

Ⅲ Byr ne 型 の Pseudo-Runge-Kutta 法 の特性について

山梨大学工学部 小野 俊治 (Toshiharu Ono)
 田中 正次 (Masatugu Tanaka)
 山下 茂 (Sigeru Yamasita)

1. はじめに

1965年 Byr ne と Lambert は、Runge-Kutta 法の step 当りの関数計算回数の削減を主眼とした Pseudo-Runge-Kutta 法を提案したが、これは Costabile、中島、田中、新谷らにより改良あるいは発展され今日に至っている。

Byr ne は 2 段階法について、微分方程式が単一の場合の最適公式を導いているが、ここでは Byr ne が報告した最適公式の視覚的な確認と連立微分方程式に対する最適公式の導出 (使用計算機は ACOS-850) について述べたい。

2. Byr ne 型 2 段階法の一般形

常微分方程式の初期値問題 $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ において、Byr ne 型 2 段階法の 2 段数 3 次法および 3 段数 4 次法の一般公式は次の通りである。

(1) 2 段数 3 次法

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \alpha_0 k_{0,n} + \alpha_1 k_{1,n} + \beta_0 k_{0,n-1} + \beta_1 k_{1,n-1} \\ k_{0,n} &= h f(x_n, y_n) \\ k_{1,n} &= h f(x_n + \mu h, y_n + \mu k_{0,n}) \end{aligned} \tag{2-1}$$

ここで、 μ を自由パラメータとすれば、3 次法の次数条件式の解系は式 (2-2) で表すことができる。

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{5 - 6\mu}{12\mu}, & \beta_1 &= \frac{5}{12\mu}, \\ \alpha_0 &= 1 - \beta_0, & \alpha_1 &= 1 - \beta_1 \end{aligned} \tag{2-2}$$

(2) 3 段数 4 次法

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \alpha_0 k_{0,n} + \alpha_1 k_{1,n} + \alpha_2 k_{2,n} \\ &\quad + \beta_0 k_{0,n-1} + \beta_1 k_{1,n-1} + \beta_2 k_{2,n-1} \\ k_{0,n} &= h f(x_n, y_n) \\ k_{1,n} &= h f(x_n + \mu_1 h, y_n + \mu_1 k_{0,n}) \\ k_{2,n} &= h f(x_n + \mu_2 h, y_n + \mu_2 k_{0,n} + \mu_3 (k_{1,n} - k_{0,n})) \end{aligned} \tag{2-3}$$

ここで、 μ_1, μ_2 を自由パラメータとすれば 4 次法の次数条件式の解系は式 (2-4) で表すことができる。

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{-5(\mu_1 + \mu_2) + 18\mu_1\mu_2 + 4}{12\mu_1\mu_2}, \\ \alpha_1 &= \frac{4 - 5\mu_2}{12\mu_1(\mu_1 - \mu_2)}, & \alpha_2 &= \frac{5\mu_1 - 4}{12\mu_2(\mu_1 - \mu_2)}, \\ \beta_0 &= 1 - \alpha_0, & \beta_1 &= -\alpha_1, & \beta_2 &= -\alpha_2, \\ \mu_3 &= \frac{2\mu_2(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1(4 - 5\mu_1)} \end{aligned} \tag{2-4}$$

3. 打ち切り誤差とその大小の判定

先ず、記法を次のように定める。

$$D = \partial / \partial x + F \partial / \partial y, \quad F = F(x_n, y_n), \quad F_y = \partial F(x_n, y_n) / \partial y$$

$$F_{,j} = \partial F / \partial Y_j, \quad F_{,ij} = \partial^2 F / \partial Y_i \partial Y_j, \quad F_{i,j} v_j = \sum_{j=1}^q (\partial F_i / \partial Y_j) v_j$$

k 段数 p 次 Pseudo-Runge-Kutta 法において微分方程式が単一及び連立の各場合の打ち切り誤差の主項をそれぞれ $\gamma_p h^{p+1}$ 及び $\tilde{\gamma}_p h^{p+1}$ とすれば、

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= a_{31} D^3 F + a_{32} F_y D^2 F + a_{33} F_y^2 D F + a_{34} D F D F_y \\ \gamma_4 &= a_{41} D^4 F + a_{42} F_y D^3 F + a_{43} F_y^2 D^2 F + a_{44} F_y^3 D F + a_{45} D F_y D^2 F \\ &\quad + a_{46} D^2 F_y D F + a_{47} F_y D F D F_y + a_{48} F_{yy} (D F)^2 \\ \tilde{\gamma}_3 &= \hat{a}_{31} F^{(3)} + \hat{a}_{32} F_{,jk} F_j F_k' + \hat{a}_{33} F_{,j} F_j'' \\ \tilde{\gamma}_4 &= \hat{a}_{41} F^{(4)} + \hat{a}_{42} F_{,jm} F_j F_m'' + \hat{a}_{43} F_{,jkm} F_j F_k F_m' + \hat{a}_{44} F_{,j} F_j^{(3)} \\ &\quad + \hat{a}_{45} F_{,j} F_{j,km} F_k' F_m + \hat{a}_{46} F_{,j} F_{j,k} F_k'' \end{aligned} \quad (3-1)$$

と表すことができる。

$$\begin{aligned} \text{但し、} \quad a_{31} &= (4-5\mu)/24, & \hat{a}_{31} &= (4-5\mu)/24, \\ a_{32} &= a_{33} = 1/6, & \hat{a}_{32} &= 5\mu/24, \\ a_{34} &= (6-5\mu)/12, & \hat{a}_{33} &= 5\mu/24, \\ a_{41} &= [31-40(\mu_1+\mu_2)+50\mu_1\mu_2]/720, & \hat{a}_{41} &= [31+50\mu_1\mu_2-40(\mu_1+\mu_2)]/720, \\ a_{42} &= (31-60\mu_1)/720, & \hat{a}_{42} &= (2\mu_2+5\mu_1-10\mu_1\mu_2)/36, \\ a_{43} &= a_{44} = 31/720, & \hat{a}_{43} &= (4\mu_1-5\mu_1\mu_2)/24, \\ a_{45} &= (31-15\mu_1-30\mu_2)/180, & \hat{a}_{44} &= -(5\mu_1\mu_2-4\mu_2+2\mu_1)/72, \\ a_{46} &= (31-20\mu_1-40\mu_2+25\mu_1\mu_2)/120, & \hat{a}_{45} &= \mu_1/12, \\ a_{47} &= (217-120\mu_1-120\mu_2)/720, & \hat{a}_{46} &= \mu_1/12, \\ a_{48} &= (31-40\mu_2)/240 & & \text{である。} \end{aligned}$$

次に、微分方程式が単一及び連立の各場合について、各次数の公式の打ち切り誤差の大小を判定するための尺度として次の3種類の判定基準を使用する。これらの尺度を公式の打ち切り精度判定基準という。

$$\begin{aligned} A_{31} &= 8|a_{31}| + 3|a_{32}| + 3|a_{33}| + 4|a_{34}|, \quad A_{32} = \sum_{i=1}^4 |a_{3i}|, \quad A_{33} = \sum_{i=1}^4 (a_{3i})^2, \\ A_{32} &= \sum_{i=1}^3 |\hat{a}_{3i}|, \quad A_{33} = \sum_{i=1}^3 (\hat{a}_{3i})^2, \\ A_{41} &= 16|a_{41}| + 8|a_{42}| + 3|a_{43}| + 3|a_{44}| + 8|a_{45}| + 8|a_{46}| + 4|a_{47}| + 4|a_{48}|, \\ A_{42} &= \sum_{i=1}^8 |\hat{a}_{4i}|, \quad A_{43} = \sum_{i=1}^8 (\hat{a}_{4i})^2, \quad A_{42} = \sum_{i=1}^6 |\hat{a}_{4i}|, \quad A_{43} = \sum_{i=1}^6 (\hat{a}_{4i})^2 \end{aligned} \quad (3-2)$$

文字のAは連立微分方程式に対する公式の打ち切り精度判定基準である。

4. 安定性とその優劣の判定

連立の常微分方程式の安定性は、単一の微分方程式の安定性に帰着される。

いま、 $x = x_n$ における数値解を Y_n 、理論解を $y(x_n)$ とおき、 Y_n の誤差を $e_n = Y_n - y(x_n)$ で表すと、3段数4次法の場合、テスト方程式 $y' = \lambda y$ (λ : 複素数) に (2-3) を適用することより、

$$e_{n+1} = \{1 + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) h \lambda + (\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2) (h \lambda)^2 + \mu_1 \mu_3 \alpha_2 (h \lambda)^3\} e_n + \{(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) h \lambda + (\mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2) (h \lambda)^2 + \mu_1 \mu_3 \beta_2 (h \lambda)^3\} e_{n-1}$$

が得られる。これより次の特性方程式 (4-1) を得る。

$$\xi^2 - \{1 + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)h\lambda + (\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2)(h\lambda)^2 + \mu_1\mu_3\alpha_2(h\lambda)^3\} \xi - \{(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)h\lambda + (\mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2)(h\lambda)^2 + \mu_1\mu_3\beta_2(h\lambda)^3\} = 0 \quad (4-1)$$

但し、 ξ は複素数で、 $\xi \neq 0$ である。

(4-1)式に(2-4)式を代入し、整理すると

$$12\xi^2 - H_1(h\lambda)\xi - H_2(h\lambda) = 0 \quad (4-2)$$

但し、 $H_1(h\lambda) = 12 + 18h\lambda + 5(h\lambda)^2 + 2(h\lambda)^3$
 $H_2(h\lambda) = -\{6h\lambda + 5(h\lambda)^2 + 2(h\lambda)^3\}$ である。

よって、絶対安定領域 S_4 は

$$S_4 = \{h\lambda \mid 12\xi^2 - H_1(h\lambda)\xi - H_2(h\lambda) = 0, \\ H_1(h\lambda) = 12 + 18h\lambda + 5(h\lambda)^2 + 2(h\lambda)^3, \\ H_2(h\lambda) = -\{6h\lambda + 5(h\lambda)^2 + 2(h\lambda)^3\}, |\xi_i| \leq 1 (i=1,2)\}$$

となる。ここで、 $H_j(h\lambda)$ ($j=1,2$)は μ_i ($i=1,2,3$)を含んでいないので、絶対安定領域は自由パラメータ μ_i ($i=1,2,3$)に無関係に一意に定まることがわかる。 S_4 を図示すると図1のようになる。

2段数3次法の場合は、 $\alpha_2 = \beta_2 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ 、 $\mu_1 = \mu$ と(2-2)を(4-1)に代入することによって得られる。即ち、絶対安定領域 S_3 は次式で表すことができる。

$$S_3 = \{h\lambda \mid 12\xi_i^2 - \{12 + 3h\lambda + 5(h\lambda)^2\}\xi_i + 6h\lambda + 5(h\lambda)^2 = 0, \\ |\xi_i| \leq 1 (i=1,2)\}$$

S_3 を図示すると図2のようになる。 S_4 と同様に自由パラメータ μ に無関係に一意に定まる。

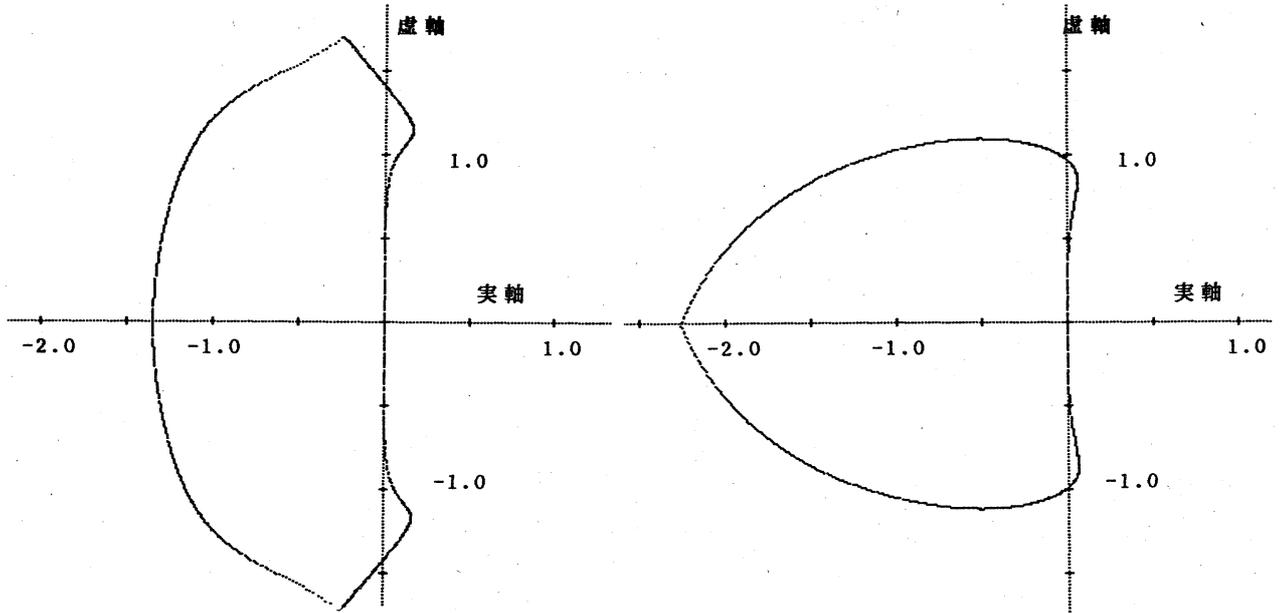


図1 3段数4次法の絶対安定領域

図2 2段数3次法の絶対安定領域

5. 丸め誤差に関する性質の判定

2段数及び3段数の各公式の丸め誤差に関する特性を判定する尺度として次に定義する数量を使用する。

$$R_3 = \sum_{i=0}^1 |\alpha_i| + \sum_{i=0}^1 |\beta_i| + 2|\mu| \quad (5-1)$$

$$R_4 = \sum_{i=0}^2 |\alpha_i| + \sum_{i=0}^2 |\beta_i| + 2|\mu_1| + 2|\mu_2| + 4|\mu_3|$$

これを2段数及び3段数公式の丸め誤差特性判定基準という。

6. Byrne 型 Pseudo-Runge-Kutta 法の特徴

2 段数 3 次法の打ち切り精度判定基準 A_{31} 及び丸め誤差特性判定基準 R_3 の両者の等高線を 図 3 に示す。この場合自由パラメータは μ のみで、横軸に μ を、縦軸に判定基準の値をとる。

2 段数 3 次法の打ち切り精度判定基準 $A_{32} \sim A_{33}$ の等高線図に関しては、紙面の都合上省略する。

3 段数 4 次法の打ち切り精度判定基準の等高線と、丸め誤差特性判定基準の等高線の両者を、図 4 ~ 図 8 に示す。この場合自由パラメータは μ_1 と μ_2 で、それぞれ横軸及び縦軸にとる。打ち切り精度判定基準の等高線を太い線で、丸め誤差特性判定基準の等高線を細線で示す。

なお、 $\mu_1 = \mu_2, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \mu_1 = 4/5$ において (2-4) 式の $\alpha_0 \sim \beta_2, \mu_3$ の分母が 0 になるので、丸め誤差特性判定基準の等高線が密になるのを避けるために、等高線の高さは 7 ~ 500 に抑える。

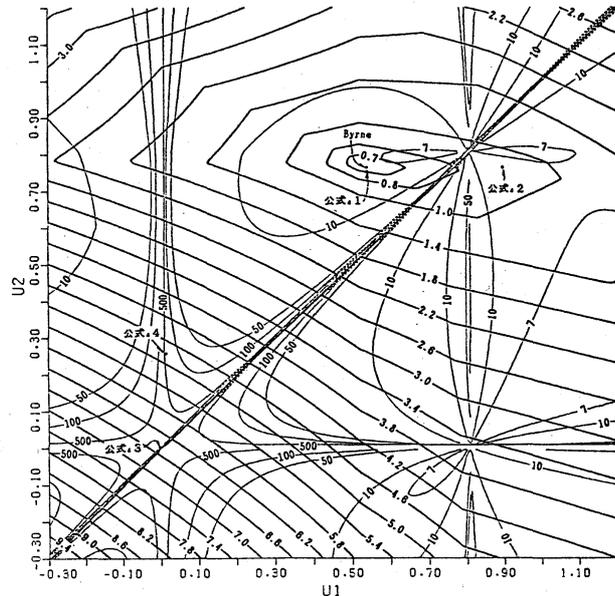
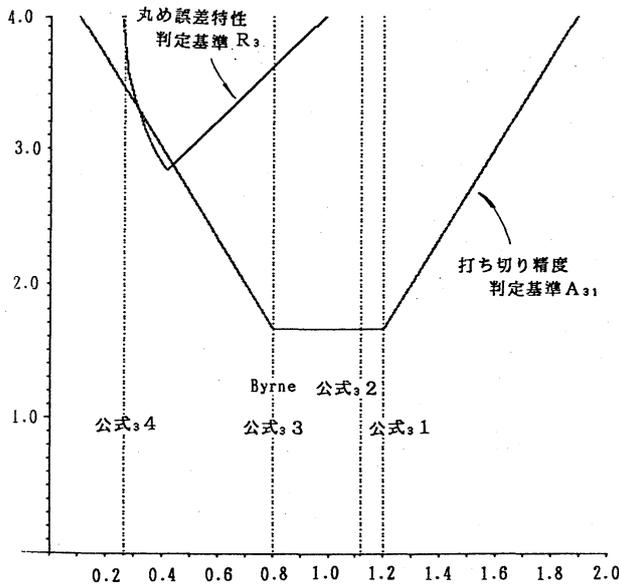


図 3 Byrne 型 2 段数 3 次法の判定基準 A_{31} と丸め誤差特性判定基準 R_3 の等高線図

図 4 Byrne 型 3 段数 4 次法の判定基準 A_{41} と丸め誤差特性判定基準 R_4 の等高線図

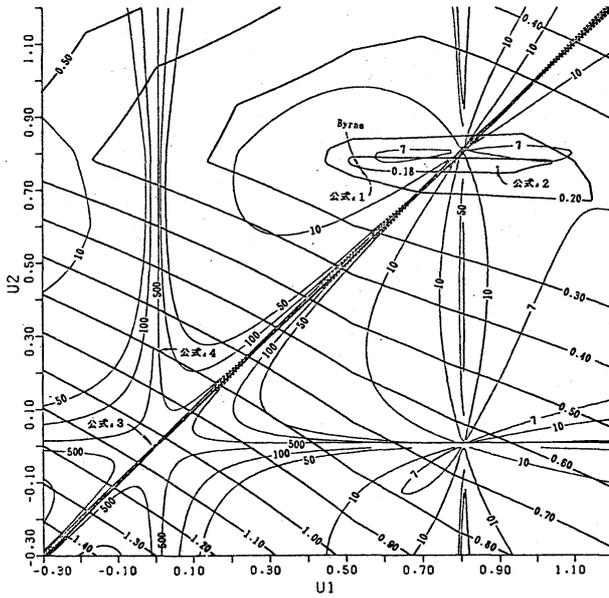


図5 Byrnes型3段数4次法の判定基準 A_{42} と丸め誤差特性判定基準 R_4 の等高線図

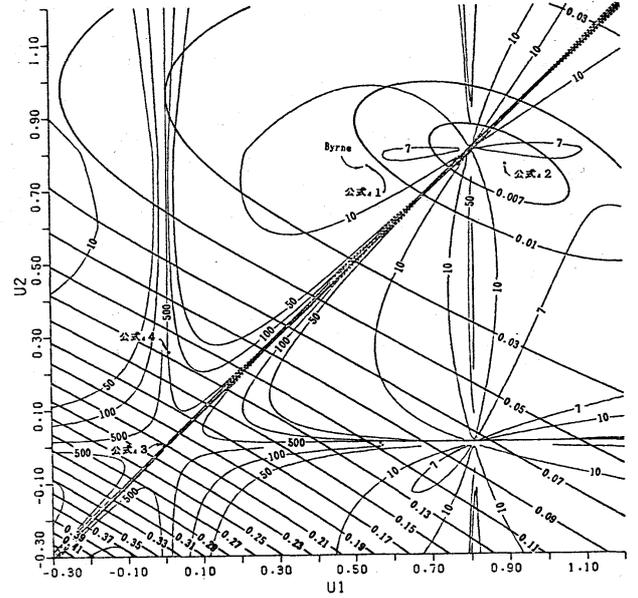


図6 Byrnes型3段数4次法の判定基準 A_{43} と丸め誤差特性判定基準 R_4 の等高線図

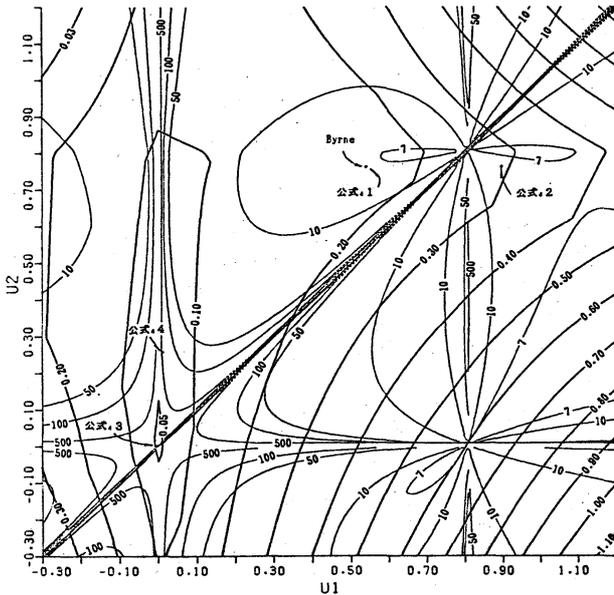


図7 Byrnes型3段数4次法の判定基準 A_{42} と丸め誤差特性判定基準 R_4 の等高線図

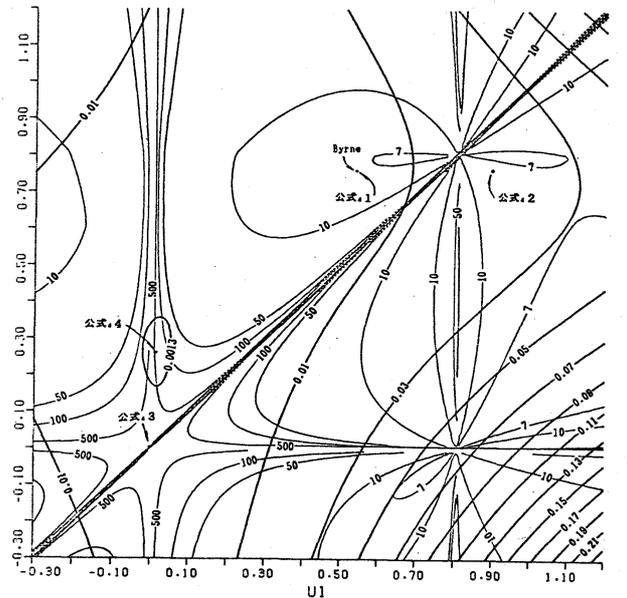


図8 Byrnes型3段数4次法の判定基準 A_{43} と丸め誤差特性判定基準 R_4 の等高線図

7. 既知公式

現在文献等で紹介されている Byrne 型の公式は、著者の知る限りでは 2 段数 3 次法、3 段数 4 次法とも Byrne 自身によるもののみであるので、これを評価の対象とする。

表 1 と表 2 に Byrne の公式の自由パラメータとその特性値を示す。

8. 公式の選択

Byrne 型の場合、安定性は自由パラメータに無関係に一意に定まるので、図 3～図 8 を参考にして打ち切り精度判定基準について特に有意義な公式を選び、ついで丸め誤差の観点を考慮して公式を導いた。Byrne 型 P 次法の打ち切り精度判定基準 $A_{P2}, A_{P3}, A_{P2}, A_{P3}$ が最小となる自由パラメータに対応する公式を順に公式 P 1, 公式 P 2, 公式 P 3, 公式 P 4 とする。

2 段数 3 次法の場合、丸め誤差特性基準は表 1 に示すように低いので打ち切り精度判定基準値が最良となる公式 3 1～公式 3 4 を得る。但し、公式 3 3 は $\mu=0.8$ で $Byrne_3$ と同じになる。

3 段数 4 次法の場合、打ち切り精度判定基準 A_{42}, A_{43}, A_{43} が最良で丸め誤差に関する性質が劣化していない公式 4 1, 公式 4 2, 公式 4 4 を提案する。打ち切り精度判定基準 A_{42} を最良とする公式 4 3 は、丸め誤差の点で問題になるので図 9 を参考にし、打ち切り精度を若干犠牲にし丸め誤差を改良した公式 4 3^{OPT} を提案する。公式 4 1～公式 4 4 の自由パラメータとその特性値を表 2 に示す。

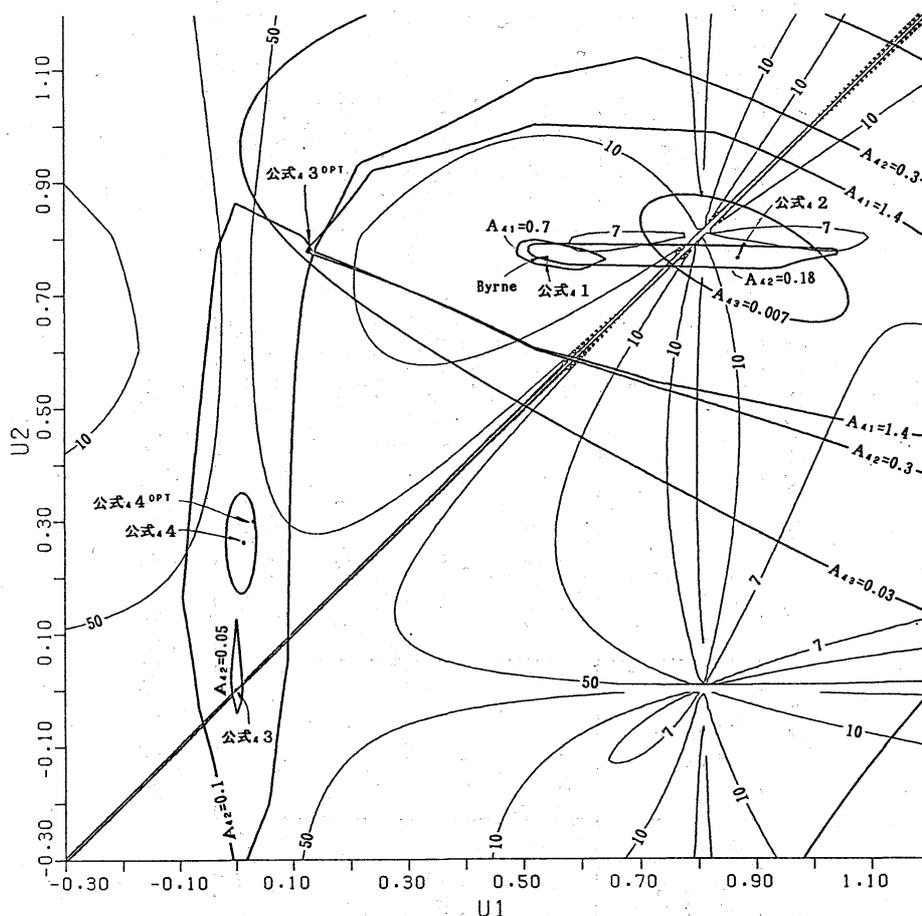


図 9 Byrne 型 3 段数 4 次法の公式 4 3^{OPT} と公式 4 4^{OPT} を導くために使用した判定基準 $A_{41} \sim A_{43}$ の主な等高線と丸め誤差特性判定基準 R_4 の等高線図

表 1 Byrne 型 2 段数 3 次法の特性

公式名と丸め誤差特性判定基準値	自由パラメータ μ	打ち切り精度判定基準						安定性	
		A_{31} 単一, Lotkin	A_{32} 単一, $\Sigma $	A_{33} 単一, $\Sigma ()^2$	A_{32} 連立, $\Sigma $	A_{33} 連立, $\Sigma ()^2$	絶対安定領域面積	区間の長さ	
Byrne 3.6	0.8	5/3 (=1.666...)	1/2 (=0.5)	1/12 (=-0.0833...)	1/3 (=-0.3333...)	1/18 (=-0.0555...)			
公式 ₃ 1 4.70555	1.2	5/3 (=1.666...)	5/12 (=-0.41666...)	1/16 (=-0.0625)	7/12 (=-0.5835...)	19/144 (=-0.1319...)			
公式 ₃ 2 4.24	1.12	5/3 (=1.666...)	13/30 (=-0.43333...)	11/180 (=-0.0611...)	8/15 (=-0.5333...)	17/150 (=-0.1133...)			
公式 ₃ 4 3.783333	4/15	31/9 (=-3.444...)	5/6 (=-0.83333...)	71/324 (=-0.2191...)	2/9 (=-0.2222...)	1/54 (=-0.0185...)	3.901004	2.25693	

凡例  は各判定基準での最小値を示している。

表 2 Byrne 型 3 段数 4 次法の特性

公式名と丸め誤差特性判定基準値	自由パラメータ 上段： μ_1 下段： μ_2	打ち切り精度判定基準						安定性	
		A_{41} 単一, Lotkin	A_{42} 単一, Σ	A_{43} 単一, Σ () ²	A_{42} 連立, Σ	A_{43} 連立, Σ () ²	絶対安定領域面積	区間の長さ	
Byrne ₄ .7073d+01	.541 .763	.63193611d+00	.17511583d+00	.10781563d-01	.14848403d+00	.61427398d-02			
公式 ₄ 1 .7073d+01	.54229 .76219	.63126885d+00	.17507111d+00	.10769081d-01	.14909971d+00	.61737754d-02			
公式 ₄ 2 .7421d+01	.87061 .76488	.88769062d+00	.17846662d+00	.61949697d-02	.28145192d+00	.17119794d-01			
公式 ₄ 3 .3333d+10	-.00001 .00002	.64582511d+01	.10333211d+01	.21132573d+00	.43062500d-01	.18537330d-02	3.611336	1.34897	
公式 ₄ 3 ^{OPT} .1343d+02	.13000 .78000	.13944444d+01	.30294444d+00	.28153621d-01	.99944444d-01	.25246150d-02			
公式 ₄ 4 .1498d+03	.01425 .25939	.47944520d+01	.79587453d+00	.12438385d+00	.64003398d-01	.12248598d-02			
公式 ₄ 4 ^{OPT} .4657d+02	.05000 .30000	.44222222d+01	.74305556d+00	.10855541d+00	.81250000d-01	.12948495d-02			

凡例  は各判定基準での最小値を示している。

9. 数値実験と考察

- (1) 2段数3次法の数値実験結果の掲載は紙面の都合上省略するが、各公式の性能はほぼ同じで優劣が付け難い結果になっている。
- (2) Byrne は、4次法について A_{41} (Lotkin の誤差限界の公式の係数のみに依存する係数) を判定基準にした打ち切り精度の観点から最適な公式として $\mu_1=0.541$, $\mu_2=0.763$ を選んでいるが、図4によればこの判断に誤りがないことがわかる。しかも、図5の判定基準 A_{42} からも適切であり、丸め誤差特性基準も最良に近いので極めて好ましい公式といえるだろう。
- (3) 公式 4_1 は、表1から明らかなように打ち切り精度判定基準 A_{41} においても最小であるからByrne 4_1 の公式の最適化でもある。実際、数値実験を行うとわずかながら公式 4_1 が優れている場合が多い。
- (4) 公式 4_2 は、Byrne 4_1 の公式及び公式 4_1 より数値実験において常に若干悪い結果が観察され好ましい公式ではない。
- (5) 公式 4_3 は、打ち切り精度をよくするために、 μ_1, μ_2 を共に0の近傍に取っているが丸め誤差が極端に悪化するので不相当である。このことは数値実験結果からも(刻み幅を小さくすると他の公式と比較して誤差が大きくなっていることから)確かめられる。
- (6) 公式 4_3 を丸め誤差の観点で最適化した公式 4_3^{OPT} は、非線形な連立微分方程式において他の公式よりも優れている例を見つけることができ、そのような方程式において有効と考えられる。
- (6) 公式 4_4 およびそれを丸め誤差の観点から最適化した公式 4_4^{OPT} は、数値実験において他の公式よりも常に悪い結果が観察され好ましい公式とはいえない。

10. まとめ

- (1) Byrne型2段階法の2段数3次法および3段数4次法は、安定性が一意で自由パラメータと無関係であるので、公式の自由パラメータによる特性の制御は、打ち切り精度と丸め誤差の両面から行われることになる。
- (2) Byrne型2段階法の2段数3次法および3段数4次法について、自由パラメータが実用的に有意義な変域において変動するとき、打ち切り精度判定基準および丸め誤差特性判定基準がどのように変動するかの模様を図式的にとらえた。このグラフの利用により、我々はさらに性能の良い公式の開発可能性の有無の判定や、任意の公式が与えられたとき、その特性の直感的な評価等が容易に出来る。
- (3) 打ち切り精度判定基準にはいろいろな種類があり、全ての判定基準に対して最良の公式は存在しない。
- (4) Byrneの3次法の公式、公式 3_1 、公式 3_2 、公式 3_4 は、いずれも数値実験の結果からははつきりした優劣が付け難い。
- (5) Byrneの既知公式の数値解は、単一および連立のいずれの微分方程式に対しても良い結果を得ている。
- (6) 連立の場合は、今回提案した公式 4_1 と公式 4_3^{OPT} を推奨する。

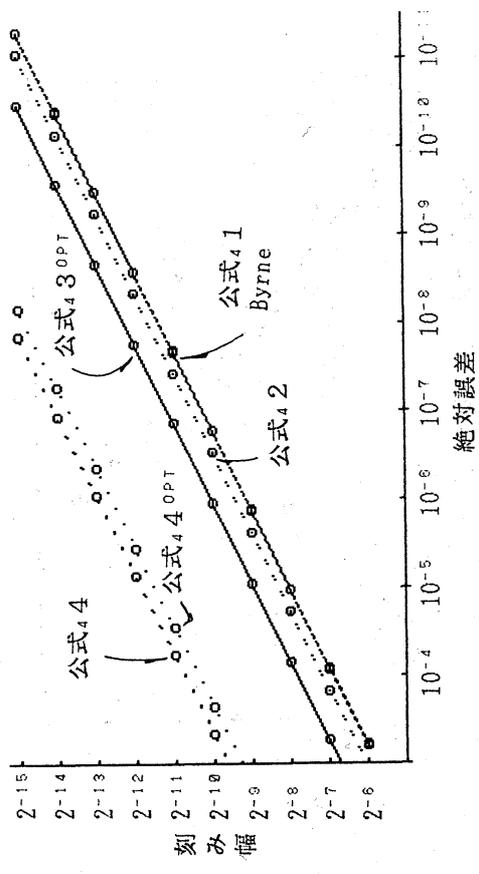
例題 1 初期値問題 $y_1' = y_2, y_1(0) = 1$
 $y_2' = -y_1, y_2(0) = 1$

理論解 $y_1 = \sin(x)$
 $y_2 = \cos(x)$

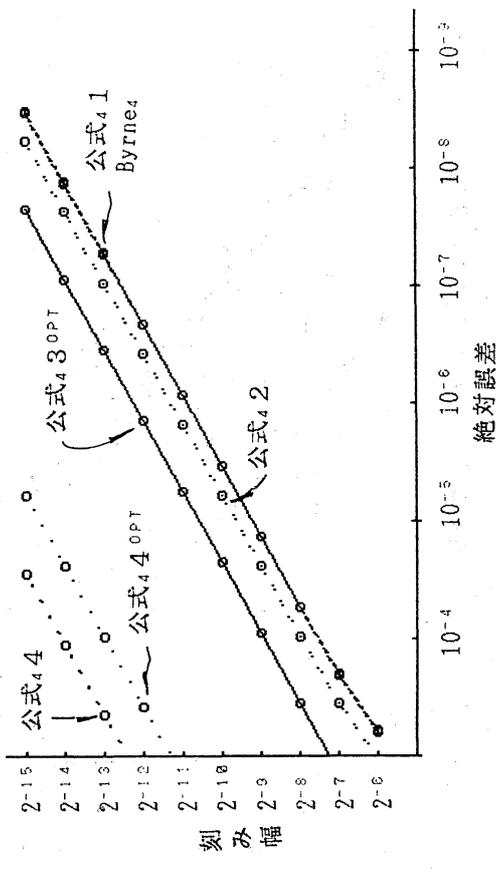
公式 Byrne 2-step 3-stage 4-order による ステップ数 50,
 刻み幅 0.001 の 数値実験結果 (絶対誤差)

	first-step	last-step	maximum
Byrne ₄	0.362621d-11	0.181222d-07	0.181222d-07
公式 ₄ 1	0.725235d-08	0.362164d-06	0.362164d-06
公式 ₄ 2	0.354674d-11	0.177250d-07	0.177250d-07
公式 ₄ 3 ^{OPT}	0.709340d-08	0.354227d-06	0.354227d-06
公式 ₄ 4	0.633729d-11	0.316745d-07	0.316745d-07
公式 ₄ 1 ^{Byrne₄}	0.126744d-07	0.632933d-06	0.632933d-06
公式 ₄ 2 ^{Byrne₄}	0.237505d-10	0.118569d-05	0.118569d-05
公式 ₄ 3 ^{OPT}	0.475012d-07	0.237210d-05	0.237210d-05
公式 ₄ 4 ^{Byrne₄}	0.299165d-07	0.258929d-04	0.499109d-04
公式 ₄ 1 ^{Byrne₄}	0.598331s-04	0.299052d-02	0.299052d-02
公式 ₄ 2 ^{Byrne₄}	0.649853d-08	0.242064d-04	0.242064d-04
公式 ₄ 3 ^{OPT}	0.129970d-04	0.649544d-03	0.649544d-03

刻み幅と y_1 の絶対誤差の関係図



刻み幅と y_2 の絶対誤差の関係図

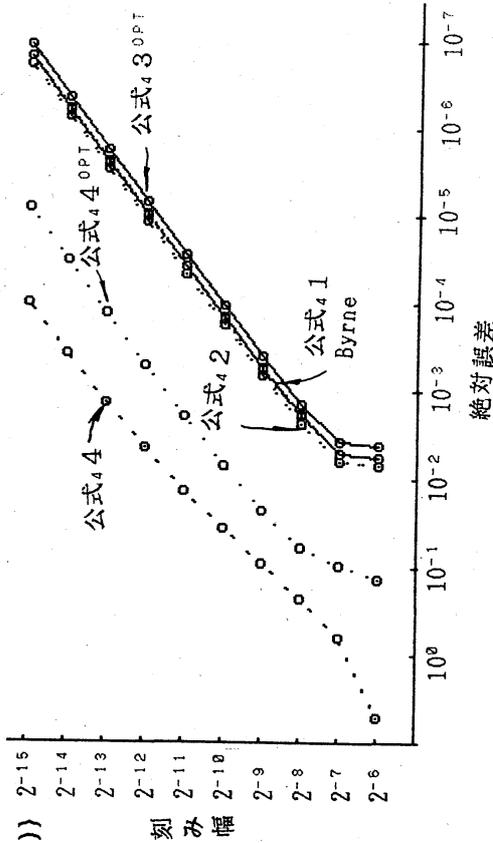


例題 2 初期値問題 $y_1' = y_2, \quad y_1(0) = 1$
 $y_2' = -y_1 + 3\cos(x) \quad y_2(0) = 1$
 理論解 $y_1 = \cos(x) + \sin(x) + 3x\sin(x)/2$
 $y_2 = -\sin(x) + \cos(x) + 3/2(x\cos(x) + \sin(x))$

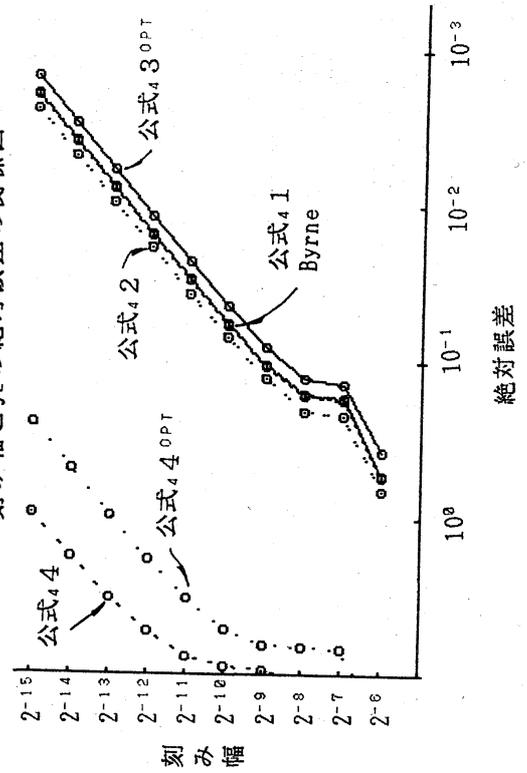
公式 Byrne 2-step 3-stage 4-order による ステップ数 50,
 刻み幅 0.001 の 数値実験結果 (絶対誤差)

	first-step	last-step	maximum
Byrne4	0.145010d-07	0.152123d-03	0.152123d-03
	0.127761d-03	0.588321d-02	0.588321d-02
公式4.1	0.141832d-07	0.156517d-03	0.156517d-03
	0.131491d-03	0.605440d-02	0.605440d-02
公式4.2	0.253426d-07	0.187026d-03	0.187026d-03
	0.158091d-03	0.733312d-02	0.733312d-02
公式4.3 OPT	0.949787d-07	0.111682d-03	0.111682d-03
	0.983323d-04	0.453283d-02	0.453283d-02
公式4.4	0.119636d-03	0.246028d-01	0.371709d-01
	0.643464d-01	0.884851d+00	0.886830d+00
公式4.4 OPT	0.259876d-04	0.735076d-02	0.735076d-02
	0.166271d-01	0.517480d+00	0.517480d+00

刻み幅と y_1 の絶対誤差の関係図



刻み幅と y_2 の絶対誤差の関係図



例題 3 初期値問題 $y' = -y$, $y(0) = 1$
理論解 $y = e^{-x}$

	first-step	last-step	maximum
Byrne ₄	0.982025d-06	0.467743d-04	0.467743d-04
公式 ₄ 1	0.982398d-06	0.467921d-04	0.467921d-04
公式 ₄ 2	0.953977d-06	0.454371d-04	0.454371d-04
公式 ₄ 3 ^{OPT}	0.109544d-05	0.521821d-04	0.521821d-04
公式 ₄ 4	0.120607d-03	0.648849d-02	0.648849d-02
公式 ₄ 4 ^{OPT}	0.269865d-04	0.131823d-02	0.131823d-02

例題 5 初期値問題 $y' = -y + \sin(2x)$, $y(0) = 1$
理論解 $y = \sin(2x) - 2\cos(2x)/5$

	first-step	last-step	maximum
Byrne ₄	0.850014d-16	0.449824d-14	0.449824d-14
公式 ₄ 1	0.858688d-16	0.453944d-14	0.453944d-14
公式 ₄ 2	0.304660d-15	0.152298d-13	0.152298d-13
公式 ₄ 3 ^{OPT}	0.189084d-15	0.885316d-14	0.885316d-14
公式 ₄ 4	0.266822d-15	0.137449d-13	0.137449d-13
公式 ₄ 4 ^{OPT}	0.242969d-15	0.124476d-13	0.124476d-13

例題 4 初期値問題 $y' = 1 - y^2$, $y(0) = 0$
理論解 $y = \tanh(x)$

	first-step	last-step	maximum
Byrne ₄	0.111808d-18	0.490194d-16	0.490194d-16
公式 ₄ 1	0.211758d-20	0.435781d-16	0.435781d-16
公式 ₄ 2	0.111234d-15	0.556243d-14	0.556243d-14
公式 ₄ 3 ^{OPT}	0.125554d-15	0.618639d-14	0.618639d-14
公式 ₄ 4	0.511243d-15	0.253264d-13	0.253264d-13
公式 ₄ 4 ^{OPT}	0.472231d-15	0.233887d-13	0.233887d-13

例題 6 初期値問題 $y' = 2y/(1+x)$, $y(0) = 1$
理論解 $y = (x+1)^2$

	first-step	last-step	maximum
Byrne ₄	0.681746d-15	0.332824d-13	0.332824d-13
公式 ₄ 1	0.680011d-15	0.333257d-13	0.333257d-13
公式 ₄ 2	0.109981d-14	0.538250d-13	0.538250d-13
公式 ₄ 3 ^{OPT}	0.161329d-15	0.797105d-14	0.797105d-14
公式 ₄ 4	0.346944d-17	0.832667d-16	0.832667d-16
公式 ₄ 4 ^{OPT}	0.208166d-16	0.955832d-15	0.955832d-15

参考文献

- 1) G. D. Byrne & R. J. Lambert : Pseudo-Runge-Kutta methods involving two points
J. Assoc. Comput. Mach., 13, 114-123.
- 2) G. D. Byrne : Parameters for pseudo Runge-Kutta Methods, Comm. ACM, 10, 102-104.
- 3) 三井 斌友 : 数値解析入門, 朝倉書店(1985)
- 4) 田中 正次 : Runge-Kutta 法の特性について 情報処理 Vol.18 NO.9 870-878
- 5) 田中 正次 : Pseudo-Runge-Kutta 法とその2ndおよび3rd order Runge-Kuttaの打ち切り誤差の評価への応用について 情報処理 Vol.10 NO.6 406-417 (1969)
- 6) 荒川、岡本、山岸 : Pseudo-Runge-Kutta法の安定性に関する研究
山梨大学計算機科学科卒業論文 (1974)
- 7) 新海、清水 : Pseudo-Runge-Kutta法の特性について その2
山梨大学計算機科学科卒業論文 (1988年3月)