数理解析研究所講究録
第675巻 1988年 181-222



# 楕円曲面のモノドロミー

京大数理研 成木勇夫 (Isao Naruki)

序. K3曲面の族を研究すれば、それは必然的にIV型領域の幾何と関係する。何故なら周期写像はパラメター空間から20次元IV型領域への多価写像になっているからである。そして、この写像のイメージが何であるかを調べることが興味の尽きない問題なのである。特に曲面族が良いものであれば、イメージは低次元の対称領域となるであろう。理論的に一挙に、この20次元のパラメターを持つK3曲面族を取扱うことが可能ならば理想的なのだが、よく知られているように代数的に方程式を書き下すことのできるものは19個のパラメターを持つに過ぎない。この19次元族を取扱うことも、その高次元性のため非常な困難が伴う。今まで詳しい研究が可能であった対象が構造が或意味で明確であって具体的に与えることの出来るものに限られているのは、むしろ自然なことであろう。構造が明確であると言うことを正確に言うと、複素1次元の代数的サイクルが沢山あると言うことである。K3曲面の場合、

このようなサイクルの上での周期積分は零となり無視してよく、これが実際よく現れるK3曲面族において、パラメターの数が減る理由であった。曲面が依存している本質的パラメターは、2次コホモロジー群における、代数的サイクルの加群の直交補空間 --- 超越サイクル加群と呼ばれる --- 上の周期積分として現れるのである。これらは結局、周期写像のイメージの上での座標と言うべきものであるが、周期写像の多価性を統制しているものがモノドロミー群であり、状況が良い場合は最初の曲面族のパラメター空間~~とは~~は、周期写像のイメージである低次元対称領域のモノドロミー群による商となっている。所で、この周期写像~~も、その~~のイメージも、このイメージと元のパラメター空間とのギャップを記述するモノドロミー群も、殆ど超越サイクル加群とその上の交叉形式によって統制されていると言っても過言でない。実際、この整二次形式に附随する算術的直交群の有限指数の部分群としてモノドロミー群は決っている。従って、越超サイクル加群の構造を明かにすることと、その上の交叉形式を計算することが最重要課題となってくる。では、このような計算を可能にするデータは何であろうか？ 一般のK3曲面に対してこの問の解答を与えることは困難であろうが、我々のこ

ここでの目的は、考察の対象をK3楕円曲面に限れば、求められているデータを与えることが出来ることを示すことにある。代数サイクル加群の階数が5以上ならば、K3曲面は楕円曲面となってしまうことが知られているので、この仮定は、当面我々が遭遇するようなK3曲面族に対して一般性を失うことがない。ここで結論を端的に言うと、上に言うデータは、K3楕円曲面に対しては、それの楕円曲線族としてのモノドロミーであって、これから超越サイクル加群も、その上の交叉形式も計算できるのである。混乱を避けるため、ここで登場した二つのモノドロミーを明確に区別しておかねばならない。我々はK3楕円曲面族を扱うのであるが、各々の曲面はそれ自身、楕円曲線の1次元族としてのモノドロミーを持っている。これを以下では楕円モノドロミーと呼ぶ。他方、我々はまたそのような曲面の族を扱っているので、曲面がこの族の中を動くときのモノドロミーをも考察しなければならないのである。こちらには特別の名称は与えない。この二つのモノドロミーが超越サイクル加群上の交叉形式を通して密接に関連し合っていることが、この小論での中心課題なのである。

## 1. 楕円曲面のトポロジーとモノドロミー.

$\mathbb{C}$上のコンパクト非特異曲面 $S$ からコンパクト非特異曲線 $\Delta$ 上への projection $\pi$ が与えられていて，次の条件を満すとする。

(1) $\Delta$ の有限個の点の集合 $\Sigma=\{p_1, p_2, \cdots, p_r\}$ を除けば，その他の点の $\pi$ による逆像は非特異楕円曲線である。

(2) $\pi$ のどのファイバーも第1種例外曲線を含まない。

このような構造の与えられた曲面 $S$ ---- 正確に言うと対 $(S, \pi)$ ---- を楕円曲面と呼ぶ。点集合 $\Sigma$ については，その各点 $p_i$ の逆像 $F_i := \pi^{-1}(p_i)$ が特異点を持つ曲線であると仮定しても勿論構わない。$F_1, F_2, \cdots, F_r$ は $S$ の特異ファイバーと呼ばれる。序で述べた $S$ 即ち $(S, \pi)$ のモノドロミーは補集合 $\Delta^* := \Delta - \Sigma$ の1点 $p_0$ を基点として選べば，準同型

$$\rho : \pi_1(\Delta^*, p_0) \longrightarrow Aut(H^1(\pi^{-1}(p_0), \mathbb{Z}), \langle , \rangle) \cong SL(2, \mathbb{Z})$$

として定まる。但し，$\langle , \rangle$ は楕円曲線 $\pi^{-1}(p_0)$ 上の交叉

形式である。右辺における同型は $\pi^{-1}(p_0)$ の適当な1-サイクルを(コホモロジーの)基底として選べば定まる。以下においては、このような基底の指定を既に行ったとして、$\rho$ を基本群 $\pi_1(\Delta^*, p_0)$ から行列群 $SL(2,\mathbb{Z})$ への準同型として理解することにする。特異ファイバー $F_i$ を一つ取ったとき、それが載っている $\Delta$ 上の点 $p_i$ を(時計と反対方向に)一周する道は基本群の一つの共役類としてしか定まらない。この共役類の $\rho$-像を含む $SL(2,\mathbb{Z})$ の共役類は、$F_i$ を回る局所モノドロミーのタイプと呼ばれる。
楕円曲面の概念は、言うまでもなく小平によって導入され、特異ファイバーの型、対応する局所モノドロミーのタイプの分類が実行され、それらと曲面の大域的不変量との関連なども完全に明かにされた。以下では、これらの知識を全て前提して議論を進める。もちろん、特異ファイバーの既約成分は全て代数サイクルであり、これらで生成される $H^2(S,\mathbb{Z})$ の部分加群 --- 以下 $\mathfrak{F}$ と記す --- の構造、特にその上の交叉形式は、予め特異ファイバーのリストがあれば、小平の分類より直ちに判るのである。我々にとって重要なのは、$\mathfrak{F}$ とその上の交叉形式とは、或る複素半単純リー環のルート格子とその上のキリング形式と同型となっていることである。(正確に言うと、加群 $\mathfrak{F}$ において

個々のファイバー $F_i$ から来る部分 $\mathfrak{F}_i$ は、このリー環の単純成分と対応している。）では、$\mathfrak{F}$ に対して相補的部分、即ち $\mathfrak{F}$ の $H^2(S,\mathbb{Z})$ における直交補空間は何によって記述されているであろうか、と言う疑問が生ずる。この相補的部分が何故重要かと言うと、ここに超越サイクル加群が含まれているからである。所で、この相補加群は $\mathfrak{F}$ によって、従ってファイブレイション $\pi: S \to \Delta$ によって決っている対象であるから、写像 $\pi$ に対して定義できるルレーのスペクトル系列を使えば計算できる筈のものである。理論を簡単にするため、次の仮定をおく。

(*) $S$ は少くとも一つの大域切断 (global section) を持つ。即ち $\exists\ s_0 : \Delta \to S$ such that $\pi \circ s_0 = id_\Delta$.

このときは $H^2(S,\mathbb{Z})$ の中に、$s_0$ の $\overbrace{\text{類}}^{\text{コホモロジー}}$ $[s_0]$ と、一般ファイバーの類 $F$ とで生成される加群 $L_0$ が決まる。

$$L_0 := \mathbb{Z}\cdot[s_0] + \mathbb{Z}\cdot F$$

この加群上の交叉形式は unimodular だから、$H^2(S,\mathbb{Z})$ は $L_0$ とその直交補空間の和に完全に分解する。

$$H^2(S,\mathbb{Z}) = L_0 + L_0^{\perp}$$

また $\mathfrak{F} \cap L_0 = \mathbb{Z}\cdot F$ であるから，$\check{\mathfrak{F}} := \mathfrak{F}/\mathbb{Z}\cdot F$ が $L_0^{\perp}$ に埋め込まれる。また $F^2 = 0$ であるから $\mathbb{Z}\cdot F$ は丁度 $\mathfrak{F}$ の radical である。（上で $\mathfrak{F}$ 自身が半単純リー環のルート格子と同型であると言ったが，これは間違いで，正確には $\check{\mathfrak{F}}$ のことである。$\check{\mathfrak{F}}$ の単純成分は $\check{\mathfrak{F}}_i := \mathfrak{F}_i/\mathbb{Z}\cdot F$ である。）このことから，$\mathfrak{F}$ 上の交叉形式は $\check{\mathfrak{F}}$ の交叉形式を導くが，これは $\check{\mathfrak{F}} \hookrightarrow L_0^{\perp}$ によって導かれたそのと一致する。我々は次の部分加群を $\mathfrak{F}$ に対する相補的部分と見るのである。

$$\check{\mathfrak{F}}^{\perp} := \check{\mathfrak{F}} \text{ の } L_0^{\perp} \text{ における直交補空間}$$

紙面の関係で詳細を一切省くが，スペクトル系列は次の同型を導く。

$$\check{\mathfrak{F}}^{\perp} \cong E_2^{1,1} = H^1(\Delta, R^1\pi_*\mathbb{Z})$$

制限 $R^1\pi_*\mathbb{Z}|\Delta^*$ は局所定数層であり，これに附随する

モノドロミーが準同型 $\rho$ であった。局所コホモロジーの完全列を使えば、上の同型の右辺は（制限写像によって）$H^1(\Delta^*, R^1\pi_*\mathbb{Z})$ に埋め込むことができ、しかもそれを準同型 $H^1(\Delta^*, R^1\pi_*\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2_\Sigma(\Delta, R^1\pi_*\mathbb{Z})$ の核として特徴づけることができる。$\Delta^*$ の普遍被覆は contractible であるから、次の同型がある。

$$H^1(\Delta^*, R^1\pi_*\mathbb{Z}) \cong H^1(\Gamma, L)$$

但し、ここで、右辺は群コホモロジーで $\Gamma := \pi_1(\Delta^*, p_0)$, $L$ は $\rho$ によって $\Gamma$-module と見た $H^1(\pi^{-1}(p_0), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ のことである。こうして、$H^1(\Delta^*, R^1\pi_*\mathbb{Z})$ は楕円モノドロミー $\rho$ による代数的記述を持つことが判った。他方、$H^2_\Sigma(\Delta^*, R^1\pi_*\mathbb{Z})$ は上の完全列を局所化すれば加群 $\bigoplus L/(\gamma_i - 1)L$ と同型であることが判る。ここで $\gamma_i$ は $p_i$ を回る適当な道の基本群における類とする。上の準同型はコサイクルの制限によって得られるので結局次の同型が得られたことになる。

$$\mathfrak{F}^{\perp} \cong \bar{H}^1(\Gamma, L) := \bar{Z}^1(\Gamma, L) / B^1(\Gamma, L)$$

ここで $B^1(\Gamma, L)$ は $L$ に係数を持つ1次 $\Gamma$-コバウンダリーの空間であって $\bar{Z}^1(\Gamma, L)$ は次のように定義される。

$$\bar{Z}^1(\Gamma, L) := \left\{ c \in Z^1(\Gamma, L) ;\ \underset{i=1,2,\cdots,r}{c(\gamma_i) \in (\gamma_i - 1)L} \right\}$$

$Z^1(\Gamma, L)$ は同様の $\Gamma$-コサイクルの空間である。
$\bar{H}^1(\Gamma, L)$ を境界条件付1-コホモロジー群と呼ぶ。

2. $\check{\mathfrak{F}}^\perp \cong \bar{H}^1(\Gamma, L)$ 上の交叉形式.

第一節の議論によって相補加群 $\check{\mathfrak{F}}^\perp$ の楕円モノドロミーによる記述が可能となった。しかしこれは唯加群として決ったのであり、この上の交叉形式が何であるか判った訳ではない。ここでは詳細な議論を一切省いて、交叉形式の代数的記述のみを与える。(成木[7]を参照) 先ず、$\langle\ ,\ \rangle : L \times L \to \mathbb{Z}$ から決まる普通の cup 積
$H^1(\Gamma, L) \times H^1(\Gamma, L) \longrightarrow H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$ がどのように定っているか反省する (Cartan-Eilenberg [1])。コサイクル $a, b \in Z^1(\Gamma, L)$ に対して、それらのクラスの積を表すコサイクル $a \cap b$ は次式で与えられる。

$$(a \cap b)(x, y) := \langle a(x), x\, b(y) \rangle \qquad x, y \in \Gamma$$

今の場合 $H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) = 0$（∵ $S$は少くとも一つの特異ファイバーを持つとしているから $\Gamma$ は自由群）であるから $a \cap b$ は $\mathbb{Z}$ 係数 2-コバウンダリーでなければならない。即ち写像 $d : \Gamma \to \mathbb{Z}$ があって

$$(a \cap b)(x, y) = d(x) + d(y) - d(xy)$$

と書ける。このような写像 $d$ の ambiguity は $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\Gamma/[\Gamma, \Gamma], \mathbb{Z})$ であるので、次の和は $d$ の取方に依存しない。

$$S(a, b) := -\sum_{i=1}^{r} d(\gamma_i)$$

ここで $\gamma_i$ は $F_i$ に対応する局所モノドロミーの代表元であった。当然のことながら、次の疑問が生ずる。$S(a, b)$ は確に $a, b$ に関して双線型であるけれど、果して代表系 $\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r\}$ の取方に依存していないだろうか、或は、この和は $a, b$ のコホモロジー類によって決っているのだろうか？これらに対する答は勿論ノーである。従って我々は $-d(\gamma_i)$ に対して何らかの補正項

を要するのであるが、この補正項が前節でコサイクルに課した境界条件 $a(\gamma_i),\ b(\gamma_i)\in(\gamma_i-1)L$ より出て来るのである。即ち、各 $i=1,2,\cdots,r$ に対して、

$$a(\gamma_i)=(\gamma_i-1)\,a_i \qquad b(\gamma_i)=(\gamma_i-1)\,b_i$$

が成立つような $a_i,\ b_i\in L$ が存在するのであるが、これを使って我々は

$$\Delta(\gamma_i):=\langle a_i,\ b(\gamma_i)\rangle=\langle a(\gamma_i^{-1}),\ b_i\rangle$$

と置く。これが $a_i,\ b_i$ の取方に寄らないことは、第二の等号から明かである。こうすると差 $\Delta(\gamma_i)-d(\gamma_i)$ は $\gamma_i$ をその任意の共役で置き換えても変らない量となるのである。

$$\Delta(x\gamma_i x^{-1})-d(x\gamma_i x^{-1})=\Delta(\gamma_i)-d(\gamma_i)$$

そこで

$$\tilde{I}(a,b):=\sum_{i=1}^{r}\left(\Delta(\gamma_i)-d(\gamma_i)\right)$$

とおくと、これは $a, b$ に関して対称且双線形であり、$a$ 又は $b$ が $B^1(\Gamma, L)$ に属するときは零となることも証明されるのである。

命題 2.1. $Z^1(\Gamma, L)$ 上の二次形式 $\hat{I}$ は $\bar{H}^1(\Gamma, L) \cong \mathfrak{F}^{\perp}$ 上の二次形式を自然に導く。また $\hat{I}, I$ は $\Gamma$ の $L$ 上の表現と、$\Gamma$ における $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ の共役類を全体として保存する $\Gamma$ の自己同型によって不変である。

この命題の第二の主張をもっと明確に定式化する。$C(\gamma_i)$ を $\Gamma$ における $\gamma_i$ の共役類とする。このとき $\Gamma$ の自己同型 $\alpha$ が $(L, \mathfrak{C})$-許容的であるとは、二条件

(i) $\alpha(x)u = xu \quad (x \in \Gamma,\ u \in L)$.

(ii) $\exists\, \sigma$: permutation of $\{1, 2, \cdots, r\}$ such that

$$\alpha(C(\gamma_i)) = C(\gamma_{\sigma(i)}).$$

が成立つとき言う。ここに $\mathfrak{C}$ は順序のついた組 $(C(\gamma_1), \cdots, C(\gamma_r))$ を指すものとする。このような自己同型全体は勿論 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ の部分群である。

$$A(L, \mathcal{C}) := \{ \alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma) ;\ \alpha : (L, \mathcal{C})\text{-許容的} \}$$

この群は明かに $\bar{H}^1(\Gamma, L)$ に作用する。(境界条件 $c(\gamma_i) \in (\gamma_i - 1)L$ は $\gamma_i$ をその共役に置き換えても変らないことに注意。) 命題2.1 はこの $A(L, \mathcal{C})$ から直交群 $\mathrm{Aut}(\bar{H}^1(\Gamma, L), I)$ の中への自然な準同型があることを言っている。所で、二次形式 $I$ は全く代数的に定義されたのであるが、これがアプリオリに非退化であると言う保証はない。今の所 $\Gamma$-加群 $L$ が、楕円モノドロミーの表現である場合にのみ、$I$ は $\check{\mathfrak{F}}^{\perp}$ 上の交叉形式と同一視され、非退化であることが判るのみである。いずれにせよ、我々の目的にはこれで十分なのである。

<u>命題 2.2.</u> <u>二次形式 $I$ は $\check{\mathfrak{F}}^{\perp}$ 上の交叉形式と一致する。</u>

最後に、命題2.1 で述べられた $I$ の自然性は $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \check{\mathfrak{F}}^{\perp}$ が一定であるような楕円曲面族が与えられたとき、その $\check{\mathfrak{F}}^{\perp}$ 上のモノドロミー表現を完全に明かにするものである。実際、幾何学的に、パラメター空間の基本群から $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ への準同型が定まるが、これは

必ず部分群 $A(L, e)$ を経由するからである。こうして，この基本群から算術的直交群 $\mathrm{Aut}(\bar{H}^1(\Gamma, L), I) = \mathrm{Aut}(\check{F}^{\perp}, I)$ への準同型が自然に求められるのである。

## 3. 有理楕円曲面からのK3曲面の構成．

序で既に述べたように，我々の興味は比較的簡単なK3曲面の族を実際に与えて，そのパラメター空間を対称空間の商として記述すると言うことであった。それではどのようにして，そのような曲面族を具体的に構成するかが問題になる。ここで提出する一方法は，有理楕円曲面族を与えて，その二重被覆であるようなK3楕円曲面の族を考えると言うものである。ファイバー同志が互に対応するようにしたいので，二重被覆を作る際の分岐曲線として二つのファイバーを選ぶと言うのは自然な考えである。即ちここで言う二重被覆とは基底曲線の取換である。$S$ が有理楕円曲面のとき基底曲線 $\Delta$ は $P_1(\mathbb{C})$ と同型であるので，$\Delta$ の任意の二点に対して，それらにおいて分岐する二重被覆は常に存在し、それはまた $P_1(\mathbb{C})$ と同型になる。所で有理楕円曲面の幾何は，例外リー代数 $E_8$ のルート系を通して概観するのが最も妥当であろう。先ずこのことを説明

する。前節で考察された楕円曲面 $S$ は有理曲面であると仮定する。このとき $K^2=F^2=0$ $(K=-F)$ だから $S$ のオイラー数は12であり、これは特異ファイバーのオイラー数の和に等しい。また, $H^2(S,\mathbb{Z})\cong H_2(S,\mathbb{Z})$ は代数的サイクルによって生成され, 交叉形式の符号は $(1,9)$ となる。従って前節で導入した $L_0=\mathbb{Z}\cdot[s_0]+\mathbb{Z}\cdot F$ の直交補空間 $L_0^{\perp}$ は $\mathbb{Z}$ 上階数8であって、その上の交叉形式は負定値, even, unimodular 即ち、$E_8$ のルート格子 $L(E_8)$ 上のキリング形式と同型である。古典的には既に Kantor, Coble によって知られ、近年 Pinkham, Looijenga 等によって再び取上げられた周期写像の理論は $S$ 及びその上の一つのファイバー $D$ ---- これは今の場合、反標準因子なのであるが ---- を固定し $(S,D)$ のモジュライ(の記述)を対象とする。もっと正確に言うと、1次元アーベル多様体 $E$ を固定し、同型 $\varepsilon: Pic(D)\xrightarrow{\sim} E$ が存在するような因子のみを考え, また $\varepsilon$ のみならず等長同型 $\alpha: L(E_8)\xrightarrow{\sim} L_0^{\perp}$ も指定されている対象 $(S,D,\varepsilon,\alpha)$ のモジュライ空間を考えるのである。$L(E_8)\xrightarrow{\sim} L_0^{\perp}$ に属する因子を, $D$ との交点を取ることによって $D$ 上に制限し、更にこれを $Pic(D)$ の元と見て $\varepsilon$ によって $E$ の中に送る。このことによって $(S,D,\varepsilon,\alpha)$ の同型類に対して、アー

ベル多様体 Hom $(L_1(E_8), E)$ --- Eの8個の直積と同型 --- の元が一つ定まる。上に挙げた理論の主定理は、この対応によって上記のような)フレイム付有理楕円曲面のモジュライ空間がこのアーベル多様体と同一物となることを言っているのである。さて，ここでSの特異ファイバーのタイプを統制している加群 $\check{\mathfrak{F}}$ は上記準同型 $L_1(E_8) \cong L_0^{\perp} \to E$ によって零化されることに注意する。実際これはこの写像の核となっている。又，$\check{\mathfrak{F}}$ は同型 $L_1(E_8) \cong L_0^{\perp}$ によって $E_8$ の部分ルート系と対応している。$E_8$ の部分ルート系を固定することとSの特異ファイバーのタイプを決めることがほぼ同値なこととなるのである。有理楕円曲面Sに対して~~越~~超サイクル加群はもちろん零であるけれども，相補加群 $\check{\mathfrak{F}}^{\perp}$ は一般に残っており，また上の周期写像の構成から判るように，この加群の階~~群~~数が部分ルート系を固定を固定したときのフレイム付有理楕円曲面族のパラメターの数なのである。それでは一体この相補的加群 $\check{\mathfrak{F}}^{\perp}$ の幾何学的意味は何かと言うと、これは大域切断全体のなす加群 --- $s_0$ を零元としている。以後切断加群と呼ばれる --- に他ならないのである。(正確に言うと，切断加群は商加群 ~~$H^2(S, \mathbb{Z})$~~ $L_0^{\perp}/\check{\mathfrak{F}}$ に同型であって $\check{\mathfrak{F}}^{\perp}$ はその中で有

限指数である。) 結局、上に述べた Kantor-Coble-Pinkham-Looijenga の理論の主張していることは、フレイム付有理楕円曲面は、その上に指定されている因子 $D \cong \mathrm{Pic}(D) \cong E$ を大域切断が横ぎる点を並べたものによって決っている、と言う至極尤もなことだったのである。このことは、もっとハッキリした形で、最終節の例に即して見ることになるであろう。さて第二節では、相補加群 $\check{\mathcal{F}}^{\perp}$ をコホモロジー群 $H^2(S,\mathbb{Z})$ 全体の中で考えたのであるが、有理楕円曲面のときは、後者は代数サイクル加群と一致している。しかし一般の場合、代数サイクル加群は全コホモロジー群と一致しないとしても、それは加群 $L_0$ 及び $\mathcal{F}$ を含んでいる。従って我々は、この加群の $L_0$ に対する相補的部分 ($\subseteq L_0^{\perp}$) を考えることが出来、$\check{\mathcal{F}}$ はこの中に含まれている。よって我々は、$\check{\mathcal{F}}$ の ($L_0^{\perp}$ 全体ではなく) この相補的部分における直交補空間を考えることが出来る。この直交補空間 --- これを $\mathcal{S}'$ と書くことにする --- が、一般の場合、切断加群の指数有限の部分加群なのである。~~この辺の~~ (切断加群に関するこのたぐいの命題は本質的に塩田 [10] に負うものである。) 構成の仕方から $\mathcal{S}'$ は $\check{\mathcal{F}}^{\perp}$ の部分加群である。そして、$\mathcal{S}'$ の $\check{\mathcal{F}}^{\perp}$ における直交補空間~~は~~が

超越サイクル加群なのである。こうして，超越サイクル加群の構造が決った。結局，この加群は相補加群 $\mathfrak{S}^{\perp}$ と切断加群とによって本質的に決まると言う主張が得られた。前者は楕円モノドロミーによって決まる。$\mathfrak{S}'$ 或は切断加群の決定は一般には困難を伴うが，初めに言った方法で有理楕円曲面からK3楕円曲面~~から~~を作ったとき，後者の曲面に対しては $\mathfrak{S}'$ が定まるのである。我々の二重被覆構成に，分岐曲線は二つのI型特異ファイバーであると言う制限を設ける。（このような制限の下では，曲面の依存するパラメターの数は保たれることに注意。）詳しい議論は一切省略するがこの仮定の下に，$\mathfrak{S}$ に相当する $E_8$ の部分ルート系を固定したとき得られる有理楕円曲面族の一般元に対しては，二重被覆構成の際，切断加群の階数は保存されることが証明される。即ち，被覆K3曲面における切断は，有限指数性を無視すれば，元の有理曲面の切断の自然な持上げによって尽される，と言うことが証明されるのである。被覆K3曲面の楕円モノドロミーも，元の有理曲面の楕円モノドロミーから，分岐特異ファイバーの指定により，原理的に決っているから，結局有理楕円曲面の楕円モノドロミーのみから，被覆K3曲面の

超越サイクル加群と、その上の交叉形式とが計算可能となったのである。結局、我々は次のようなK3曲面の構成原理に到達した。

(1) $L(E_8)$の部分ルート系を指定し、$\check{F}$がこれと同型となるような有理楕円曲面の族を構成する。この族のパラメーター空間の次元は，部分ルート系の余階数に等しい。

(2) この有理曲面族からK3曲面族を作るため，二重被覆の分岐曲線として二つのI型の特異ファイバーを指定する。この指定をするため，パラメーター空間を、その適当な有限被覆で置換える必要があるかも知れない。

(3) こうして出来たK3楕円曲面族において，超越サイクル加群の階数は最初に固定した部分ルート系の余階数プラス2に等しく，その上の交叉形式は even，非退化で，丁度2個の正固有値を持つ。

そして、この交叉形式が有理楕円曲面の楕円モノドロミーから計算されるのである。

## 4. 有理楕円曲面のモノドロミー.

さて，前節までの議論で、我々は全てが有理楕円曲面の楕円モノドロミーの決定に帰することを見た。この節ではこの課題に従事することにする。最初に，決定の基本

原理となる考えを述べよう。我々は $E_8$ の部分ルート系を固定することによって特異ファイバーの取合せを決め、対応する有理楕円曲面族を考えたが、楕円モノドロミーは、或る意味の同値性を除いて、族に属する全ての曲面に対して一意的に決っている筈である。従って我々は族の中から"都合の良い"曲面を選んでその楕円モノドロミーを調べればよい。我々は先ず曲面が"実"であることを要求する。モノドロミー決定のもう一つの原理は、この実のカテゴリーの中での"unfolding"である。即ち、楕円曲面のどのように複雑な特異ファイバーも最も簡単な $I_1$ 型のファイバーがいくつか合流して出来たものと考えるのである。実のカテゴリーの中で合流を考えているので、特異ファイバーは一直線に並んでおり、議論は非常に簡単になる。例えば、合流した先の特異ファイバーに対するモノドロミー行列は、そこに集って行く $I_1$ 型ファイバーに附随するモノドロミーを並んでいる順に掛け合せれば求まるのである。このような事情により、$I_1$ 型ファイバーのみを持つ実曲面の楕円モノドロミーのみを決定すれば、どのような特異ファイバーの合流が可能かは全く算術的に判り、全ての可能な楕円モノドロミーが求められることに

なるのである。さて、ここで、これらのことの厳密な定式化のため，$\pi: S \longrightarrow \Delta \cong P_1(\mathbb{C}):(t_1, t_2)$ を有理楕円曲面とし，これに対して，Weierstraß-Kodaira-Kas の標準形を導入する．

$$y^2 = x^3 - 3p(t)x + 2q(t)$$

ここに、$p=p(t)$，$q=q(t)$ は夫々 $t=(t_1, t_2)$ の4次，6次の同次多項式であって，古典的不変量 $g_2$，$g_3$ に対応するものである。（$S$ がこの方程式によって楕円曲線の1次元族として定義されているのは自明であろう。座標 $t$ の射影変換に応じて $x, y$ も然るべく変換される。この方程式は一般に特異点を持つが、それらは皆有理二重点であって，これらを解消すれば，普通の意味の楕円曲面が得られる。特異点は特異ファイバーに寄与するが，逆は一般に成立たない。）さて $S$ が "実" であるとは，上に導入した $p$，$q$ が実係数多項式となるような同次座標 $t=(t_1, t_2)$ が存在し，判別式

$$D = D(t) := p(t)^3 - q(t)^2$$

の零点が全て実軸 $P_1(\mathbb{R})$ の上に載っていると言うこととする。又、$S$ が "<u>generic</u>" であるとは、$D(t)=0$ が全て単根のみを持つと言うこととする。
以下、有理楕円曲面 $S$ は実且 generic であると仮定する。リーマン球 $P_1(\mathbb{C})$ は $P_1(\mathbb{R})$ によって上下二つの半球に分れるが、例えば $a_0=\sqrt{-1}$ を北極と思い、又 $\Delta^*$ の基本群の基点としよう。更に $a_1, a_2, \cdots, a_{12} \in P_1(\mathbb{R})$ を判別式 $D$ の零点即ち $F_i=\pi^{-1}(a_i)$ が $S$ の特異ファイバーであるような点とする。又、$a_0$ を時計と反対方向に一周するとき $a_i$ はこの順に並んでいるとする。$\gamma_i$ $(i=1, 2, \cdots, 12)$ は $a_0$ を出発して測地線に沿って $a_i$ に到り、その点を反時計回りに一周して戻って来る道とし、$\pi_1(\Delta^*, a_0)$ の元であると思う ($\Delta^* := \Delta - \{a_1, a_2, \cdots, a_{12}\}$)。又、$M_i$ を $S$ の楕円モノドロミー $\rho : \pi_1(\Delta^*, a_0) \longrightarrow SL(2, \mathbb{Z})$ による $\gamma_i$ の像とする。仮定により行列 $M_i$ は全て次と共役である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_i$ は上半平面 $H = \{ z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Im}(z) > 0 \}$ に作用し、その境界 $P_1(\mathbb{R})$ ――これは $\Delta$ の赤道とは区別しなければならない―― の有理点集合 $P_1(\mathbb{Q})$ の中に唯一つの固定点を持つ。$M_i$ はその固定点によって決まる、即ち、固定点を $(p_i, q_i)$ $(p_i, q_i \in \mathbb{Z},\ \gcd(p_i, q_i) = 1)$ とすれば、

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 - p_i q_i & p_i^2 \\ -q_i^2 & 1 + p_i q_i \end{pmatrix}$$

と書ける。逆に，$P_1(\mathbb{Q})$ 上の点 $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \cdots, (p_{12}, q_{12})$ が与えられたとき，上の行列 $M_i$ が等式

(4.1) $\quad M_1 M_2 \cdots M_{12} = 1$

を満していれば $\pi_1(\Delta^*, a_0)$ の $SL(2, \mathbb{Z})$ の中への表現が決まることになる。それでは $P_1(\mathbb{Q})$ の点 $x_i = (p_i, q_i)$ はどのようにして決っているのだろうか？この問の答は，楕円モノドロミーの意味を考えると，おのずから与えられる。我々は楕円曲面 $S$ の不変量

$$j(t) := p(t)^3 / D(t)$$

を $\Delta \cong P_1(\mathbb{C}) : t$ 上の有理函数として得るが、これを古典的な楕円モジュラー函数

$$J(\tau) := g_2(\tau)^3 / (g_2(\tau)^3 - 27 g_3(\tau)^2)$$

とを比較することによって閉上半球 $\Delta_+^*$ を閉上半平面 $H \cup P_1(\mathbb{R})$ に写すことができる。(この際丁度 $\Delta_+^* = \Delta_+ - \{a_1, \cdots, a_{12}\}$ が $H$ 内に写される。) 即ち $j(t) = J(\tau(t))$ となるよう $\tau(t)$ を連続的に定める。このとき有理点 $x_i$ は丁度 $a_i$ の像なのである。$j$ は赤道上実数値を取るので、$J$ の性質から区間 $I_i := [a_i, a_{i+1}]$ の像は或る $H$ の 測地線の閉苞に含まれる。この測地線は $GL(2, \mathbb{Z})$ の或る鏡映の固定点集合となっている。この鏡映を $\sigma_i$ と書けば、モノドロミー行列の表現

$$M_i = \sigma_{i-1} \sigma_i$$

が得られる。但し、ここで添数集合は巡回群 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

であると思うことにする。$x_i$ は測地線 $\mathrm{Fix}(\sigma_{i-1})$, $\mathrm{Fix}(\sigma_i)$ の共通の端点である。$M_i$ は $x_i$ によって決ってしまうから, $\sigma_i$ は $\sigma_{i-1}$ と $x_i$ とによって決まる。$x_{i+1}$ は鏡映 $\sigma_i$ の境界 $P_1(\mathbb{R})$ における二つの固定点のうちのどれかであるが, 区間 $I_i$ の像が $\mathrm{Fix}(\sigma_i)$ と一致すれば, それは $x_i$ と異なる方であるし, そうでない場合は $x_i$ と一致する。前者の場合 $I_i$ は"完全", 後者の場合は"不完全"と呼ぶ。結局この議論で, 12個の区間 $I_1, I_2, \cdots, I_{12} = I_0$ のどれが完全で, どれが不完全であるかのデータが与えられていれば $\sigma_i, M_i, x_i$ は $\sigma_0$ とその固定点集合の端点 $x_1$ とから帰納的に構成されてしまうことが判った。残りは, この初期値を, $SL(2,\mathbb{Z})$ の作用を除いて, 決めることであるが, これは函数不変量 $g$ が開区間 $\mathring{I}_0 = (a_{12}, a_1)$ 上で正値であるか負値であるかによって決まる。この区間の二つの類別は交互に現れるから, $\mathring{I}_0$ 上で $g$ は正値であると仮定して一般性を失わない。従って我々は、$x_1 = (1, 0)$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と、この初期値を正規化しておいて支障ない。後は関係式(4.1)が満されているかどうかチェックすればよいだけとなる。こうして実且 generic な有理楕円曲面の楕円モノドロミーが完全に分類される。下に、12個の有理点の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_{12})$ の10個のパターン $B_i$ $(i=1,2,\cdots,10)$ を挙げる。

$B_1$ (1/0, -1/2, 0/1, -2/3, -1/2, -1/2, -1/2, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1)

$B_2$ (1/0, -1/2, -1/2, -1/2, -1/3, -1/1, -1/2, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1)

$B_3$ (1/0, -1/2, 0/1, 0/1, -1/1, -1/3, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1)

$B_4$ (1/0, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 1/0, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1)

$B_5$ (1/0, -1/2, -1/2, -1/4, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1)

$B_6$ (1/0, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 2/1, 1/0, 1/0, 1/0, 1/0)

$B_7$ (1/0, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 1/0, 1/0, -1/1, -1/1, 0/1, 0/1)

$B_8$ (1/0, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 1/1, 1/1, 1/0, 1/0)

$B_9$ (1/0, 1/0, 1/0, 1/0, -2/1, -2/1, -1/1, -1/1, -1/1, -1/1, 0/1, 0/1)

$B_{10}$ (1/0, 1/0, -1/1, -1/1, 0/1, 0/1, 1/0, 1/0, -1/1, -1/1, 0/1, 0/1)

定理 4.1. 実且 generic な有理楕円曲面のモノドロミー行列 $M_1, M_2, \cdots, M_{12}$ は上で述べたように定められているものとし，$x_i$ を $M_i$ の固定点とする。このとき組 $(x_1, x_2, \cdots, x_{12})$ は，$SL(2, \mathbb{Z})$ の元の作用と，巡回置換と変換

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{12}) \longleftrightarrow (-x_{12}, -x_{11}, \cdots, -x_1)$$

とを適当に組合せて作用させることによって，上に挙げた $B_1, B_2, \cdots, B_{10}$ のどれかに変形することができる。

最後に，この定理の変換は，上下の両半球を取換

る操作に対応し，$SL(2,\mathbb{Z})$の積の順序を入れ換える自己同型

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

に対応していることを注意しておく。又，行列式が$-1$であるような$GL(2,\mathbb{Z})$の元はそのままでは上半平面を保存しないので，反正則な変換

$$z \longmapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \qquad ad-bc=-1$$

として作用するものとしたことを断っておく。

## 5. 応用例

上で展開した方法がどの位具体的に実行可能なものであるかを示すために，$E_8$の部分ルート系$A_4+2A_1$を取り，これに対して定義される2個のパラメターを持つ有理楕円曲面族とそれから二重被覆によって派生するK3楕円曲面族とを扱って見る。（このような部分

ルート系は$E_8$のWeyl群の作用を除いて一意的。）この部分ルート系に属する一般の有理楕円曲面は$A_4$に相当する$I_5$型の特異ファイバー --- $I_5$ --- と$2A_1$に相当する2個の$I_2$型特異ファイバー --- $I_2', I_2''$ --- と、オイラー数の残りを埋める分だけの、即ち3個の$I_1$型特異ファイバー --- $I_1', I_1'', I_1'''$ --- とを持っている。（上で特に注意しなかったが、$I_1$型と$\mathrm{II}$型の特異ファイバーは既約であって、一般ファイバーのクラス$F$を法として考える時ファイバー加群$\mathfrak{F}$に何の寄与もしない。従って部分ルート系$\check{\mathfrak{F}} \subseteq L(E_8)$には、全然影響を与えない。これらは常にオイラー数の残部と考えられるべきものである。）このような曲面の楕円モノドロミーは前節で与えられたパターン$B_6$より派生する：$B_6$における有理点$x_1, x_2, \cdots, x_{12}$を固定点として持つ$I_1$型行列を$M_1, M_2, \cdots, M_{12}$とし、

$$M(I_5) := M_3 M_4 M_5 M_6 M_7$$

$$M(I_1') := M_8$$

$$M(I_2') := M_9 M_{10}$$

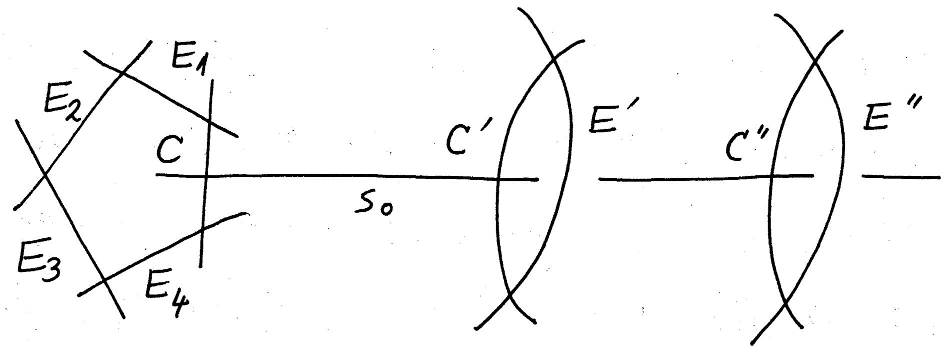
$$\mathcal{M}(I_2'') := \mathcal{M}_{11}\mathcal{M}_{12}$$

$$\mathcal{M}(I_1'') := \mathcal{M}_1$$

$$\mathcal{M}(I_1''') := \mathcal{M}_2$$

と置くと，これらが丁度夫々の型の特異ファイバーに対するモノドロミー行列となっている実有理楕円曲面が存在するのである。即ち $B_6$ はこの楕円曲面のモノドロミーに対して unfolding になっていると言うことである。（上の表示の右辺の積に現れる個々の行列は互に可換である。このことは特異ファイバーの合流先が I 型であるときは常に起る（成木 [5]）。）こうして楕円モノドロミーが完全に決ったから，後は，分岐特異ファイバーを指定すれば，二重被覆として派生するK3曲面の超越サイクル加群とその上の交叉形式とが自動的に計算できる。しかしこれについては後に結果だけ述べることにして，今は暫時，第3節で説明した考えに基いて，この部分ルート系に属する有理楕円曲面の依存している標準的パラ

メターを求めて見よう。先づ一個の大域切断 $s_0$ を固定し、これが $I_5$, $I_2'$, $I_2''$ と交わるときの夫々の既約成分を $C$, $C'$, $C''$ と書く。残りの既約成分も大文字 $E$ を使って図のように番号付ける。




このとき，これらの既約成分と次のような交わり方をする大域切断 $s'$, $s''$, $s'''$ が一意的に存在する。

$$s' \propto \{E_3, C', E''\}$$

$$s''' \propto \{E_3, C', C''\}$$

$$s'' \propto \{E_3, E', C''\}$$

ここで $A \propto B$ は曲線 $A$ と $B$ が交わることを意味する。さて我々はモジュライのパラメター を得るために，$I_1$ 型の特異ファイバー $I_1'''$ を選び，その非特異部分 $(I_1''')^*$ から $\mathbb{C}^*$ 上への同型 $\varepsilon$ を交点 $s_0 \cap I_1'''$ が丁度 $1 \in \mathbb{C}^*$

が対応するように取る。更に交点 $S'\cap I_1''$, $S''\cap I_1''$ の $\varepsilon$ による像を $s,t\in\mathbb{C}^*$ とすれば、この $s,t$ の組 ~~が~~ $(s,t)$ が、部分ルート系 $A_4+2A_1$ に属する有理楕円曲面族の標準的パラメターなのである。(交点 $S'''\cap I_1''$ の $\varepsilon$ による像は $(st)^{-2}$ となる。) ここで、我々はこの $(s,t)$ によっては残りの二つの $I_1$ 型特異ファイバーを区別することが出来ないことを注意しておかねばならない。このことは、もし我々がこのタイプの有理曲面族に対して、今選ばれた $I_1''$ ともう1つの $I_1$ 型ファイバー、例えば $I_1'$ とで分岐する二重被覆を構成しようと思うならば、考慮すべき微妙な問題となるのである。$I_1'$, $I_2''$ を明確に区別するために、我々は $(s,t)$-空間の次の二重被覆を取る。

$$x^2 = \frac{5(st+1)+4(s+t)}{st+1}$$

$(s,t)$ に $x$ を加えた空間の上で曲面族を考えてもよいが、これでは二重被覆構成に不必要な情報も含まれていて扱いが面倒になり過ぎる。例えば、$\varepsilon$ を $\varepsilon^{-1}$ に置き換えることは $(s,t)\longleftrightarrow(s^{-1},t^{-1})$ に対応しているし、$I_2'$ と $I_2''$ を入れ換えることは $(s,t)\longleftrightarrow(t,s)$ に対応し

ている。このような余分な情報を落すため，我々は

$$y = \frac{(st)^2+1}{st}$$

と置く。こうすると，$I_1', I_1''$ で分岐するような二重被覆としてのK3曲面族は、結局 $(x,y)$-平面上に定義されていると思ってよいことが判る。このK3曲面族の $(x,y)$-平面上の判別集合 --- ファイバー加群子の階数のあがる点集合 --- を求めると，それは1つの円錐曲線 $Q$ と6本の直線 $L_1, L_2, \cdots, L_6$ と1つの5次曲線 $C$ とから成立っている。

$$
\begin{aligned}
Q &: \quad x^2 - xy - 2y + 1 = 0 \\
L_1 &: \quad x - 2y + 1 = 0 \\
L_2 &: \quad x + 1 = 0 \\
L_3 &: \quad x - 3 = 0 \\
L_4 &: \quad y - 2 = 0 \\
L_5 &: \quad y + 2 = 0 \\
C &: \quad (x^2-5)^2(y+2) - 64 = 0
\end{aligned}
$$

但し，パラメター空間は $P_2(\mathbb{C})$ とし，$(x,y)$ はその非同次座

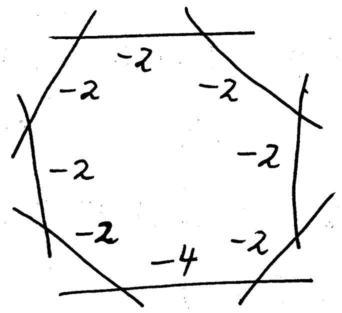
標，$L_6$は無限遠直線と考える。ここで，$L_3$を除いて，残りの曲線の合併を考え，これを$D$で表す。$D$は12次曲線である。この曲線を考える理由は，我々のK3曲面族に対する周期写像は$D$に沿って，その像 --- 今の場合，2次元IV型領域 $H\times H$ --- の直積構造から来る二つのフォリエイションを入れ換えるからである。このような入れ換えを消去するため，$P(\mathbb{C})$：$(x,y)$の$D$で分岐する二重被覆 --- $B$と書く --- を作る。$B$は有理的でないので，これに適当な座標を与えることは止めることにするが，$B$の最小特異点解消$\hat{B}$における例外集合及び上記8曲線の逆像の固有変換の交わり方を完全に記述することができる。12次曲線$D$の特異点のうち，対応する$B$の特異点が有理二重点でないのは，次の4点のみである。

$$p_1 := (-1,2,1)$$
$$p_2 := (1,0,1)$$
$$p_3 := (0,1,0)$$
$$p_4 := (3,2,1)$$

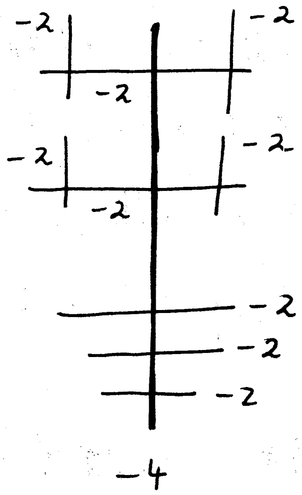
ここで，$(\xi,\eta,\zeta)$は$P_2(\mathbb{C})$の同次座標である：$x=\xi/\zeta$，

$y=7/5$. $p_1$ 及び $p_2$ 上の例外集合は有理曲線のサイクルであって，全く同じ形をしている：

$\mathcal{S}$ :




これは尖点（cusp）型の特異性であり，コンパクト化より生ずるものである。$p_3$ 上の例外集合は有理曲線の tree であって，




なる形をしているが，直中の太線に沿っては周期写像の分岐は起らない。残りの曲線は，2個の $A_3$ 型と、

3個の$A_1$型例外集合を与える。$p_4$上の例外集合は自己交点数$-2$の楕円曲線であって、これに沿っても周期写像の分岐は起っていない。Dの残りの特異点からは$\hat{B}$上の10個の$A_1$型例外集合と、2個の$A_3$型例外集合を与える。また、Dのうちに含まれていない直線$L_3$の固有変換は自己交点数$-2$の有理曲線であって、これもまた$A_1$型の例外集合と見なせる。結局$\hat{B}$上に互に交わらない14個の$A_1$型例外集合と4個の$A_3$型例外集合と2個の尖点型例外集合とが得られたことになる。そこで、$\hat{B}$からこの尖点型集合を取除き、残りの有理二重点型例外集合を夫々1点にblow downしたものを$\check{B}$とすると、これは最早コンパクトではないが商型特異点ばかり持っている。この$\check{B}$が、領域$H \times H$の、モノドロミー~~族~~群による商となるのである。(実際、上に与えたデータによって、$\check{B}$に対する拡張された意味でのchern numbersのproportionalityが成立していることが~~を~~直に確められる。)

最後に、このK3曲面族に附随するモノドロミー群を記述してこの小論を終えることとする。この節の始めに、元の有理楕円曲面族に対してモノドロミー行列$M(I_5)$, $M(I_2')$, $M(I_2'')$, $M(I_1')$, $M(I_1'')$, $M(I_1''')$を与えた。

我々はK3曲面を作るための分岐ファイバー $I_1'$, $I_1''$ を既に指定したから，このK3曲面の超越サイクル加群 --- $\mathcal{T}$ と書く --- とその上の交叉形式とを計算する全ての情報を持っていると言ってよい。途中の詳しい計算は一切省くことにする。$\mathcal{T}$ を決めるため，天下り的に，次のような数論的対象を導入する：

$$K := \mathbb{Q}(\sqrt{5})$$
$$\mathcal{O}_0 := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\cdot(\sqrt{5}+1)/2$$
$$\mathcal{O} := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\cdot\sqrt{5}$$
$$\mathcal{O}' := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\cdot(2\sqrt{5})$$

$\mathcal{O}_0$ は実二次体 $K$ の主環，$\mathcal{O} \supseteq \mathcal{O}'$ は $\mathcal{O}_0$ 中夫々指数 2, 4 の orders である。又，$\mathcal{H}$ を $\mathcal{O}$ に係数を持つエルミット行列の作る加群とする，即ち

$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \delta \end{pmatrix} ; \quad \alpha, \delta \in \mathbb{Z} \quad \beta \in \mathcal{O} \right\}.$$

但し，$\bar{\beta}$ は $\beta$ の共役元を指すものとする。$\mathcal{H}$ は $\mathbb{Z}$ 上階数 4 の加群であって，行列式函数 det はその上

の整二次形式である。$\mathcal{H}$ の有限指数の部分加群 $\check{\mathcal{H}}$ とその上の整二次形式 $q$ を次のように導入する：

$$\check{\mathcal{H}} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\ ;\ 2\alpha + \delta \equiv 0 \ \mathrm{mod}.\ 4 \right\}$$

$$q := 2 \det \big| \check{\mathcal{H}}.$$

<u>命題 5.1</u>．<u>格子</u> $(\check{\mathcal{H}}, q)$ <u>は，交叉形式による格子</u> $\mathcal{J}$ <u>と同型である</u>。

これによって，$(x, y)$-平面上の K3 曲面族の $\mathcal{J}$ 上表現されたモノドロミー群は，算術的直交群 $O(\check{\mathcal{H}}, q)$ の有限指数の部分群であることは判ったが，これと完全に一致する訳ではない。モノドロミー群の正確な記述を与えるために，先ず，$SL_2(\mathcal{O}) \ni A$ は $\mathcal{H}$ 上に等長自己同型として作用することに注意する：

$$\mathcal{H} \ni Y \longmapsto AYA^* \in \mathcal{H} \qquad (A^* := \overline{{}^tA}).$$

次に $SL_2(\mathcal{O})$ の有限指数の部分群 $G_1$ を導入する：

$$G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2c' & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}) \;;\; \begin{matrix} c' \in \mathcal{O} \\ a \equiv d \bmod. 2\mathcal{O} \\ ab + c'd \in \mathcal{O}' \end{matrix} \right\}$$

定義より直ちに $G_1$ の $\mathcal{H}$ 上の作用は格子 $\check{\mathcal{H}}$ を自身に写すことが判る。即ち $G_1 \hookrightarrow O(\check{\mathcal{H}}, q)$ 。$G_1$ は全モノドロミー群の中で指数 2 の部分群である。全群を得るために，行列式 $= 2$ の行列

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

を導入する。この $M$ は $H \times H$ を自身に写し，又，群 $G_1$ の $GL(2, K)$ における正規化群に属する。$M$ に対しても $O(\check{\mathcal{H}}, q)$ の元 $[M]$ が次の写像として定まる：

$$\check{\mathcal{H}} \ni Y \longmapsto \frac{MYM^*}{2} = MYM^{-1} \in \check{\mathcal{H}} .$$

直交群 $O(\check{\mathcal{H}}, q)$ の中で，$G_1$ の像と $[M]$ とで生成された群を $G$ と書く：

$$G := \langle G_1, [M] \rangle .$$

命題5.2. Gは等長同型 $\check{\mathcal{H}} \cong \mathcal{T}$ を通して、$(x,y)$-平面上のK3曲面族のモノドロミー群と一致する。

2次元IV型領域 $H \times H$ は

$$\left\{ x \in \check{\mathcal{H}} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C} \,;\, q(x)=0, \; q(x,\bar{x})>0 \right\} / \mathbb{C}^* \qquad (\bar{x} \text{はxの複素共役})$$

の適当な連結成分と同一視され、$G$の$H \times H$上の通常の作用はそれの$\check{\mathcal{H}}$上の作用から導かれたものと一致する。また、この節の前半で構成した商特異点を持つ非コンパクト面$\check{B}$は商空間$H \times H/G$と同型になる。$\check{B}$は丁度2個の尖点によってコンパクト化されたが、これらはorbit space $P_1(K)/G$と対応する。結局、我々の幾何学によって$\#P_1(K)/G = 2$が証明されたことになるが、これは勿論数論的にも証明できる。$K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$の数類は1であるから先ず$\#P_1(K)/SL_2(\mathcal{O}_0) = 1$が成立ち、他方包含$\Gamma(4) \subseteq G_1 \subseteq SL_2(\mathcal{O}_0)$（$\Gamma(4)$はイデヤル$4\mathcal{O}_0$による主合同群）があるので問題は有限幾何に帰する。$\#P_1(K)/G_1 = 4$で、

$P_1(K)/G_1$ の代表元として $p_1 := (1:0)$, $p_1' := (0:1)$, $p_2 := (\sqrt{5}+1:2)$, $p_2' := (-1:\sqrt{5}+1)$ を取ることができるが, $p_i$ と $p_i'$ は行列 $M$ の作用で移り合ってしまうのである。もちろん, $G$ の射影化における位数2或は4の楕円元の共役類の数も数論的に計算できるのであるが, これらは $\check{B}$ 上の $A_1$ 型或は $A_3$ 型の特異点の数と完全に一致するのである。我々は, この例を通して, 数論と代数幾何の交錯する場をほんの少し垣間見たのであった。

## 文　献


[1] Cartan-Eilenberg, Homological Algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] Kodaira, K., On compact analytic surfaces I–III, Ann. of Math., 71 (1960) 111–152, 77 (1963) 563–626, 78 (1963) 1–40.

[3] Demazure, Pinkham and others, Seminaire sur les Singularités des Surface, Springer L. N., 777 (1980), Berlin-Heidelberg-New York.

[4] Looijenga, E., Rational surfaces with an anticanonical cycle, Ann. of Math. (2), 114 (1981), 267–322.

[5] Naruki, I., On confluence of singular fibers in elliptic fibrations, Publ. RIMS Kyoto Univ., 23 (1987), 409–431.

[6] Naruki, I., K3 surfaces related to root systems in $E_8$, to appear in Prospects of Algebraic Analysis, Academic Press.

[7] Naruki, I., On the intersection form for curve-fibrations over curves, RIMS Preprint 610, 1988.

[8] Prestel, A., Die elliptischen Fixpunkte der Hilbertschen Modulgruppen, Math. Annalen 177 (1968), 181–209.

[9] Prestel, A., Die Fixpunkte der symmetrischen Hilbertschen Modulgruppe zu einem reell-quadratischen Zahlkörper mit Primzahldiskriminante, Math. Annalen 200 (1973), 123–139.

[10] Shioda, T., On elliptic modular surfaces, J. Math. Soc. Japan 25 (1972), 20–59.