型の研究は、本来の統計物理系の模型としての他、連続体上の場の理論の格子近似という側面からも物理的に重要である。なかでも可解な模型は、限られた状況でしか構成できないながら、厳密な情報をひきだせる点で殊に興味深く、われわれに”自由度無限大の数学”における絶好のworking laboratoryを提供してくれている。本稿では可解格子模型とアフィン・リー環をめぐる最近の話題を紹介したい。

## 1。Ising 模型と１点関数

本稿を通じて考察の対象とするのは２次元の正方格子に限る。格子模型は、各格子点上の自由度（確立変数）siとそれらの間の局所的相互作用とを与えることによって設定される。変数 si のとる値のことを局所状態と呼ぶ。最も簡単な例は、上向き・下向きの２状態のみをとる変数 si=+1,-1 が隣り同志で相互作用するIsing 模型である。物理的には例えば鉄原子が格子上に並んだ磁石の模型と解釈される。Ising 模型は、格子上の一つの「配置」、即ちsi達の値の組s={si}が実現する確率が

$$p(s)=\prod_{\langle ij\rangle}\exp(-E_1\, s_i s_j)\prod_{\langle ik\rangle}\exp(-E_2\, s_i s_k)/ Z$$

であるものとして定義される。ここに $E_1$ 、$E_2$ は温度T に逆比例する定数、<i,j> ,<i,k>はそれぞれ水平・垂直方向の隣接格子点の組にわたる積を表す。Z は全確率を１に規格化するための定数である。

Onsager は、格子サイズ無限大の極限でlogZ/(lattice size) をexplicitに求めることにより、この系がある臨界温度T=Tcで相転移をおこすことを示した。その際自然に $E_1$ 、$E_2$ の楕円関数によるparametrization $E_i = E_i(u,q)\,(i=1,2)$ が生じる。q=0 が絶対零度、q=1 が臨界温度に対応する。

ある決まった格子点１の上の変数s1の期待値<s1>は１点関数と呼ばれる。但し格子の境界上の変数は例えば+1に固定しておく。<s1>は Onsager、Yang により決定された。その結果はパラメタ u によらず、q の関数として次のように与えられる($q=\exp(i\pi\tau)$,$p=\exp(-i\pi/\tau)$)：

$$
\begin{aligned}
\langle s1\rangle &= \prod_{n>0} (1-q^{2n-1})/(1+q^{2n-1}) \\
&= \sqrt{2}p^{1/8} \prod_{n>0} (1+p^{2n})/(1+p^{2n-1})
\end{aligned}
$$

モジュラー変換$\tau \to -1/\tau$によって、摂動的方法では困難な臨界温度付近 q→ 1 (p →0)での振舞いがわかる点にこの結果の物理的な重要性がある。

## ２。face模型

局所状態数が２以上である一般の状況を考えよう。相互作用の入れ方として、各単位正方形(face)の四隅の配置(a,b,c,d) ごとに重みW(a,b,c,d) (Boltzmann weight) を与え、(大域的) 配置 s の実現確率を

$$p(s) = \prod W(a,b,c,d) \,/\, Z \qquad \text{(積は全てのfaceにわたる)}$$

と定めた物をface模型と言う。Ising 模型はW(a,b,c,d)＝exp(-E1ac) or exp(-E

2bd)ととったface模型とみなすことができる。face模型の１点関数は

$$Pa = \mathrm{Prob}(s_1 = a) = \Sigma\, \delta_{s1a}\, \Pi\, W(a,b,c,d) \;/\; Z$$

で定義される。この量は境界条件にsensitive に依存することに注意しておく。

face模型の可解性の条件として更に次の要請をおく。

＜要請＞W(a,b,c,d)はextra parameter u を含み、Yang-Baxter 方程式

$$W1(u)W2(u+v)W1(v) = W2(v)W1(u+v)W2(u)$$

を満たす。

ここに $W1(u)=W(u) \otimes I$, $W2(u)=I \otimes W(u)$, W(u)は $V \otimes V \otimes V$ ($V=\mathbb{C}^N$ ,Nは局所状態の数) における行列 $\Sigma\ W(a,b,c,d)\ Eaa' \otimes Ebd \otimes Ecc'$ を表す。

Ising 模型では一般のｎ点相関関数が求められているが、これには特殊な事情が効いており、上述の一般のクラスにはあてはまらない。しかし１点関数についてのみは、 Yang-Baxter方程式と２、３の付加条件の下にそれを求める独自のアルゴリズムが開発されている(Baxter[1]) 。われわれは以下この１点関数を主題とする。

## ３。１点関数と分岐係数

前節の問題は数学的には２つのステップにわけられる。

１）可解格子模型の構成、即ちYang-Baxter 方程式の解を見付けること。

２）その１点関数の計算。

この方向で最初の組織的な成果であるAndrews らの仕事[2] において、各自然数L(>3) に応じ、局所状態 si = 1,2,...,L-1 をもつ無限系列の模型がつくられ、モジュラー関数による１点関数の表示が与えられた（Ising 模型はL=4 の場合と

して含まれる）。その後２パラメタ(L,N) をもつ形に拡張される過程を通じて、この結果の持つリー環的な背景が解ってきた[3] 。これらの（拡張された）模型は次の様な構造をもっている。

i)局所状態の集合は、アフィン・リー環 $A_1^{(1)}$ の level L-2 の dominant integral weight 全体と同一視される。

ii) 隣り合う格子点上に許される局所状態 b,cは次の拘束条件を満たす。

b-c は $A_1 = sl(2)$ の N次対称テンソル表現のweight

言い換えればBoltzmann weight W(a,b,c,d) は(a,b),(b,c),(a,d),(d,c) が全て上の条件を満たす時に限り０でない。

Ising 模型と同様Boltzmann weightは楕円テータ関数 $\theta(u,q)$ によって表示され、q =0 が絶対零度、q=1 が臨界温度に相当する。

以下level r の最高weight a をもつ既約加群 L(a) の指標を記号 $\chi^{(r)}_a(z,q)$ によって表す。今 $\xi$ $\eta$ をそれぞれlevel $\ell$-N, N のdominant integral weightとする。このときリー環のペア( $A_1^{(1)} \oplus A_1^{(1)}$ , $A_1^{(1)}$ ) に付随して既約表現 L( $\xi$ ) $\otimes$ L( $\eta$ ) の分解が生じる：

$$\chi^{(\ell-N)}_{\xi}(z,q)\,\chi^{(N)}_{\eta}(z,q) = \sum b_{\xi\eta a}(q)\ \chi^{(\ell)}_a(z,q) \qquad , \qquad \ell = L-2$$

係数 $b_{\xi\eta a}(q)$ はbranching coefficient とよばれ、モジュラー関数になることが知られている。以上の言葉を用いて、求める１点関数の結果は次の形にまとめられる：

＜１点関数＞

$$Pa = b_{\xi\eta a}(q)\ \chi a(z,q) / \chi_{\xi}(z,q)\,\chi_{\eta}(z,q), \qquad z = \sqrt{q}$$

ここに$\xi\ \eta$は１点関数の定義における境界条件と対応している。

導出の詳細はここでは述べる事ができないが、Baxterの方法により、問題はリー環のweight lattice上のある種のpartition sum の計算に帰着する。

N=1 の場合上述の模型は、"minimal"unitary series と呼ばれる基本的なconformal field theoryと同一の臨界指数を格子上に実現している点で注目を浴びた。一般にbranching coefficient はVirasoro代数の指標（特にN=1 なら既約指標）になる事が知られているので、臨界指数の一致は上の結果のcorollary になる。しかし１点関数が何故branching coefficientsで記述されるのか、その理由は未だに不明である。

## ４。$X_n^{(1)}$ 型模型

前節の模型は更にリー環的な拡張が可能である。

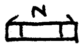
データとして、$X_n^{(1)}$ 型のアフィン・リー環、level $\ell$ ,およびclassical part Xn の有限次元既約表現$\pi$を与える。level $\ell$ のdominant integral weight全体を局所状態の集合にとり、隣接局所状態 b,cの間に拘束条件

b-c は　$\pi$　の weight

を要請する。

＜予想＞この設定の下にYang-Baxter 方程式の解が存在し、１点関数について同様の結果がなりたつ。

ただし、$\pi$のweight重複度が１を越え得る場合には定式化に修正を要する。（これについては本講演の(II)を参照。）現在解っている場合の表を下に掲げる(cf.[4])。

| 型 | $\pi$ | リー環のペア | level |
|---|---|---|---|
| $A_n^{(1)}$ |  | $(A_n^{(1)} \oplus A_n^{(1)}, A_n^{(1)})$ | $\ell$-N,N* |
| $A_n^{(1)}$ |  | $(A_n^{(1)} \oplus A_n^{(1)}, A_n^{(1)})$ | $\ell$-1,1* |
| $B_n^{(1)}$ | □ | ? | |
| $C_n^{(1)}$ | □ | $(C_\ell^{(1)} \oplus A_{2\ell-1}^{(1)}, C_\ell^{(1)})$ | $n$-1,1** |
| $D_n^{(1)}$ | □ | $(D_n^{(1)} \oplus D_n^{(1)}, D_n^{(1)})$ | $\ell$-1,1 |

* n=1 または N=1の場合以外は予想

** regime II

正確には今まで述べてきた結果は模型のBoltzmann weightが実になる領域のうちの一つ（regime III）に関するものである。他の領域でも知られている限りにおいて１点関数はモジュラー関数になるが、リー環のペアは異なったり、リー環的解釈を許さなかったりする[3] 。さらにC 型のregime IIIでは例外的にBaxterの方法を形式的に適用できない事情が生じており、事態は単純ではない。統一的な理解を模索しているのが現状である。

文献

[1]R.J.Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics,* Academic, 1982.

[2]G.E.Andrews,R.J.Baxter and P.J.Forrester,Eight-vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan identities,J.Stat.Phys.35(1984)193-266.

[3]E.Date,M.Jimbo,A.Kuniba,T.Miwa and M.Okado, Exactly solvable SOS models,I, Nucl.Phys.B290[FS20](1987)231-273; II,Adv.Stud.Pure Math.16(1988)17-122.

[4]M.Jimbo,T.Miwa and M.Okado, Solvable lattice models related to the vector representation of classical simple Lie algebras,Commun.Math.Phys. 116(1988)507-525.