

地球流体中の孤立渦斑のふるまい

京大・理 矢野順一 (Jun-ichi Yano)

1. はじめに

地球流体(大気・海洋)の流れの中には、様々な孤立渦が見られる。木星の大赤斑やメキシコ湾流中のringなどはそれらの典型例である。これらの孤立渦のふるまいを調べるかんたんなモデルはないだろうか。

2次元Euler流中で渦の性質を調べるためには、系の渦度 ω が流れに沿って保存される

$$\frac{D}{Dt} \omega = 0 \quad (1.1)$$

ことに注目して、渦点(point vortex)や渦斑(vortex patch)のモデルを作ることができる(Aref, 1983)。渦度 ω は、流線 ψ と

$$\omega = r^2 \psi \quad (1.2)$$

の関係で結ばれている。渦点（あるいは渦斑）モデルでは、渦度場を

$$\omega(\vec{x}) = \sum_i \omega_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) \quad (1.3)$$

の形で与えてやる。 δ は、Diracによって定義された一般和で、渦点の場合、単純和（ \sum ）、渦斑の場合は領域積分（ $\int d\vec{x}_i$ ）となる。渦点（あるいは渦斑）の位置 $\vec{x}_i(t)$ は、

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_i = \nabla \times \hat{k} \psi(\vec{x} = \vec{x}_i) \quad (1.4)$$

に従って時間発展する。

これに対して、地球流体において重要な保存量は、ポテンシャル渦度

$$Q = \omega_a / H = (\omega + f) / H \quad (1.5)$$

である。ここで、 ω_a は、絶対渦度（の鉛直成分）で、相対渦度（の鉛直成分） ω と回転角速度の鉛直成分の2倍（コリオリ係数） f の和となる。 H は、流体の厚さ（より正確には、適当な保存量（エントロピー、密度etc）が一定である2つの

面の間の厚さ)である。この量が流れに沿って保存されることは、密度一様(一定)の流体については、渦度保存と連続の式とから容易に導かれる。(当然、非回転 $f=0$ の系でもこの保存式は成り立つ。)より一般的な導出は、Pedlosky(1979)のSec.2.5に与えられている。

ポテンシャル渦度が、地球流体において、重要な保存量である理由は、大規模スケール(大気で1000 km以上、海洋では100 km以上)の地球流体の流れの場合は、密度成層と回転による束縛のために、ほぼ水平二次元的であるが、弱い水平発散の効果が無視しえないからである。ポテンシャル渦度の式では、この水平発散の効果は流体の厚さ H の変化という形で考慮されている。さらに、流れが準二次元的であるので、渦度の鉛直成分 ω_z は、近似的に水平成分に対する流線函数 ψ より(1.2)の関係式によって計算される。流体の厚さ H も、流れがほぼ水平に限られているために、静力学の式より、気圧 p で定められ、さらに、地衡風平衡(コリオリカと気圧傾度力が釣りあっている)

$$\hat{k} \times \vec{v} = -\frac{1}{f} \nabla p \quad (1.6)$$

が近似的に成り立つので、気圧 p は、本質的に流線函数 ψ で

おきかえられる。したがって、ポテンシャル渦度 Q は、近似的に、流線函数 ψ のみで表わすことができ、したがって、(1.1) と (1.3) で渦度 ω をそのままポテンシャル渦度 Q でおきかえたモデル (ポテンシャル渦点 (point potential vorticity) あるいは、ポテンシャル渦斑 (potential vorticity patch)) を考えることができる。

2. 定式化

ここでは、準地衡風近似と呼ばれている近似 (Pedlosky, 1979) の下で、鉛直方向を二層に離散化したモデルを用いて、木星の大赤斑を念頭におきながら、1 ユの大きさをもった孤立渦斑のふるまいを考察する。二層にするのは、流れの鉛直構造を最低限考慮に入れたいからである。

ポテンシャル渦度保存の式は、

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + J(\psi_i, Q_i) = 0 \quad (i=1,2) \quad (2.1)$$

と書ける (Pedlosky, 1979, Sec. 6.17)。 ψ_1 と ψ_2 は、各々、上層、下層の流線函数、 J はヤコビアン

$$J(a,b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}$$

で、 x, y は、各々、東向き、北向きの座標である。各層のポテンシャル渦度は、適当に無次元化された形で、

$$Q_1(\psi_1, \psi_2) = \nabla^2 \psi_1 + \psi_2 - \psi_1 + \epsilon \beta y \quad (2.2a)$$

$$Q_2(\psi_1, \psi_2) = \nabla^2 \psi_2 + \delta(\psi_1 - \psi_2) + \epsilon \beta y \quad (2.2b)$$

と書ける。ここで、 δ は、下層の平均の厚さを1と規格化したときの上層の平均の厚さである。両式の最後の項は、コリオリ係数 f が緯度とともに増加する効果を線形近似で考慮している。パラメータ β は、次数が1となるように、 ϵ の次数が定義されている。また、水平スケールは、下層についての Rossby の変形半径 L によって無次元化されている。これは、重力波の伝播速度 \sqrt{gH} と、慣性振動の位相速度 Lf がちょうど等しくなる水平スケールである (Pedlosky, 1979, Sec. 3.9)。

一様なポテンシャル渦度 $\epsilon\alpha$ の場で、各層 ($i=1, 2$) それぞれある孤立した領域 $r < r_i(0, t)$ [ここで、極座標 (r, θ) をとっている] で、 q_i のポテンシャル渦度を与えた場合

$$Q_i(\vec{x}) = \epsilon\alpha + q_i H(r_i(0, t) - r) \quad (i=1, 2) \quad (2.3a)$$

を考える。流線 ψ_i は、一様なbackgroundのポテンシャル渦度による部分 $e\psi$ と渦による部分 $g_1\phi_i$ に分けられる:

$$\psi_i = e\psi + g_1\phi_i \quad (2.3b)$$

(2.2) から、一様なポテンシャル渦度が作り出す帯状流 $\bar{U}(\eta)$ は、

$$\bar{U}(\eta) = -\frac{d}{d\eta}\psi(\eta) = \beta\frac{\eta^2}{2} - \alpha\eta + \gamma \quad (2.4)$$

で与えられる。したがって、以下では、このような放物線形の帯状流中の孤立渦斑のふるまいを考えることになる。次節では、摂動法を用いて、渦斑の定常解析解を導き出す。この摂動解析解の妥当性、安定性を吟味するために、続く節では、数値計算の結果について述べる。

3. 定常解析解

定常解は、(2.2) と (2.3) より

$$Q_1(\phi_1, \phi_2) = H(r_2(\theta) - r) \quad (3.1a)$$

$$Q_2(\phi_1, \phi_2) = g|\phi| (r_2(\theta) - r) \quad (3.1b)$$

を解くことにより求められる。ここで、

$$q = q_2 / q_1 \quad (3.2)$$

である。(3.1)の式は、両層の流線函数 ϕ_1, ϕ_2 が結合した形になっているので、

$$\phi_1 = \phi_{BT} + \phi_{BC} \quad (3.3a)$$

$$\phi_2 = \phi_{BT} - S\phi_{BC} \quad (3.3b)$$

の変数変換をして、順圧 (barotropic) 成分 ϕ_{BT} と傾圧 (baroclinic) 成分 ϕ_{BC} についての方程式をそれぞれ独立に解いてやることによって解を求める。

解くべき微分方程式は線形であるが、渦斑の境界の位置 $r_c(\theta)$ が未定であるので、境界条件に非線形性が入ってくる。そこで、孤立渦斑の定常解を解析的に求めるために、パラメータ ε を微小とする擾動法を用いる。

最低次では、(2.4)の帯状流の効果は、無視され、静止した場に円形の孤立渦斑をおく問題を考えることになる。この渦の半径を r_0 としたとき、流れの場 $\phi_i^{(0)}$ を各層($i=1, 2$)について決定する。 ε についての次の次数で、帯状流による渦の変形の効果が考慮される。各層($i=1, 2$)の渦は、 $r_i = r_0$ の円形から、 $r_i = r_0 + \varepsilon \eta_i(\theta)$ の形に変形される。 $r = r_i$

で与えられている各層 ($i=1, 2$) の境界条件は、 $r=r_0$ のまわりで Taylor 展開した形で書き表してやる。渦の変形に従って、流れの場にも $\epsilon \phi_i^{(2)}$ の項がつけ加わる。

一般的な解の形は複雑なので、ここでは記さないが、ここで特に興味あるのは、 $S = -\delta$ の場合である。これは、両層の渦斑に与えられる渦度 δ_i が逆符号で、両者の大きさの比が、両層の厚さの比の逆数にちょうど等しい場合である。このように両層に渦度 δ_i を分配してやると、帯状流の効果を考慮しない最低次の流れの場は、傾圧成分のみ (i.e. $\phi_{BT}^{(1)} = 0$) となる。これに、言わば、純粹に傾圧的な帯状流を与えると、渦がどのようにそれに対して自己調節するか、ということが問題となる。結果として、1次の渦の流れの場は、傾圧成分のみ (i.e. $\phi_{BC}^{(1)} = 0$) となる。また、渦の変形 η_i には、

$$\eta_2(\theta) = -\frac{1}{S} \eta_1(\theta) \quad (3.4)$$

の関係が成り立つ。この関係は、最低次の両層の渦の流れの強さの比は、(3.3) より、両層の渦度の比 δ ($= -S$) に等しいことより理解される。つまり、渦度の比 δ (上層の厚さ S) が小さいほど、最低次の下層の渦は弱く、それに比例して、帯状流による渦の変形の効果を受けやすくなる。

渦の具体的な形は、最低次で与えられる境界上での帯状流

$$\Psi(r=r_0, \rho \sin \theta) = \Psi_0 + \Psi_1 \rho \sin \theta + \Psi_2 \cos 2\theta + \Psi_3 \rho \sin 3\theta$$

を考慮して定められる。(ここで、係数 $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ は、

$$\Psi_0 = \frac{d}{4}, \quad \Psi_1 = -\left(\frac{\beta}{8} r_0^3 + \gamma r_0\right),$$

$$\Psi_2 = -\frac{d}{4} r_0^2, \quad \Psi_3 = \frac{\beta}{24} \quad (3.5)$$

より定められる。)したがって、渦の形の変形 η_i は、

$$\eta_i(\theta) = \eta_{i,1} \rho \sin \theta + \eta_{i,2} \cos 2\theta + \eta_{i,3} \rho \sin 3\theta \quad (i=1, 2) \quad (3.6)$$

の形で与えられる。ただし、

$$\eta_{i,m} = \frac{1}{r_0 [1/2m - I_1(\nu r_0) K_1(\nu r_0)]} \frac{\Psi_m}{g_i} \quad (m=1, 2, 3) \quad (3.7)$$

である。ここで、 $\nu = (1+S)^{1/2}$, I_1, K_1 は、各々、1次の第1種、第2種の変形された Bessel 函数である。

それぞれの係数 $\alpha_{r,m}$ ($m=1,2,3$) は、 $m=1$ が北向きの変位の大きさ (南北方向に渦の軸を傾ける)、 $m=2$ は楕円変形の大きさ、 $m=3$ は三角変形の大きさを表わす。

(3.7) と (3.5) より、北向きの変位は、 β 効果 (帯状流放物形成分) と一様流の大きさ α で、楕円変形は帯状流の線形シラ成分の大きさ α のみで、三角変形は β 効果 (帯状流の放物形成分) のみで決まることが分かる。したがって、渦の変形は、大きく、線形シラに対する変形と放物形シラに対する変形とに分けて考えることができる。

(3.6) の分母

$$\frac{1}{2m} - I_1(\nu r_0) K_1(\nu r_0) \quad (3.8)$$

は、2つの項からなっているが、これは、帯状流に対して渦が形を自己調節しようとする2つの効果を表わしている。第1の項 $1/2m$ は、帯状流による境界 $r=r_0$ に沿っての各層の厚さの変位 (この変位は、地衡風平衡の関係 (1.6) によって流れの場と直接、結びついている) を最小にするような調節、第2の項 $I_1(\nu r_0) K_1(\nu r_0)$ は、帯状流による流線の変形に従った境界の形の変形を表わす。この2つの効果は、全く逆向きに、渦を変形させるように働く。

図1は、横軸に νr_0 をとって、 $I_1(\nu r_0) K_1(\nu r_0)$ の値をとったものである。 $m=1$ に対しては、(3.8)の値は常に正であるが、 $m=2, 3$ に対しては、各々、 $\nu r_0 = S_2 \approx 1.705$, $\nu r_0 = S_3 \approx 2.840$ で、符号を負から正に変える。したがって、定常解は、各々の m についての(3.8)の符号によって、3つの相に分けられる。3つの相の境界 $\nu r_0 = S_2, S_3$ では、特別な場合($\bar{\psi}_2 = 0$, $\omega \bar{\psi}_3 = 0$)を除いて、定常解が存在しない。

第1相($\nu r_0 < S_2$)では、渦の变形($m=2, 3$)は、帯状流による流線の变形に従って決まる。線形シア中(図2(a), (b)): $S=1$, $\nu r_0 = \sqrt{2}$, $\alpha=0.5$, $\beta=0$ では、渦は楕円变形のみを受け、帯状流と同符号の渦度をもつ層では、渦は帯状流に引きのぼされるように、東西に横長となり、帯状流と異符号の渦度をもつ層では、渦は帯状流に押しつぶされるように、南北に縦長となる。(図は、 $\epsilon=0.1$, $g_1 > 0$ の場合。以下同様。)放物形シア中(図2(c)): $d=0$, $\beta=2$ では、渦は、自分自身と同符号をもつ渦度の方向に南北変位し、渦度が同符号の領域で東西に引きのぼされ、異符号のところでは東西から押しつぶされることによって、三角变形をおこす。

第1相から第2相($S_2 < \nu r_0 < S_3$)に移ると、線形シア中の楕円变形の向きが逆転して、帯状流がもたらす水

面歪位に対する調節によって決まるようになる。したがって、帯状流と同符号の渦度ももつ層では、渦は帯状流を押しつけるように南北方向にのび、異符号の層では、東西方向にのびされる。放物形シアに対する歪形の向きは第1相と同じだが、歪形率が大きくなる。

さらに、第2相から第3相 ($S_3 < \nu\alpha_0$) に移ると、さらに、放物形シア中の歪形も逆転して、帯状流がもたらす水面歪位に対する調節によって決まるようになる。(図3: $S = 1, \nu\alpha_0 = 3\sqrt{2}$)

このように、渦の半径を大きくしていくと、流線に対する調節よりも水面歪位に対する調節の効果が大きくなっていく理由は、地衡風平衡 (1.6) の下では、渦度ポテンシャル保存の式 (2.1) において、水平スケールを大きくするにつれて、流体の厚さの保存の方が、渦度の保存の部分よりも力学に重要な寄与をするようになってくるからである。(地衡風平衡の下では、同じ速度の流れの場を得るにも、流れの場の水平スケールが大きいほど大きい水面歪位を与えねばならない。このようなスケールによる運動の特性の変化は、地球流体の様々な理論で重要になってくる (例えば、Yano and Tsujimura, 1987)。

4. 数値実験

前節で求めた定常解析解の安定性を調べるために、数値実験によって、渦の形の時間発展を調べた。数値的手法は、contour dynamics と呼ばれているもので、アルゴリズムは、Stern (1985), Stern and Pratt (1986) に用いられているものと同様である。初期条件としては、 $r = r_0$ の円形渦を与え、その時間発展を調べた。典型的な計算では、渦の境界は50個の点で近似され、時間差分の値は、0.1にとっている。ただし、数値計算に用いている無次元時間は、(2.1)式で用いている無次元時間に L/r_0 倍したものになっている。ここで、 L は、前出の Rossby の楕円半径である。

以下、数値実験の結果も、解析的結果の場合と同様、 $\beta = -\beta_0$ の場合に限って考察する。(また、解析的結果との比較のためには、 $\epsilon = 1$ とせねばならない。)

第1相では、帯状流のシアが十分弱く、上下層の比 β がほぼ1に近いとき、渦は、最終的に、振動をともないながら、解析的に予想される形におちついていく。上下層での渦の歪形率の差も、解析的に予想されるように、 β を1からずらすほど大きくなっていく。 $\beta = 1$ のまま、線形シアを強くしていくと、帯状流と異符号の渦度をもつ層の渦が不安定を引きおこして、双極子型に引きのばされていく (図4(a)):

$\beta = 0$, $d = 0.4$, $\sigma = 0$, $\tau_0 = 1$, $\delta = 1$)。同様に、上下層の比 δ を小さくしていくと、弯形の大きい下層の渦が不安定を起し、放物形シアの中では、渦の南向きにつき出た部分からくずれていく (図4 (b) : $\beta = 0.5$, $d = 0$, $\sigma = -\beta^2/8$, $\tau_0 = 1$, $\delta = 0.3$)。

第2相では、渦の平衡形は、線形シアに対して不安定となる。渦は、いったん、第1相で予想される方向に楕円変形を始めるが、やがて、第2相での平衡形の方に回転を始め、その途中で、帯状流と異符号の渦度をもつ層で、渦は不安定をおこし、双極子型に弯形していく (図4 (c) : $\beta = 0$, $d = 0.2$, $\sigma = 0$, $\tau_0 = 1$, $\delta = 1$)。さらに、第3相では、放物形シアに対しても、渦の平衡形は不安定となり、渦は、東西方向にどんどん引き寄せられていく (図4 (d) : $\beta = 0.5$, $d = 0$, $\sigma = -\beta^2/2$, $\tau_0 = 2$, $\delta = 1$)。

5. まとめ

準地衡風二層モデルを用いて、孤立ポテンシャル渦斑のふるまいについて調べた。特に、上下層の厚さの比 δ の逆が、上下層に与える異符号の渦度の anomaly の大きさの比 $-\sigma$ に等しい場合に問題を限定した。この場合、平均帯状流なしの場合では、上下層に、それぞれの層のポテンシャル渦度

の anomaly に比喩した、全く同じパターンの流れ（向きはしたがって逆向き）が与えられる。（つまり、傾圧成分のみをもつ。）

まず、摂動法によって、定常解を解析的に求めた。一様流は、渦を南北方向に傾かせ、線形シアは、渦に楕円変形を与える。放物形シアは、渦を南北方向に傾かせるとともに、三角形に変形させる効果をもつ。帯状流を与えることによつて、渦は大きく2つの効果を受け、渦の変形の向きは、この2つの効果の兼ねあいで決まる。帯状流によつて、流れが曲げられるので、それにあわせた渦の変形。他方は、逆に、曲げられた流線を円形に近くもどすよりに水面変位を与える（従つて、渦の流線を曲げる）効果。渦の半径 r_0 を大きくするほど、第2の効果が大きくなり、渦の平衡解は、 $r_0 = r_2 \cong 1.705 / \sqrt{1+S}$ 、 $r_3 \cong 2.840 / \sqrt{1+S}$ の2点で相転移をおこす。第1相 ($r_0 < r_2$) では、渦の形は流線の変形に対する調節だけで決まり、一方、第3相 ($r_3 < r_0$) では、水面変位による調節だけで渦の形が決まる。両者の中間の第2相 ($r_2 < r_0 < r_3$) では、楕円変形は水面変位によつて決まり、三角変形は流線の変形によつて決まる。

Contour dynamics を用いた数値実験の結果は、だいたいにおいて、以上の解析的結果を支持したが、第2相・第

3相では(一般に)安定平衡解は存在しないこと、第1相でも、強いシズ流中、あるいは、上下層の強さの差が大きいつき、平衡解が不安定になることが分かった。

引用文献

- Aref, H., 1983: Integrable, chaotic, and turbulent vortex motions in two-dimensional flows. Ann. Rev. Fluid Mech., 15, 345-389.
- Pedlosky, P., 1979: Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag.
- Stern, M. E., 1985: Lateral wave breaking and "shingle" formation in large-scale shear flow. J. Phys. Oceanogr., 15, 1274-1283.
- Stern, M. E., and L. J. Pratt, 1985: Dynamics of vorticity fronts. J. Fluid Mech., 161, 513-532.
- Yano, J.-I., and N. Y. Tsujimura, 1987: The domain of validity of the KdV-type solitary Rossby waves in the shallow water -plane model. Dyn. Atmos. Ocean, 11, 101-129.

1

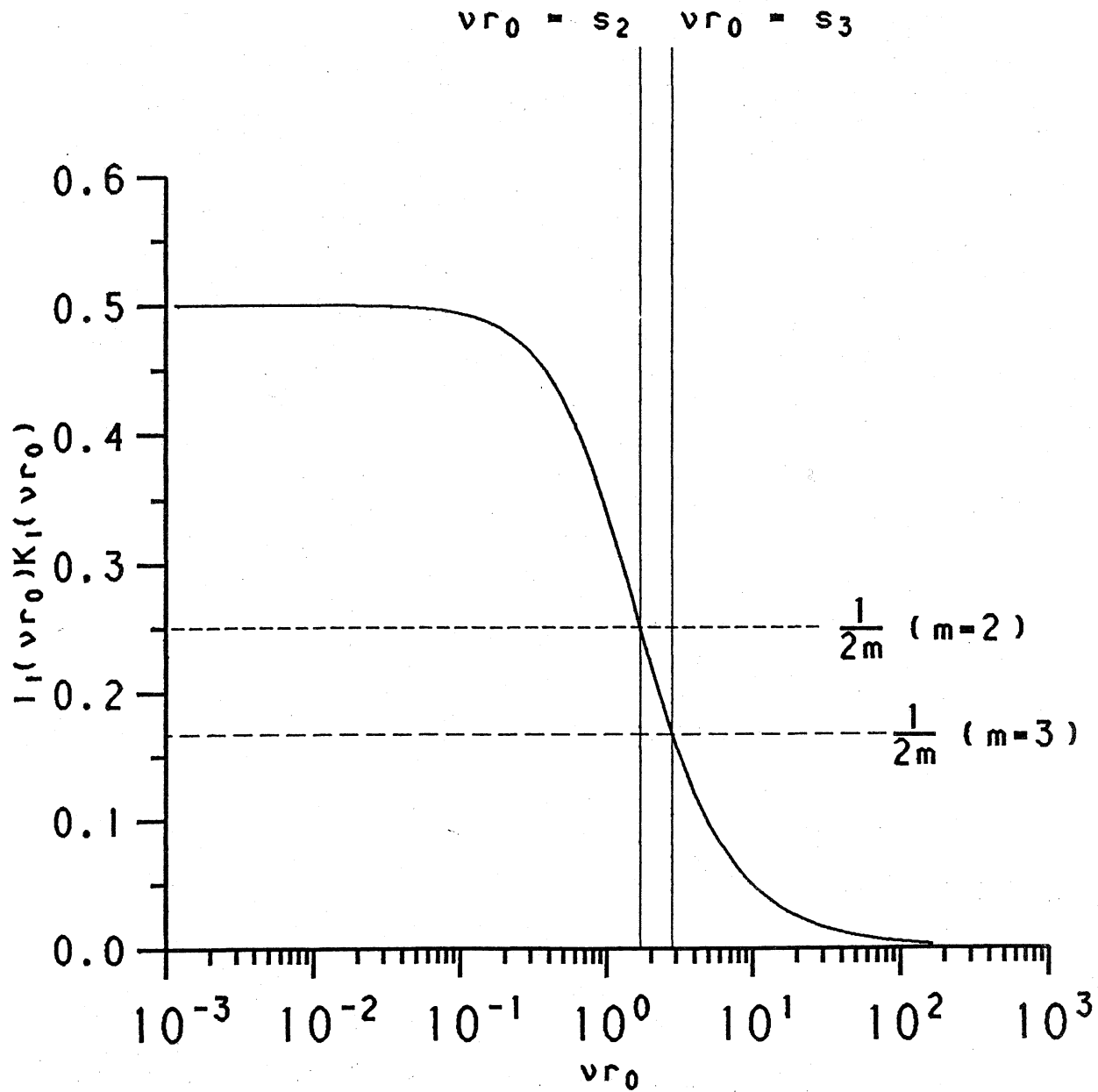


图 9

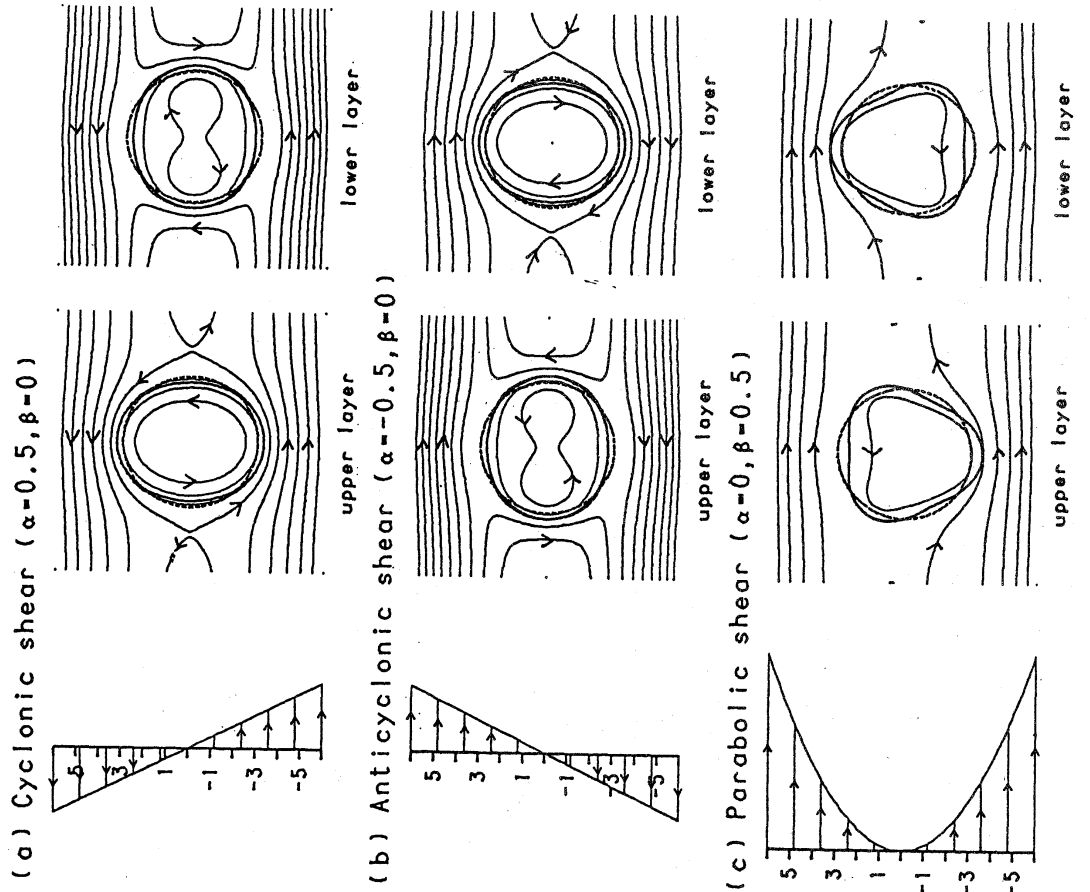


图 2

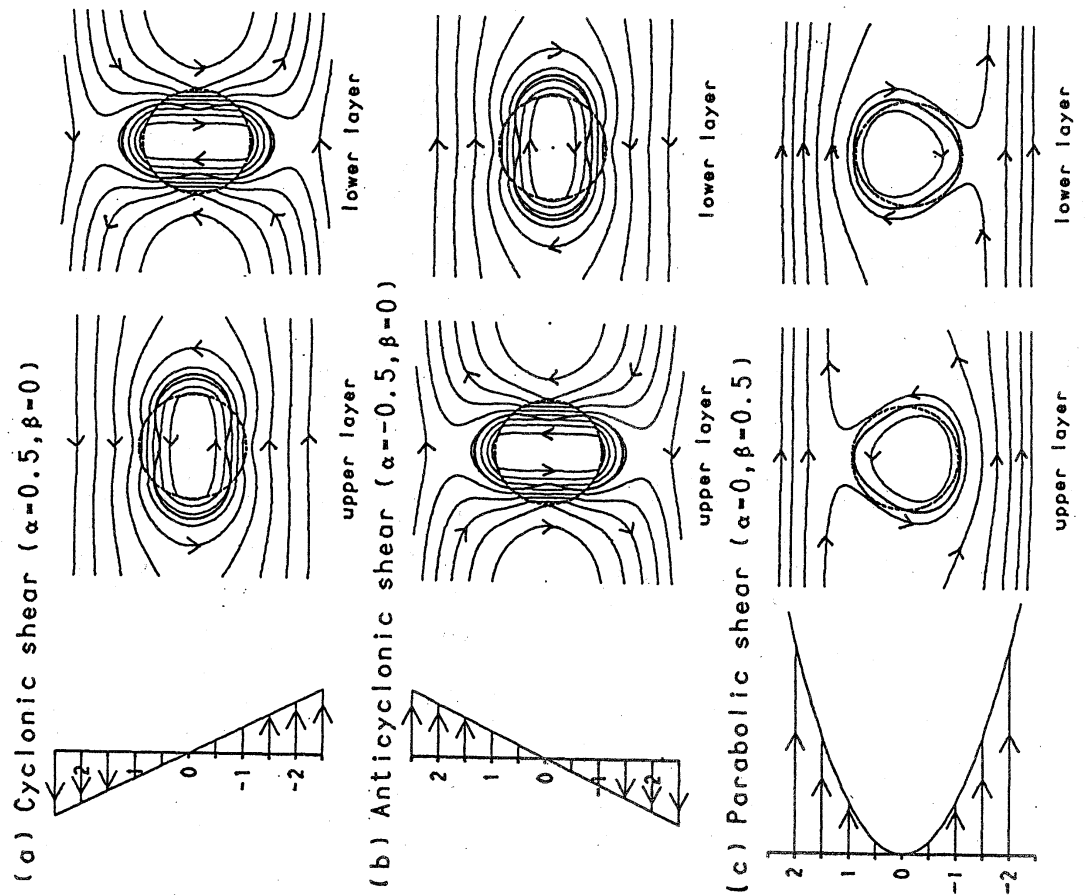


图 4(a)

50,0.1,30,10.0, 0.0,-0.4,0.0, 1.0,-1.0,1.0, 2.0
 n,dt,ns,tmax, beta,shear,u0, delta,qratio,gamma, scale

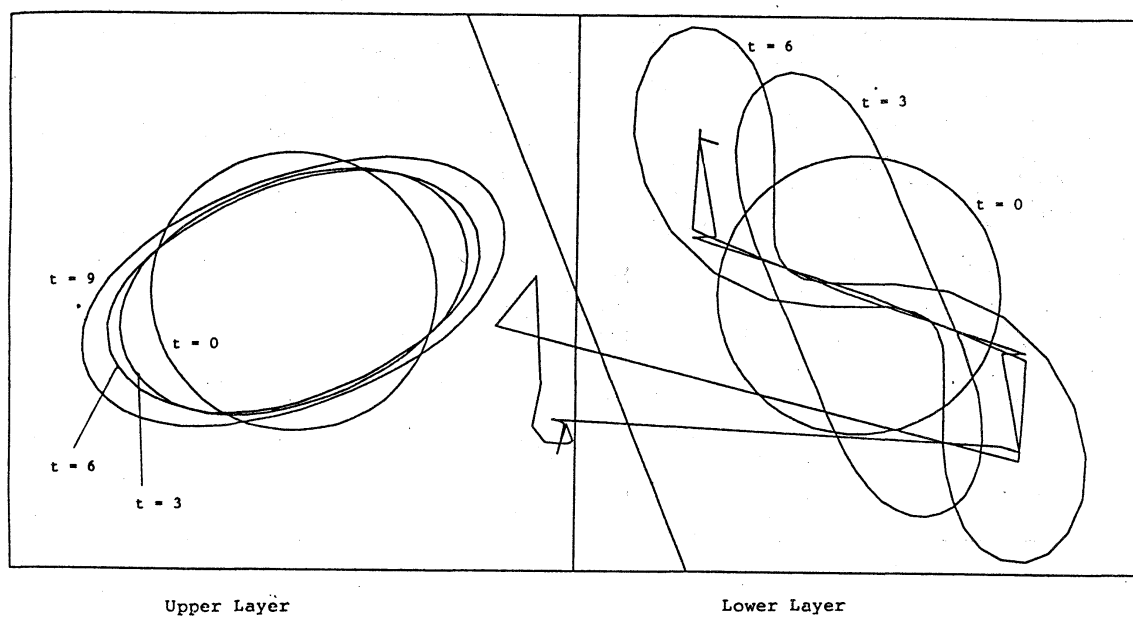


图 4(b)

50,0.05,60,10.0, 0.5, 0.0, -0.0625, 0.3,-0.3, 1.0, 2.0
 n,dt,ns,tmax, beta,shear,u0, delta,qratio, gamma, scale

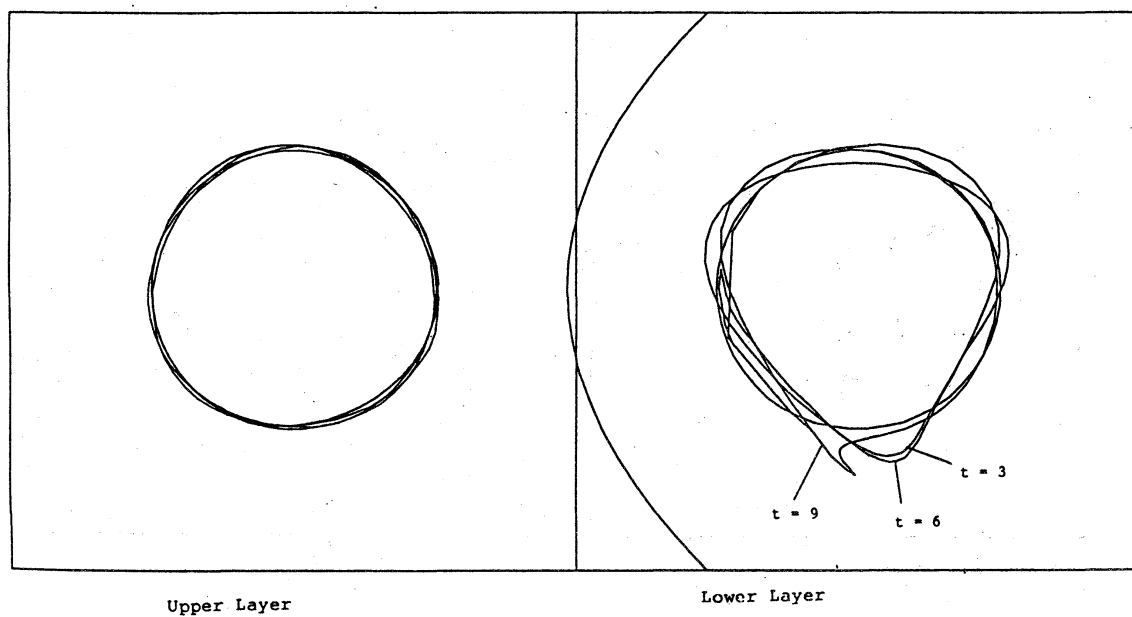
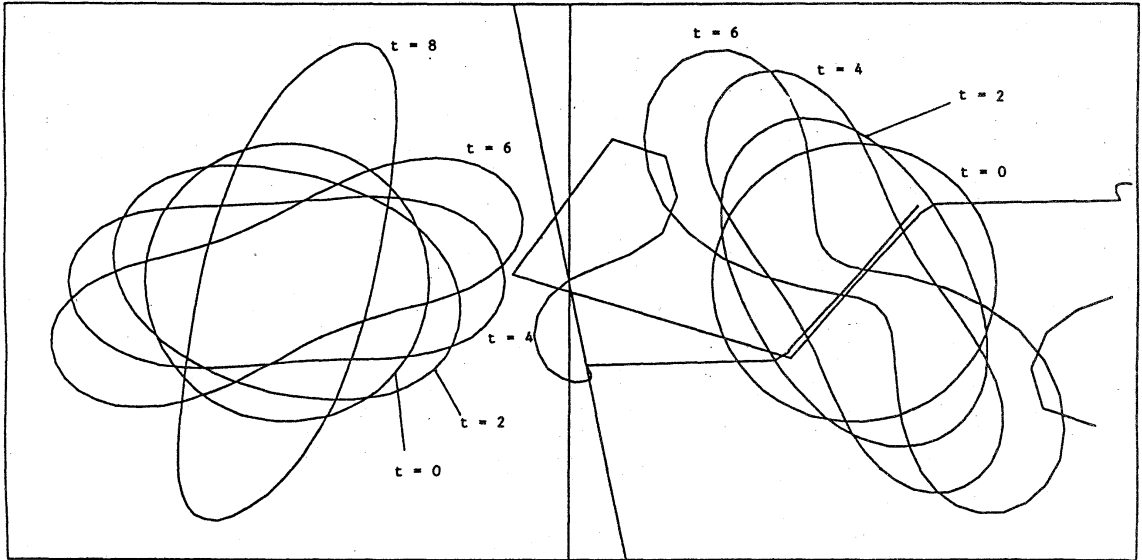


图 4(c)

50,0.1,20,10.0, 0.0,-0.2,0.0, 1.0,-1.0,1.5, 2.0
 n,dt,ns,tmax, beta,shear,u0, delta,qratio,gamma, scale

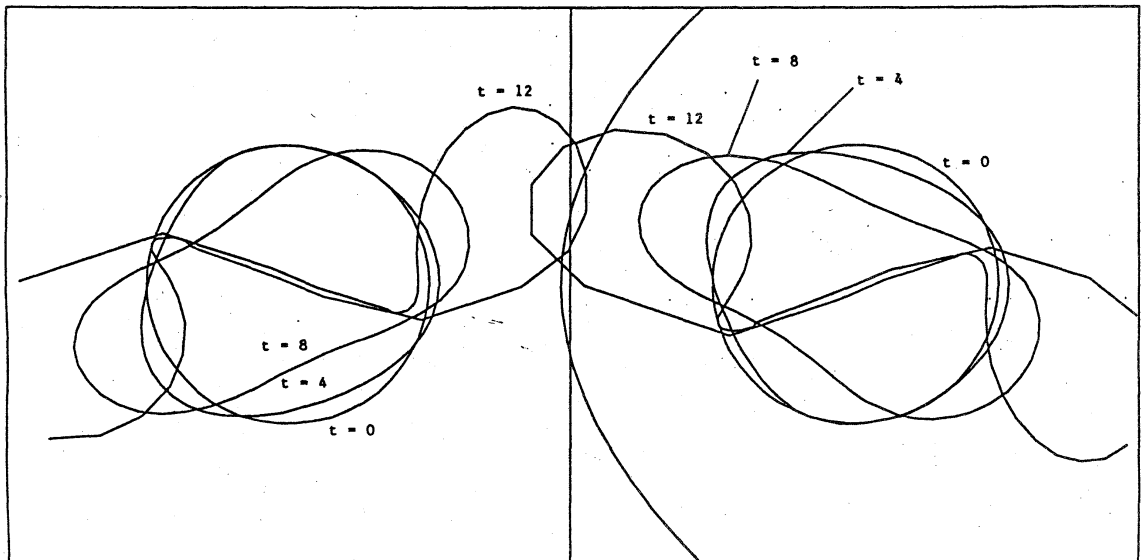


Upper Layer

Lower Layer

图 4(d)

50,0.1,40,13.0, 0.5,0.0,-0.0625, 1.0,-1.0,2.0, 2.0
 n,dt,ns,tmax, beta,shear,u0, delta,qratio,gamma, scale



Upper Layer

Lower Layer