数理解析研究所講究録
第675巻 1988年 242-253

解析汎関数の球面調和展開

上智大理工 森本光生 (MORIMOTO, Mitsuo)

§1 Fourier 級数

佐藤[1958]の§9に，円周上の超関数(hyperfunction)の理論，すなわち，超関数のFourier級数の理論の概略が書かれている。それは，次のようにまとめることができる。

$$S = S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \,;\, |z| = 1 \}$$

を単位円周とし，$\mathcal{A}(S)$ で S 上の実解析的な関数の全体を表わす。このとき，

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\mathcal{A}(S) \ni f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \\ &\iff \limsup_{|n| \to \infty} \sqrt[|n|]{|a_n|} < 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。S 上の超関数の全体を $\mathcal{B}(S) = \mathcal{A}'(S)$ で表わす。このとき，

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\mathcal{B}(S) \ni g(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta} \\ &\iff \limsup_{|n| \to \infty} \sqrt[|n|]{|b_n|} \leqq 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。

佐藤[1958]には，この他，超関数の収束とか，$\mathcal{A}(S)$と$\mathcal{B}(S)$の双対性が論ぜられている。

以上の拡張として，森本[1979]では，円周上の解析汎関数に関して，結果が述べられている。

我々が研究の対象としてきたことは，S上の佐藤の結果をd次元球面S^d上に球面調和展開を用いて拡張することで，森本[1983](*)で研究を開始した。その結果，球面S^dの複素化$\tilde{S}^d$（複素球面）を考えるのが自然であることがわかり，さらに，一般に解析的集合

$$M_\rho = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} ; z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{d+1}^2 = \rho^2 \}$$

上の解析汎関数が球面調和展開を用いて研究できることがわかった。とくに，$\rho = 0$の場合，M_0は複素光錐であり，$\tilde{S}^d$とは，まったく異なる形をしている。

本稿では，M_ρ上のFourier-Borel変換に関して，いくつかの注意を与えたい。

(*) 森本[1983]は，1979年のBanach研究所での講演記録。

§2 記号の準備

$\mathbb{C}^{d+1} \ni z, \zeta$ に対して,

$$z.\zeta = z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2 + \cdots + z_{d+1}\zeta_{d+1}$$

とおく。$\rho \in \mathbb{C}$ に対し,

$$M_\rho = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} ; z.z = \rho^2 \}$$

とおく。M_0 は複素光錐 (complex light cone), M_1 は複素単位球面 (complex sphere) である。この M_ρ 上の関数論が, 我々の興味の対象である。

$L(z)$ で, $\mathbb{C}^{d+1}$ 上の Lie ノルムを表わす。$r>0$ に対し,

$$\widetilde{B}(r) = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} ; L(z) < r \}$$

とおく。

$$r > |\rho| (\geqq 0) \iff M_\rho \cap \widetilde{B}(r) \neq \phi$$

に注意しよう。

$\mathcal{O}(\widetilde{B}(r))$ で, $\widetilde{B}(r)$ 上の正則関数の全体を表わす。さらに, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathcal{O}_\lambda(\widetilde{B}(r)) = \{ f \in \mathcal{O}(\widetilde{B}(r)) ; (\Delta + \lambda^2) f = 0 \}$$

とおく。ここで,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial z_{d+1}^2}$$

は, (複素) ラプラス作用素である。

$T \in \mathcal{O}'(\widetilde{B}(r))$ の Fourier-Borel 変換 $\widetilde{T}$ は, 次のよう

に定義される。

$$\mathcal{F}T(\zeta) = \langle T_z, e^{iz\cdot\zeta} \rangle \quad , \zeta \in \mathbb{C}^{d+1}.$$

$\mathcal{F}T$ は，$\mathbb{C}^{d+1}$ 上の整関数で，指数型の増大度をもつことが判るが，さらに，$\mathcal{F}$ の像を決定することができる。そのため，定義を述べる。

$$\begin{aligned} &\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*]) \\ &= \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1}); \forall \varepsilon > 0\ \exists C \geq 0 \text{ s.t. } \\ &\qquad |f(z)| \leq C e^{(r+\varepsilon) L^*(z)} \}, \end{aligned}$$

ここで，L^* は双対リーノルムである。

次の定理は基本的である。

定理 (Martineau [1967])

Fourier-Borel 変換は，線形位相空間として同型

$$\mathcal{F}: \mathcal{O}'(\widehat{B}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*])$$

を与える。

§3. M_ρ 上の正則関数

M_ρ は解析的集合であるから，その上の正則関数を考えることができる。$\mathcal{O}(M_\rho \cap \widehat{B}(r))$ で，M_ρ の開集合 $M_\rho \cap \widehat{B}(r)$ 上の正則関数の全体を表わす。また，M_ρ 上の指数型正則関数の空間を次のように定める。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Exp}(M_\rho;[r,L^*])\\
&=\{f\in\mathcal{O}(M_\rho);\ \forall\varepsilon>0\ \exists C\geqq 0\ \text{s.t.}\\
&\qquad |f(z)|\leqq C\,e^{(r+\varepsilon)L^*(z)},\quad z\in M_\rho\}
\end{aligned}
$$

このとき，制限写像

$$\alpha_{\lambda\rho}:\mathcal{O}_\lambda(\widehat{B}(r))\longrightarrow\mathcal{O}(M_\rho\cap\widehat{B}(r))$$

および，

$$\tilde{\alpha}_{\lambda\rho}:\mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1};[r;L^*])\longrightarrow\mathrm{Exp}(M_\lambda;[r;L^*])$$

が自然に定義できる。($\lambda,\rho\in\mathbb{C}$ の使いわけは，次節で明らかになる。)

和田[1988]には，次の二つの定理2.1および3.1がそれぞれ証明されている。

<u>定理2.1</u>　$\lambda,\rho\in\mathbb{C}$ とする。すべての $k\in\mathbb{Z}^+$ に対し，

$$(B_{\lambda\rho})\qquad(\lambda\rho)^{-k-(d-1)/2}J_{k+(d-1)/2}(\lambda\rho)\neq 0$$

なる条件を仮定する。このとき，制限写像

$$\alpha_{\lambda\rho}:\mathcal{O}_\lambda(\widetilde{B}(r))\longrightarrow\mathcal{O}(M_\rho\cap\widehat{B}(r))$$

は線形位相空間としての同型を与える。但し，$r>|\rho|$.

<u>注意</u>　定理2.1の特別な場合は，1988年以前より知られていた。$\lambda=0$ の場合（調和関数の場合）は，森本[1983]で証明された。関連文献として，橋爪等[1972]をあげる。

$\rho=0$の場合(光錐の場合)は,和田[1986],和田・森本[1987]で証明された。関連文献として,小幡・岡本[1974]をあげる。これらの二つの場合を統括して,和田涼子の学位論文,和田[1988]で定理2.1が定式化され,証明されたのである。

もう一つの和田[1988]の定理は,次の,指数型正則関数の制限に関する定理である。

<u>定理3.1</u> λ, ρ とする.すべての $k\in\mathbb{Z}^+$ に対し,条件 $(B_{\lambda\rho})$ を仮定する。このとき,制限写像

$$\tilde{\alpha}_{\lambda\rho}\ :\quad \mathrm{Exp}_\rho(\mathbb{C}^{d+1};[r;L^*])\longrightarrow \mathrm{Exp}(M_\lambda;[r;L^*])$$

は線形位相空間の同型である。但し, $r>|\rho|$.

§4. Fourier-Borel変換

Fourier-Borel 変換を経由することにより,定理2.1と定理3.1が同値な命題であることを示したいと思う。

定理2.1を仮定して,定理3.1を導いてみよう。

任意の $k\in\mathbb{Z}^+$ に対して,条件 $(B_{\lambda\rho})$ を仮定すれば,定理2.1より, $r>|\rho|$ のとき

$$(1)\quad \alpha\quad :\mathcal{O}_\lambda(\widehat{B}(r))\xrightarrow{\ \sim\ }\mathcal{O}(M_\rho\cap\widehat{B}(r))$$

である。(1)で双対に移れば,

$$(2)\quad \alpha\quad :\mathcal{O}'_\lambda(\widehat{B}(r))\xleftarrow{\ \sim\ }\mathcal{O}'(M_\rho\cap\widehat{B}(r))$$

となる。(2)は、Fourier－Borel変換により、

(3) $$\mathfrak{F}(\mathcal{O}'_\lambda(\widetilde{B}(r))) \xleftarrow{\ \sim\ } \mathfrak{F}(\mathcal{O}'(M_\rho \cap \widetilde{B}(r)))$$

となる。

この始集合と、終集合は何であるか考えてみよう。

(4) $$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{B}(r)) \xrightarrow{(\zeta^2-\rho^2)\cdot} \mathcal{O}(\widetilde{B}(r)) \xrightarrow{\text{rest}} \mathcal{O}(M_\rho \cap \widetilde{B}(r)) \longrightarrow 0$$

は完全列である。双対に移れば、

(5) $$0 \longleftarrow \mathcal{O}'(\widetilde{B}(r)) \xleftarrow{(\zeta^2-\rho^2)\cdot} \mathcal{O}'(\widetilde{B}(r)) \longleftarrow \mathcal{O}'(M_\rho \cap \widetilde{B}(r)) \longleftarrow 0$$

も完全列である。(5)を、Fourier－Borel変換すれば、

(6) $$0 \longleftarrow \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1};[r;L^*]) \xleftarrow{-\Delta-\rho^2} \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1};[r;L^*]) \longleftarrow \mathfrak{F}(\mathcal{O}'(M_\rho \cap \widetilde{B}(r))) \longleftarrow 0$$

が完全列となる。ここで、Martineauの定理を用いた。故に、(3)の始集合について、

(7) $$\mathfrak{F}(\mathcal{O}'(M_\rho \cap \widetilde{B}(r))) \cong \mathrm{Exp}_\rho(\mathbb{C}^{d+1};[r;L^*])$$

なる同型を得る。

他方、$\mathcal{O}_\lambda(\widetilde{B}(r))$ の定義より、

(8) $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\lambda(\widetilde{B}(r)) \longrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{B}(r)) \xrightarrow{\Delta+\lambda^2} \mathcal{O}(\widetilde{B}(r)) \longrightarrow 0$$

は完全列である。双対に移れば、

(9) $$0 \longleftarrow \mathcal{O}'_\lambda(\widetilde{B}(r)) \longleftarrow \mathcal{O}'(\widetilde{B}(r)) \xleftarrow{\Delta+\lambda^2} \mathcal{O}'(\widetilde{B}(r)) \longleftarrow 0$$

なる完全列を得る。(9)より，Fourier - Borel変換により，

(10) $$0 \longleftarrow \mathfrak{F}(\mathcal{O}'_\lambda(\tilde{B}(r))) \longleftarrow \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1};[r;L^*]) \xleftarrow{-\zeta^2+\lambda^2} \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1};[r;L^*]) \longleftarrow 0$$

なる完全列を得る。ここでも，Martineauの定理を用いた。

故に，(3)の終集合に関して，

(11) $$\mathfrak{F}(\mathcal{O}'_\lambda(\tilde{B}(r))) \cong \mathrm{Exp}(M_\lambda;[r;L^*])$$

なる同型が得られる。

(7)と(11)の同型を(3)に代入すると，

(12) $$\mathrm{rest}: \mathrm{Exp}(M_\lambda;[r;L^*]) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Exp}_\rho(\mathbb{C}^{d+1};[r;L^*])$$

は同型であることがわかる。これは，定理3.1の主張に他ならない。

定理3.1より定理2.1も，同様に導くことができる。

<u>まとめ</u>　(4)をたてに，(8)を横に書いてみると，次の図式(1)を得る。図式(1)より双対に移り，Martineauの定理により，Fourier - Borel変換の像を書き直すと，図式(2)になる。(6)が下から上へ，(10)が横向きに書かれている。

ここで，同型(7)と(11)が成立するのである。

(図式 1)

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \mathcal{O}(\tilde{B}(r)) \arrow[d, "(\xi^2-\rho^2)\cdot"'] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}(r)) \arrow[r] \arrow[dr, "\sim", "(\mathrm{Thm}\,2.1)"'] & \mathcal{O}(\tilde{B}(r)) \arrow[r, "\Delta+\lambda^2"] \arrow[d] & \mathcal{O}(\tilde{B}(r)) \arrow[r] & 0 \\
 & & \mathcal{O}(M_\rho \cap \tilde{B}(r)) \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

(図式 2)

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
 & & \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}, [r; L^*]) \arrow[u] & & \\
0 & \mathcal{F}(\mathcal{O}'_\lambda(\tilde{B}(r))) \arrow[l] & \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}, [r; L^*]) \arrow[l] \arrow[u, "-\Delta-\rho^2"] & \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}, [r; L^*]) \arrow[l, "-\xi^2+\lambda^2"'] & 0 \arrow[l] \\
 & & \mathcal{F}(\mathcal{O}'(M_\rho \cap \tilde{B}(r))) \arrow[u] \arrow[ul, "\sim"', "(\mathrm{Thm}\,3.1)"] & & \\
 & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

§5 M_ρ 上の Fourier-Borel 変換

$r > |\rho|$ のとき，(7) より，

$$\mathcal{F}: \mathcal{O}'(M_\rho \cap \widetilde{B}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}_\rho(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*])$$

であり，すべての $k \in \mathbb{Z}^+$ に対し，$(B_{\lambda\rho})$ を仮定すれば，さらに，定理 3.1 より，

$$\text{制限}: \mathrm{Exp}_\rho(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}(M_\lambda; [r; L^*])$$

が成立している。この二つの写像を合成すれば，次の定理を得る。

<u>定理</u> $r > |\rho|$ とする。すべての $k \in \mathbb{Z}^+$ に対し，(B_{ρ^2}) を仮定する。このとき，

$$\text{Fourier}: \mathcal{O}'(M_\rho \cap \widehat{B}(r)) \longrightarrow \mathrm{Exp}(M_\rho; [r; L^*])$$

および

$$\text{Fourier}: \mathrm{Exp}'(M_\rho; [r; L^*]) \longrightarrow \mathcal{O}(M_\rho \cap \widehat{B}(r))$$

なる二つの線形位相空間としての同型が成り立つ。

換言すれば，M_ρ 上で（とくに，複素光錐 M_0 および複素単位球面 M_1 上で）Fourier-Borel 変換は Martineau の双対性を与える。

§5 に関する詳細は，森本-和田 [1988] を参照されたい。

文献

佐藤[1958]，佐藤幹夫：超函数の理論について，数学，10 (1958), 1−27.

Martineau [1967], A. Martineau : Equations différentielles d'ordre infini, Bull. Soc. Math. France, 95 (1967), 109-154.

橋爪等 [1972], M. Hashizume, A. Kowata, K. Minemura, and K. Okamoto : An integral representation of an eigenfunction of the Laplacian in the Euclidean space, Hiroshima Math. J., 2 (1972), 535-545.

小幡・岡本 [1974], A. Kowata and K. Okamoto ; Harmonic functions and the Borel-Weil theorem, Hiroshima Math. J., 4 (1974), 89-97.

森本 [1979], M. Morimoto : A generalization of the Fourier-Borel transformation for the analytic functionals with non-convex carrier, Tokyo J. Math. 2 (1979), 301-322.

森本 [1983], M. Morimoto : Analytic functionals on the sphere and their Fourier-Borel transformations, Complex Analysis, Banach Center Publications 11 PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983, 223-250.

和田 [1986], R. Wada: On the Fourier-Borel transformations of analytic functionals on the complex sphere, Tôhoku Math. J. 38 (1986), 417-432.

和田・森本 [1987], R. Wada and M. Morimoto: A uniqueness set for the differential operator $\Delta_z + \lambda^2$, Tokyo J. Math., 10 (1987), 93-105.

和田 [1988], R. Wada: Holomorphic functions on the complex sphere, Tokyo J. Math., 11 (1988), 205-218

森本・和田 [1988], M. Morimoto and R. Wada: Analytic functionals on the complex light cone and their Fourier-Borel transformations, to appear in "Prospect of Algebraic Analysis".