

戸田格子 — 微分から差分へ・差分から微分へ —

広 犬 工 広 田 良 吾 (Ryogo Hirota)

次の戸田格子方程式を考へる。

$$m \frac{d^2 \gamma_n}{dt^2} = -a [e^{-b\gamma_{n-1}} - 2e^{-b\gamma_n} + e^{-b\gamma_{n+1}}], \quad n = -\infty, \dots, \infty, \quad (1)$$

ここで m は粒子の質量, γ_n は n 番目の粒子の相対座標, a , b は相互作用のパラメータである。

戸田格子は可積分力学系として有名であるが, ここでは戸田格子のもう一つの性質, 微分・差分方程式に注目する。

戸田格子方程式 (1) は新しい変数 $f_n(t)$ を次式で導入する

$$e^{-b\gamma_n} - 1 = \frac{d^2}{dt^2} \log f_n(t), \quad (2)$$

次の 2 次形式に変形される (ただし $m/ab = 1$ とする)。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} f_n\right) f_n - \left(\frac{df_n}{dt}\right)^2 = f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2. \quad (3)$$

(3) 式の左辺は微分で, 右辺は差分である。戸田格子方程式

は微分と差分のバランスによつて成立している。このこととを調べるために、次の二項演算 D を導入する。

$$D_x^n f(x) \cdot g(x) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n f(x) g(x') \Big|_{x'=x}, \quad (4)$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial s^n} f(x+s) g(x-s) \Big|_{s=0}, \quad (5)$$

$$e^{\delta D_x} f(x) \cdot g(x) = e^{\delta \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)} f(x) g(x') \Big|_{x'=x} \quad (6)$$

$$= f(x+\delta) g(x-\delta). \quad (7)$$

この演算子 ε を使うと (3) 式は

$$D_t^2 f_n \cdot f_n = 2 [\cosh(D_n) - 1] f_n \cdot f_n \quad (8)$$

となる。(8) 式の右辺を展開すると

$$\left[D_n^2 + \frac{1}{12} D_n^4 + \dots \right] f_n \cdot f_n \quad (9)$$

となるが、 D_n^4 までと、たゞ式

$$D_t^2 f_n \cdot f_n = \left(D_n^2 + \frac{1}{12} D_n^4 \right) f_n \cdot f_n \quad (10)$$

は Boussinesq 方程式と呼ばれているものの二次形式である。

関係式

$$2 [\cosh(D_n) - 1] = \varepsilon^{-2} \sinh^2(\varepsilon D_n), \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \quad (11)$$

ε を使うと、(8) 式は、 $\varepsilon = 1/2$ として、

$$D_t^2 f_n \cdot f_n = [\varepsilon^{-1} \sinh(\varepsilon D_n)]^2 f_n \cdot f_n \quad (12)$$

になるが、これは (8) 式の右辺が、置き換え

$$D_n \rightarrow \varepsilon^{-1} \sinh(\varepsilon D_n) \quad (13)$$

によつて差分化出来ることと示している。逆に (8) 式の左辺は置き換え

$$D_t \rightarrow \delta^{-1} \sinh(\delta D_t) \quad (14)$$

によつて差分化される。このようにして Discrete-Time Toda Lattice Equation が得られた。

どうしように 12 次元座標方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log(1 + V_n) = V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1} \quad (15)$$

も変換 $V_n = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log f_n$ によつて、2次形式

$$D_x D_y f_n \cdot f_n = 2 [\cosh(D_n) - 1] f_n \cdot f_n \quad (17)$$

になるが、上述のやり方を便つて差分化すると

$$\begin{aligned} (\delta \varepsilon)^{-1} \sinh(D_\varepsilon) \sinh(D_\delta) f(l, m, n) \cdot f(l, m, n) \\ = 2 [\cosh(D_n) - 1] f(l, m, n) \cdot f(l, m, n) \end{aligned} \quad (18)$$

に於て $l\delta = x$, $m\varepsilon = y$, (19) とする。(18) 式は通常の形式に戻ると、次の非線形偏差分方程式が得られる。¹⁾

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_x \Delta_{-m} Q_n(l, m) &= V_{n+1}(l, m-1) - V_n(l+1, m-1) - V_n(l, m) + V_{n-1}(l+1, m), \quad (20) \\ V_n(l, m) &= (\delta \varepsilon)^{-1} \log \{ 1 + \delta \varepsilon [\exp Q_n(l, m) - 1] \}. \quad (21) \end{aligned} \right.$$

ここで Δ_x , Δ_{-m} はそれぞれ, 前進差分, 後退差分演算子である。

$$\text{解 } Q_n(l, m) \text{ は } Q_n(l, m) = \log \left[\frac{f(l, m-1, n+1) f(l+1, m, n-1)}{f(l+1, m-1, n) f(l, m, n)} \right] \quad (22)$$

となるが $f(l, m, n)$ は Casorati 行列式で表わされる。¹⁾

Casorati 行列式は差分方程式において Wrońskian の働きをする行列式である。

式(20), (21) は 2次元戸田格子方程式の理想的な差分スキームを与えている。

2次形式(18)を一般化した形で表現すると

$$(A_1 \cosh D_1 + A_2 \cosh D_2 + A_3 \cosh D_3) f \cdot f = 0, \quad (23)$$

ただし,

$$D_i = \alpha_i D_x + \beta_i D_y + \gamma_i D_t, \quad (24)$$

$A_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ は常数, $(i=1, 2, 3)$

となる。

(23)式で常数を適当に選んで, 0に近づく極限をとると, 図1に示されるように, 良く知られている色々なソリトン方程式が生成される²⁾。

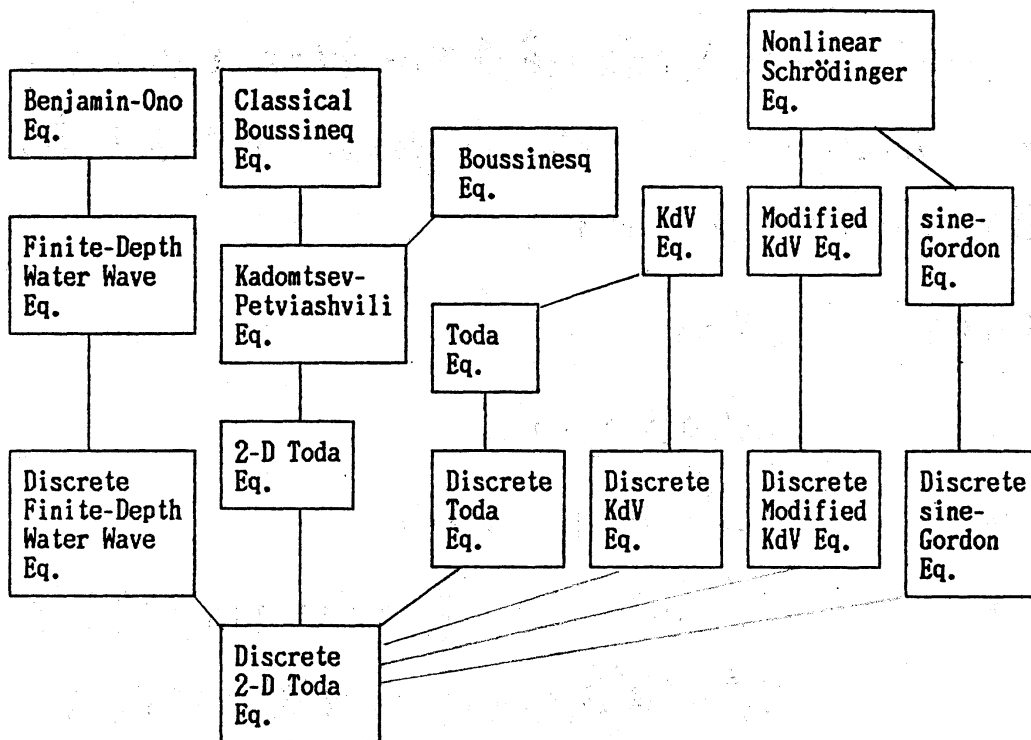


図 1. 離散的 2 次元戸田格子から生成されるソリトン方程式.

ところで、物理の方で KP (Kadomtsev - Petviashvili) 方程式
または 2 次元 KdV 方程式と呼ばれている方程式がある。座標
 x, y, t の代わりに x_1, x_2, x_3 を使うと、この方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-4 \frac{\partial u}{\partial x_3} + 6u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (25)$$

と表現される。ここで $u \in u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log \tau$ (26) と変換
し、 τ に対する方程式を求めると

$$(D_1^4 - 4D_1 D_3 + 3D_2^2) \tau \cdot \tau = 0 \quad (27)$$

となる。

佐藤幹夫先生は無限の座標 $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ を導入して
無限の高次 KP 方程式 — KP 方程式系 を発見され、KP 方程

式がソリト方程式の最も基本的な方程式であることと示された。Jimbo & Miwa の Review Paper³⁾ から KP hierarchy の最初のいくつかをコピーする。

degree	$P(D)$
4	$D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2$
5	$(D_1^3 + 2D_3)D_2 - 3D_1D_4$
6	$D_1^6 - 20D_1^3D_3 - 80D_3^2 + 144D_1D_5 - 45D_1^2D_2^2$ $D_1^6 + 4D_1^3D_3 - 32D_3^2 - 9D_1^2D_2^2 + 36D_2D_4$
7	$(D_1^5 + 10D_1^3D_3 + 24D_5)D_2 + 5D_1^3D_4 - 40D_1D_6$ $D_1D_2^3 + (D_1^3 + 2D_3)D_4 - 4D_1D_6$ $D_1^2D_3D_2 + D_3D_4 - 2D_1D_6$

佐藤先生 (独立に N. C. Freeman) によれば KP 方程式の解 τ は Wronskian で表わされる。

$$\tau = W_r(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \quad (28)$$

$$\equiv \det \left| \frac{\partial^{j-1}}{\partial x_i^{j-1}} \varphi_i \right|_{1 \leq i, j \leq N} \quad (29)$$

ここで $\varphi_i (i=1, 2, \dots, N)$ は次の線形方程式の解である。

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \varphi_i = \frac{\partial^n}{\partial x_i^n} \varphi_i, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

一方、Date, Jimbo, Miwa によつて (23) 式の一つの表現として、次の二次形式が発見されている⁴⁾。 l, m, n の符号を少し変更して表現する。

$$\begin{aligned} & a(b-c) \tau(l-1, m, n) \tau(l, m-1, n-1) \\ & + b(c-a) \tau(l, m-1, n) \tau(l-1, m, n-1) \\ & + c(a-b) \tau(l, m, n-1) \tau(l-1, m-1, n) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

この式は 2 項演算子 D を使つて書き直すと

$$\begin{aligned} & [a(b-c) \cosh \frac{1}{2}(-D_l + D_m + D_n) \\ & + b(c-a) \cosh \frac{1}{2}(D_l - D_m + D_n) \\ & + c(a-b) \cosh \frac{1}{2}(D_l + D_m - D_n)] \tau \cdot \tau = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

である。今後この方程式を Discrete KP 方程式と呼ぶ。

Discrete KP 方程式の解 τ_{disc} は 2 次元戸田格子方程式のと同様に Casorati 行列式で表わすことができる。

$$\tau_{disc} = Ca(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N), \quad (33)$$

$$\equiv \det |\varphi_i(l, m, n, s+j-1)|_{1 \leq i, j \leq N}. \quad (34)$$

ここで φ_i ($i=1, 2, \dots, N$) は次の線形差分方程式の解である。

$$\begin{aligned} \Delta_{-l} \varphi_i(l, m, n, s) &= \Delta_{-m} \varphi_i(l, m, n, s) = \Delta_{-n} \varphi_i(l, m, n, s) \\ &= \varphi_i(l, m, n, s+1). \end{aligned} \quad (35, 36, 37)$$

$\Delta_{-e}, \Delta_{-m}, \Delta_{-n}$ は次式で定義された後退差分演算子である。

$$\Delta_{-e} f(e) = [f(e) - f(e-1)]/a, \quad (38a)$$

$$\Delta_{-m} f(m) = [f(m) - f(m-1)]/b, \quad (38b)$$

$$\Delta_{-n} f(n) = [f(n) - f(n-1)]/c. \quad (38c)$$

一方 KP 方程式系の $\tau \in \mathcal{T}_{cont.}$ と書くと

$$\mathcal{T}_{cont} = \det \left| \frac{\partial^{j-1}}{\partial x_i^{j-1}} \varphi_i \right|_{1 \leq i, j \leq N} \quad (29)$$

と表現されていたが、実は discrete KP 方程式の \mathcal{T}_{disc} と \mathcal{T}_{cont} は trivial な因子を除いて等しいのである。

$$\boxed{\mathcal{T}_{disc} \propto \mathcal{T}_{cont}} \quad (39)$$

なぜなら線形微分方程式の解 $\varphi \in \mathcal{F}_{cont}$ と表わすと、 \mathcal{F}_{cont} は

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \mathcal{F}_{cont} = \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \mathcal{F}_{cont} \quad (40)$$

とみられているので

$$\mathcal{F}_{cont} = \sum_p c_p e^{px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + \dots} p^s \quad (41)$$

である。他方、線形差分方程式の解 $\varphi \in \mathcal{F}_{disc}$ と表わすと、

\mathcal{G}_{disc} は

$$\Delta_{-l} \mathcal{G}_{disc}(l, m, n, s) = \mathcal{G}_{disc}(l, m, n, s+1), \quad (42.a)$$

$$\Delta_{-m} \mathcal{G}_{disc}(l, m, n, s) = \mathcal{G}_{disc}(l, m, n, s+1), \quad (42.b)$$

$$\Delta_{-n} \mathcal{G}_{disc}(l, m, n, s) = \mathcal{G}_{disc}(l, m, n, s+1), \quad (42.c)$$

と記して置く。

$$\mathcal{G}_{disc} = \sum_p c_p (1-ap)^{-l} (1-bp)^{-m} (1-cp)^{-n} \cdots p^s \quad (43)$$

である。

Date, Jimbo, Miwa が示したから、無限個の座標 x_k を

$$x_k = l \frac{a^k}{k} + m \frac{b^k}{k} + n \frac{c^k}{k} + \cdots, \quad k=1, 2, 3, \dots, \infty \quad (44)$$

で定義すると

$$(1-ap)^{-l} (1-bp)^{-m} (1-cp)^{-n} \cdots = e^{px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + \cdots} \quad (45)$$

が成立するからである。この等式が成り立つように Discrete KP 方程式 (31) の l, m, n の符号を変更した。

(45) 式を便すと

$$\mathcal{G}_{disc} = \mathcal{G}_{cont} \quad (46)$$

となる。よって (41) 式から $\frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{G}_{cont}(s) = \mathcal{G}_{cont}(s+1)$, (47)

が成立するので、 τ が N 次の行列式で表現されているとき、 τ -関数の等価性

$$\tau_{disc} \propto \tau_{cont} \quad (48)$$

が成立する。

τ -関数の等価性を利用すると、一つの discrete KP 方程式から無限個の高次 KP 方程式を導くことができる。座標の定義式(44)を用いると、例えば、

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial x_n}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (49)$$

$$= a \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{a^3}{3} \frac{\partial}{\partial x_3} + \dots \quad (50)$$

となるので、2項演算子 D は a, b, c で展開されて

$$D_e = a D_1 + \frac{a^2}{2} D_2 + \frac{a^3}{3} D_3 + \dots, \quad (51a)$$

$$D_m = b D_1 + \frac{b^2}{2} D_2 + \frac{b^3}{3} D_3 + \dots, \quad (51b)$$

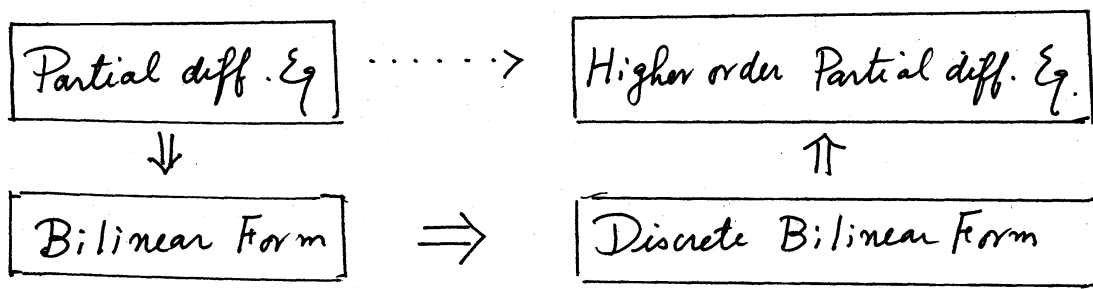
$$D_n = c D_1 + \frac{c^2}{2} D_2 + \frac{c^3}{3} D_3 + \dots, \quad (51c)$$

となる。Discrete KP 方程式

$$\begin{aligned} & [a(b-c) \cosh \frac{1}{2} (-D_e + D_m + D_n) \\ & + b(c-a) \cosh \frac{1}{2} (D_e - D_m + D_n) \\ & + c(a-b) \cosh \frac{1}{2} (D_e + D_m - D_n)] \tau \cdot \tau = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

(51)式を便して a, b, c の中に展開すると, a, b, c の中央の係数が高次 KP 方程式を与える。KP hierarchy の degree N までの式は discrete KP 方程式から生成される。(32)式ではパラメータとして a, b, c の3個しか使っていないので高次 KP 方程式のすべては生成できないが, (32)式の代りにより多くのパラメータを含んだ Discrete KP 方程式を考えると, より多くの高次 KP 方程式が生成される。ただし2次形式の高次 KP 方程式を通常非線形偏微分方程式に変換すると, 2次形式には redundant な方程式がたくさん含まれているので, 通常形とした高次 KP 方程式を求めるためには (32)式だけで充分である。

この discrete KP 方程式から Higher order KP 方程式を生成する方法を図示すると



となる。与えられた非線形偏微分方程式の高次方程式を導く一つの方法を与える。

この方法を便して, 通常形の方が困難と思われ方程式

(i) 2-wave Interaction

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) u = -u v, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) v = u v. \end{cases}$$

(ii) 3種の 3-wave Interaction

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} w_1 + w_1 w_2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} w_2 + w_2 w_3 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} w_3 + w_3 w_1 = 0. \end{cases}$$

などの高次方程式の導出が研究されている。

文献

- 1) R. Hirota, M. Ito and F. Kako : Progr. Theor. Phys. Suppl 94 (1988) 42.
- 2) R. Hirota : J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 3785.
- 3) M. Jimbo and T. Miwa : "Solitons and Infinite Dimensional Lie Algebras" RIMS-439, March (1983).
- 4) E. Date, M. Jimbo and T. Miwa : J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 4116.