数理解析研究所講究録
第677巻 1989年 57-70

渦領域の衝突

日本工学院　阿部盛夫（Morio Abe）
東京電機大　福湯章夫（Akio Fukuyu）

1. 序

非粘性流体中の渦の運動は，流体力学の基本的な問題の一つとして，近年さまざまな角度から研究されている。本稿では特に軸対称流および二次元流において，渦度が零でない点が有限領域を占めるとき（このような領域を渦とよぶことにする），渦同志の相互作用によって渦領域が時間とともにどのように変形するかを調べる。

2. 渦輪の衝突

円形の非粘性渦輪が平面固体壁に正面衝突する問題を考えよう。この問題は同軸上反対向きに進行する同形の渦輪の衝突と等価である。よく知られているように，曲率が有限の無限に細い渦糸は無限大の速度を持つことになるので，渦輪の運動を考察する際には断面積が有限として扱わなければならない。そこで，断面が半径が σ の円形で，半径が a の渦輪

を考える（図1）。このような渦輪の軸方向の進行速度Vは，流体境界の影響が無視できるとすれば，$a \gg \sigma$ のとき

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{1}{a}\log\left(\frac{8a}{\sigma}-\frac{1}{4}\right) \qquad (1)$$

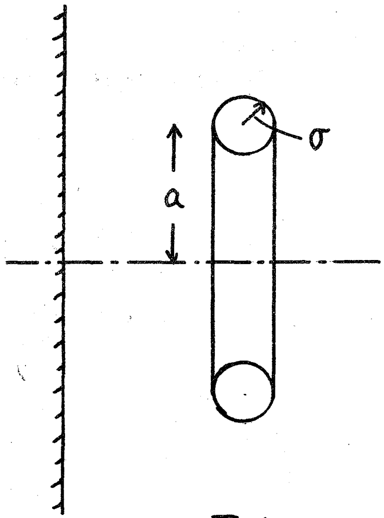

図1.

で与えられる。Γは渦輪の循環の強さである。渦輪が平面壁から十分離れているときには，渦輪は(1)の速度で進行するが，壁に近づくにつれて像の渦輪の影響で進行速度は減少し，半径は増大するはずである。このとき，循環Γは一定に保たれるが，渦輪の断面積は半径に反比例して減少する。J. Walkerら[1]は1個の渦輪に対するHelmholtzの解を重ね合わせて渦輪の衝突の軌跡を数値的に求めている。Helmholtzの解は断面を円形としているので，上の結果は渦輪と平面壁の距離が断面の半径より十分大きいときのみ正しい。渦輪が平面壁に衝突する過程で，十分時間がたったときには，断面の変形を考慮しなければならないことは以下の考察で明らかである。

仮に渦輪の断面が円形のまゝで平面壁に接近したとしよう。接近するにつれて渦輪の半径は増大し，それにつれて壁に対する接近速度は減少するので，$t \to \infty$ の極限では，渦輪と

平面壁の距離lは，(a) $l \to l_\infty \neq 0$，か (b) $l \to 0$，のいずれかになるであろう。(a)の場合，十分時間がたった後では流れは局所的には$2l_\infty$の距離にある平行な渦糸対による流れで近似できる。このような渦糸対は一定の並進速度を持つので，$t \to \infty$でも渦輪の半径はtに比例して増大し，渦糸の断面積はt^{-1}で減少する。したがって，$t \to \infty$では渦糸の誘導する運動エネルギーは無限大に発散することになる。(b)の場合は，渦糸が細くなるにつれて渦糸対の相対距離も減少するので相互作用エネルギーのため(a)のようなエネルギー発散は起こらないが，循環一定の反平行の渦糸が限りなく接近するために渦糸対の並進速度が無限に大きくなり，渦輪の流体部分の運動エネルギーが発散することになる。いずれにしても，非粘性流におけるエネルギー保存則に反する。

以上の考察から，渦輪が平面壁に接近するにしたがって断面の形は扁平に変形し，いくら接近しても渦対の並進速度が有限に保たれると考えなければならない。2次元流で反対向きの対称な渦領域が存在する場合の定常解がPocklington [2]によって得られている。これによれば，2つの渦領域が十分接近すると，渦領域の形はほゞ進行方向に扁平な楕円形に変形する。渦領域の並進速度は領域の表面の流体の速度に近づくので，極限では並進速度は零になる。

3. 計算方法

ここでは，軸対称流中の渦領域の変形を調べるための計算法を与える。流れの場に円筒座標系（X, ρ, ϕ）を導入する。Ω を渦度が零でない領域（渦輪の占める領域），$\partial\Omega$ をその境界とする。Ω 内の渦度分布が与えられたとき，点 $\mathbf{x}$ に誘導される速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ に対する渦輪の微小部分 $\delta\mathbf{x}'$ の寄与は，ポテンシャル部分を別にすれば，次の Biot-Savart 則で与えられる。

$$\delta\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\times\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\,\delta\mathbf{x}', \qquad \mathbf{x}'\in\Omega \tag{2}$$

軸対称流における渦度方程式は，

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\omega}{\rho}\right) = 0 \tag{3}$$

である。したがって，初期の渦度分布が m を定数として

$$\omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} -m\rho, & (\mathbf{x}\in\Omega) \\ 0 & (\mathbf{x}\notin\Omega) \end{cases} \tag{4}$$

の形に与えられれば，以後の渦分布は各時刻における渦領域の境界 $\partial\Omega$ だけで決まることになる。特に，半径 a の Hill の球形渦は，U を渦の並進速度として

$$m = \frac{15U}{2a^2} \tag{5}$$

になる。

軸対称流の場合，(2) を ϕ について積分して，(4) の渦分布に対して，断面積が $dx'd\rho'$ の微小渦輪が $\mathbf{x}=(x,\rho,\phi)$ に誘導する速度 δv_x, δv_ρ は

$$\delta v_x = -\frac{m}{2\pi}\left[\frac{2\rho^3-\rho\{(x-x')^2+\rho^2+\rho'^2\}E(k)}{\{(x-x')^2+(\rho-\rho')^2\}\{(x-x')^2+(\rho+\rho')^2\}^{\frac{1}{2}}}+\frac{\rho K(k)}{\{(x-x')^2+(\rho+\rho')^2\}^{\frac{1}{2}}}\right]dx'd\rho' \quad (6)$$

$$\delta v_\rho = -\frac{m}{2\pi}\left[\frac{\rho'(x-x')\{(x-x')^2+\rho^2+\rho'^2\}}{\rho\{(x-x')^2+(\rho-\rho')^2\}\{(x-x')^2+(\rho+\rho')^2\}^{\frac{1}{2}}}+\frac{\rho K(k)}{\{(x-x')^2+(\rho+\rho')^2\}^{\frac{1}{2}}}\right]dx'd\rho' \quad (7)$$

となる。ここで，$K(k)$, $E(k)$ は第一種および第二種完全楕円積分である。k は

$$k^2=\frac{4\rho\rho'}{(x-x')^2+(\rho+\rho')^2} \quad (8)$$

で与えられる。軸対称流では ϕ 依存性はないので，以後上で定めた渦領域 Ω の $\phi=$ 一定の面での切口（i.e. 渦輪の断面）を Ω，その境界を $\partial\Omega$ で表わす。(6)，(7) 式を Ω について積分すれば渦輪が誘導する速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ が得られる。

渦輪の境界は常に同じ流体粒子で形成されるので，境界の変形は境界上の各流体粒子が各時刻ごとに $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x}\in\partial\Omega)$ の速度を持つと考えて追跡できる。

ここでは渦輪の境界 $\partial\Omega$ を N 多角形で近似し，N 個の頂点の運動を調べることによって $\partial\Omega$ の変形を求める。

図2に(x, ρ)面の断面$\partial\Omega$を示す。平面壁は$x=0$とする。$\partial\Omega$上のN個の分割点をP_1, P_2, $\cdots$, P_Nとし，添字については境界に沿って反時計まわりに並べる。P_jの座標を(x_j, ρ_j)とする。渦輪Ωの誘導速度を求めるために，図2のように隣接する頂点

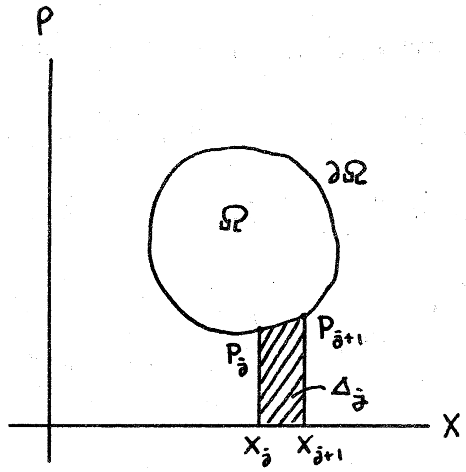

図2

P_j, P_{j+1}と点$(x_j, 0)$, $(x_{j+1}, 0)$を頂点とする台形の渦領域Δ_jを考える。Δ_j内の渦度分布は，$m>0$として

$$\omega(x, \rho) = \begin{cases} -m\rho & (x_j < x_{j+1}\text{のとき}), \\ m\rho & (x_j > x_{j+1}\text{のとき}), \end{cases} \quad (x, \rho) \in \Delta_j \tag{9}$$

とする。この台形渦領域Δ_jの誘導速度$\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$を求め，それをjについて1からNまで加えると渦輪Ωの誘導速度が求まることになる。すなわち，点$\mathbf{x}$での渦輪の誘導速度を

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{v}_j(\mathbf{x}) \tag{10}$$

の形で計算する。

尚，誘導速度のρ成分v_ρについては，(7)はx'については初等的に積分できるので，上で与えた台形領域のかわりにx軸に平行な台形領域を考えた方がよい。実際，(7)をx'に

ついての不定積分は

$$-\frac{m}{\pi}\rho'\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}\left[\frac{2-k^2}{2k}K(k)-\frac{E(k)}{k}\right]d\rho' \qquad (11)$$

で与えられる。ここに,

$$k=\frac{4\rho\rho'}{(X-X')^2+(\rho+\rho')^2} \qquad (12)$$

である。

このような台形渦領域Δ_jを導入すると,Ωが(X, ρ)平面で凸集合でない場合でも全く同じように扱えるので便利である。尚,2次元流に対するcontour dynamicsも同じ方法で導くことができる。

4. 計算結果

図3にHillの球形渦が平面壁と衝突する場合の渦領域の変形の様子を示した。ここでは,$t=0$で円形を46辺形に等分割した。平面壁は$X=0$(以下,図4,図5も同様)で,球面渦の半径1に対し,$t=0$での球形渦の中心を$(2, 0)$とした。時間積分にはEuler法を用い,$\Delta T=0.02$とした。図3には10ステップごとの渦領域の断面を示してある。この図の尺度では,$T=0.14$以後は渦領域が平面壁に接触しているように見えるが,実際には有限距離はなれていること

に注意する。T = 0.16 以後には渦領域の後部よどみ点附近でくびれが起こっている。これは，Hillの球形渦に扁円形の変形を与えた場合のMoffattとMoore [3] の結果と一致している。

図4には渦輪が平面壁と衝突する場合の計算結果を示す。横軸が渦輪の中心軸で，図には渦輪の一つの断面の変形の様子を示した。初期の断面の半径を1としたとき，渦輪の半径は2（比較的太い渦輪）とし，断面の中心の初位置は（2,2）とした。ここでは円形を60等分割し，ΔT = 0.02とした。図4には4ステップごとの断面を示してある。2節で予想したように，渦輪が平面壁に接近すると，断面の形は円から大きく変形することがわかる。

以下の図5，6，7には2次元流についての計算結果を示す。図5は反平行の円形渦管対が平面壁（X = 0）と衝突したときの一つの渦管の変形をプロットした。渦管の断面の中心の初位置は（3.0, 1.3）で円形を60等分割した。ΔT=0.01とし，図には160ステップごとの断面を示した。2次元流の場合は，渦輪ほど変形は顕著ではないようである。平面壁との衝突の結果，tさ8以後は一つの渦管の運動には対の渦管より壁（i.e. 像の渦管）の影響の方が大きくなる。この時刻以後は流れは次第に像の渦管との渦管対による流れと考えて

よいであろう。

t→∞での様子を調べるために，図6，図7に初期に円形の渦管対の変形を示した。ともに，初期に円を60等分割し，ΔT＝0.01とした。渦管の中心間の距離は，渦管の半径を1としたとき，それぞれ3.0および2.12である。図6では160ステップ，図7では80ステップごとの断面を示した。当然のことながら，相対距離が小さいほど変形は大きい。相対距離が4以上では，断面は円からあまりずれない。

参考文献

[1] Walker, J. et. al., J. Fluid Mech. 181 (1987) 99

[2] Pocklington, H. C., Proc. Camb. Phil. Soc. 8 (1894) 179

[3] Moffatt, H.K. and Moore, D.W., J. Fluid Mech. 87 (1978) 749

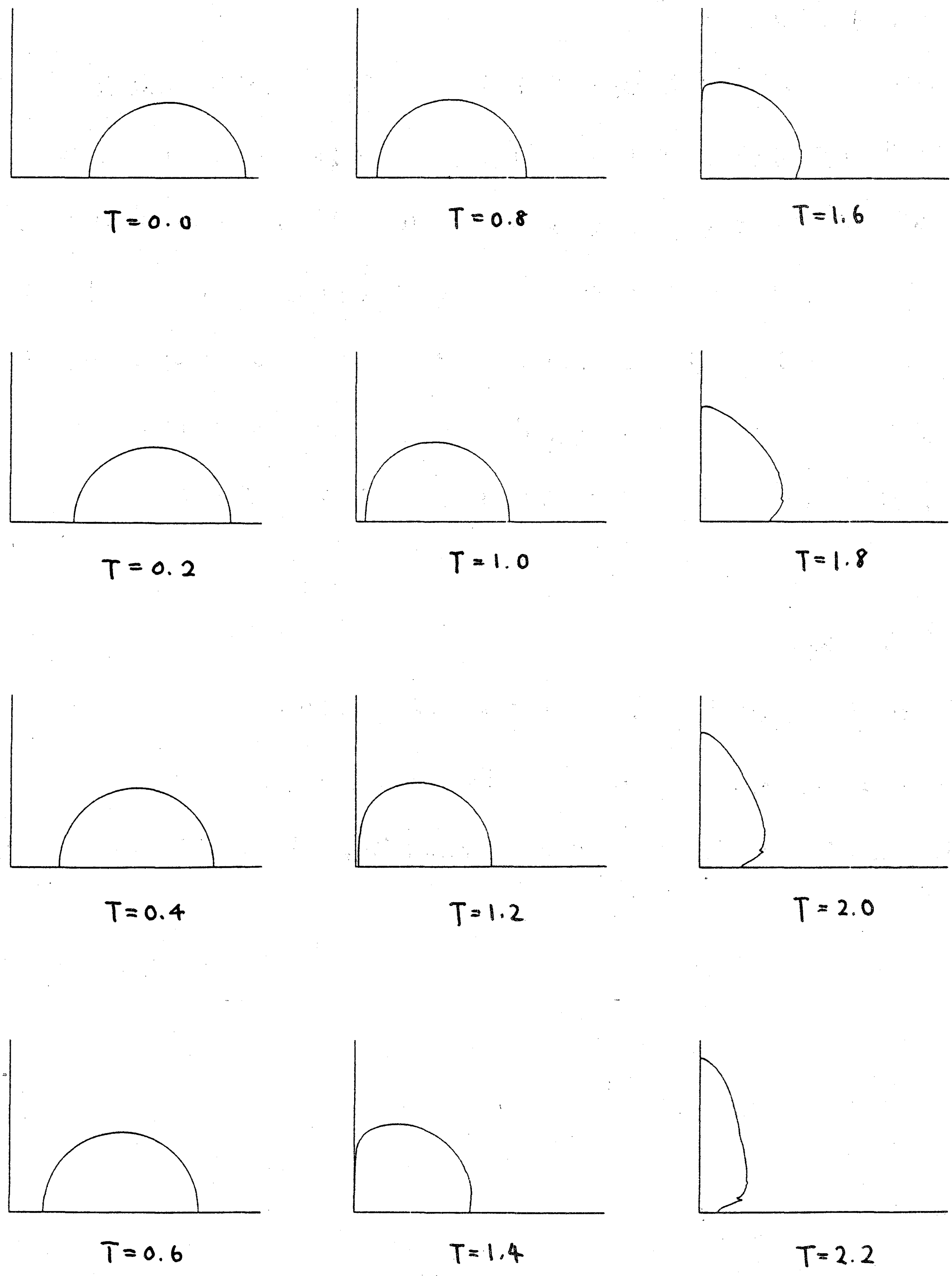

図3. Hillの球形渦の衝突

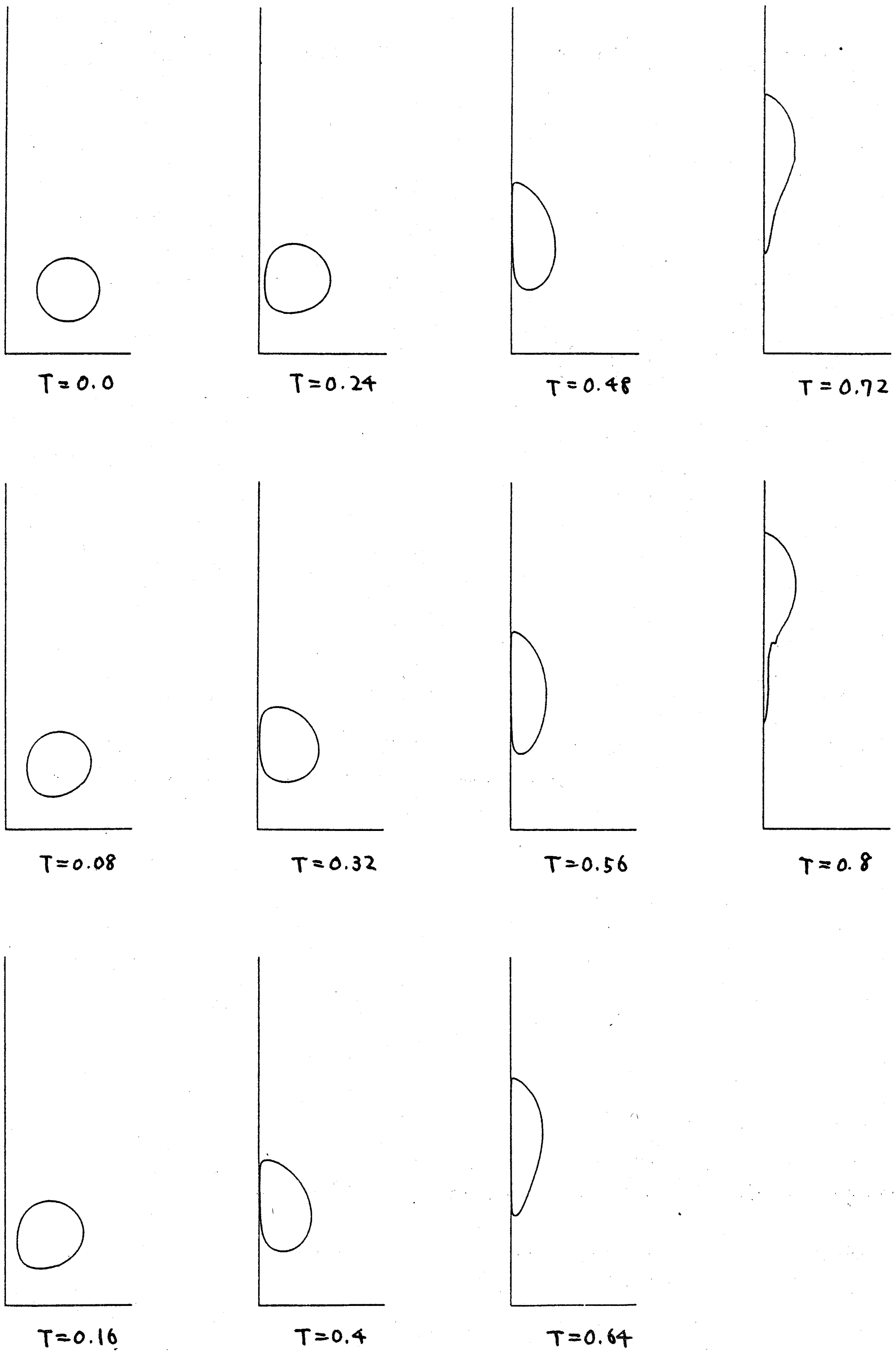

図4. 渦輪の衝突

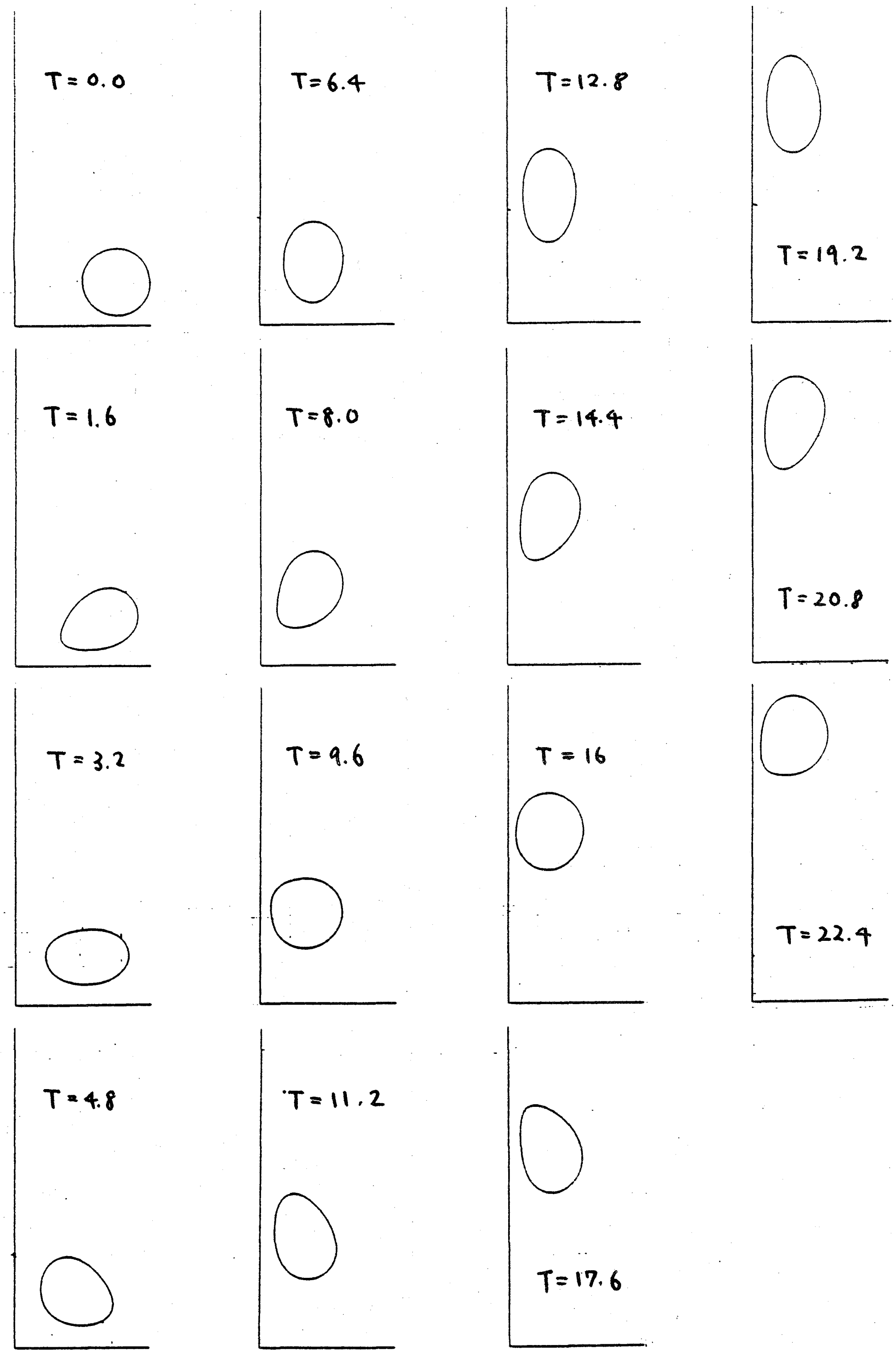
T=0.0
T=1.6
T=3.2
T=4.8
T=6.4
T=8.0
T=9.6
T=11.2
T=12.8
T=14.4
T=16
T=17.6
T=19.2
T=20.8
T=22.4

図5. 渦対の衝突

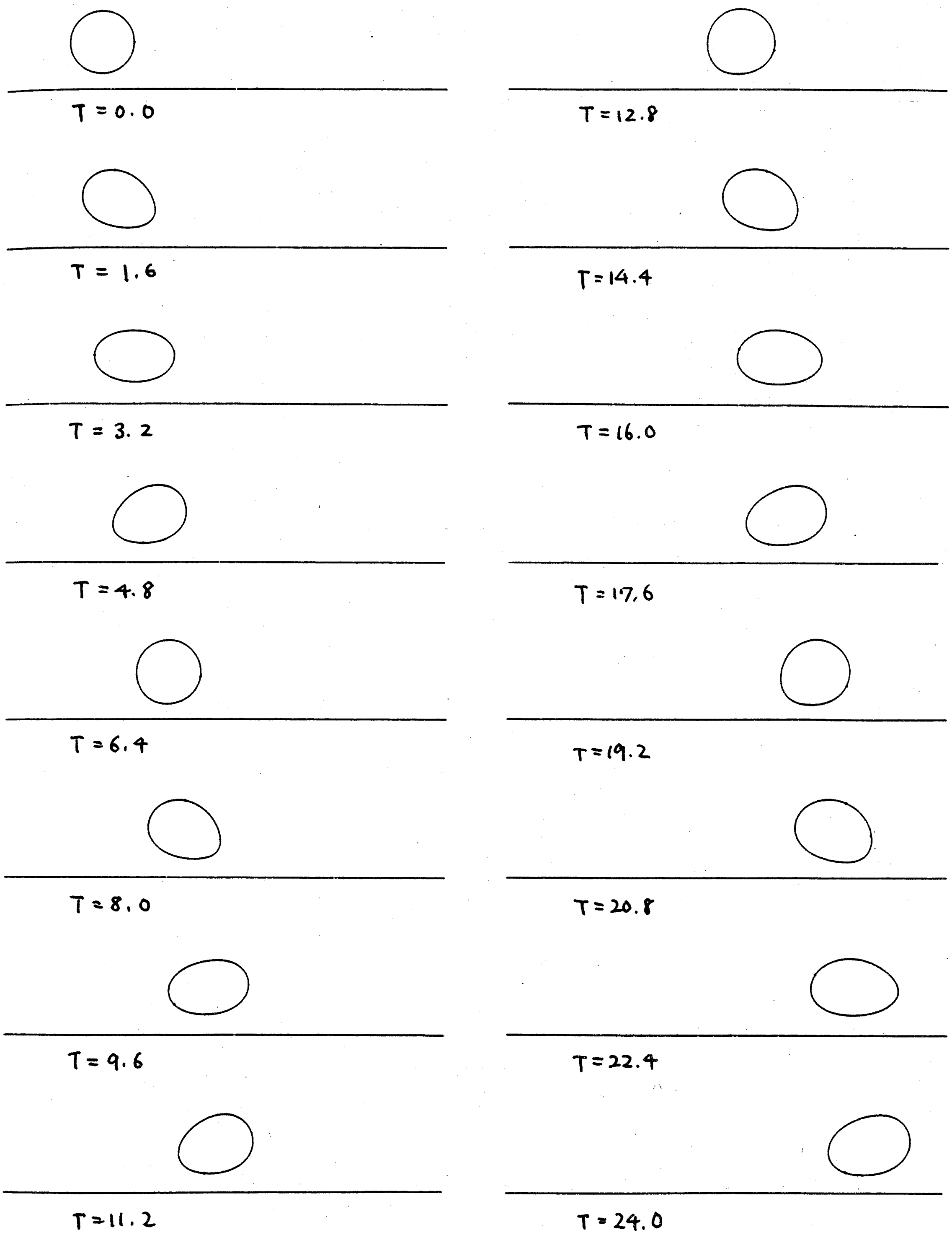
T=0.0
T=1.6
T=3.2
T=4.8
T=6.4
T=8.0
T=9.6
T=11.2
T=12.8
T=14.4
T=16.0
T=17.6
T=19.2
T=20.8
T=22.4
T=24.0

図6. 渦管対の変形

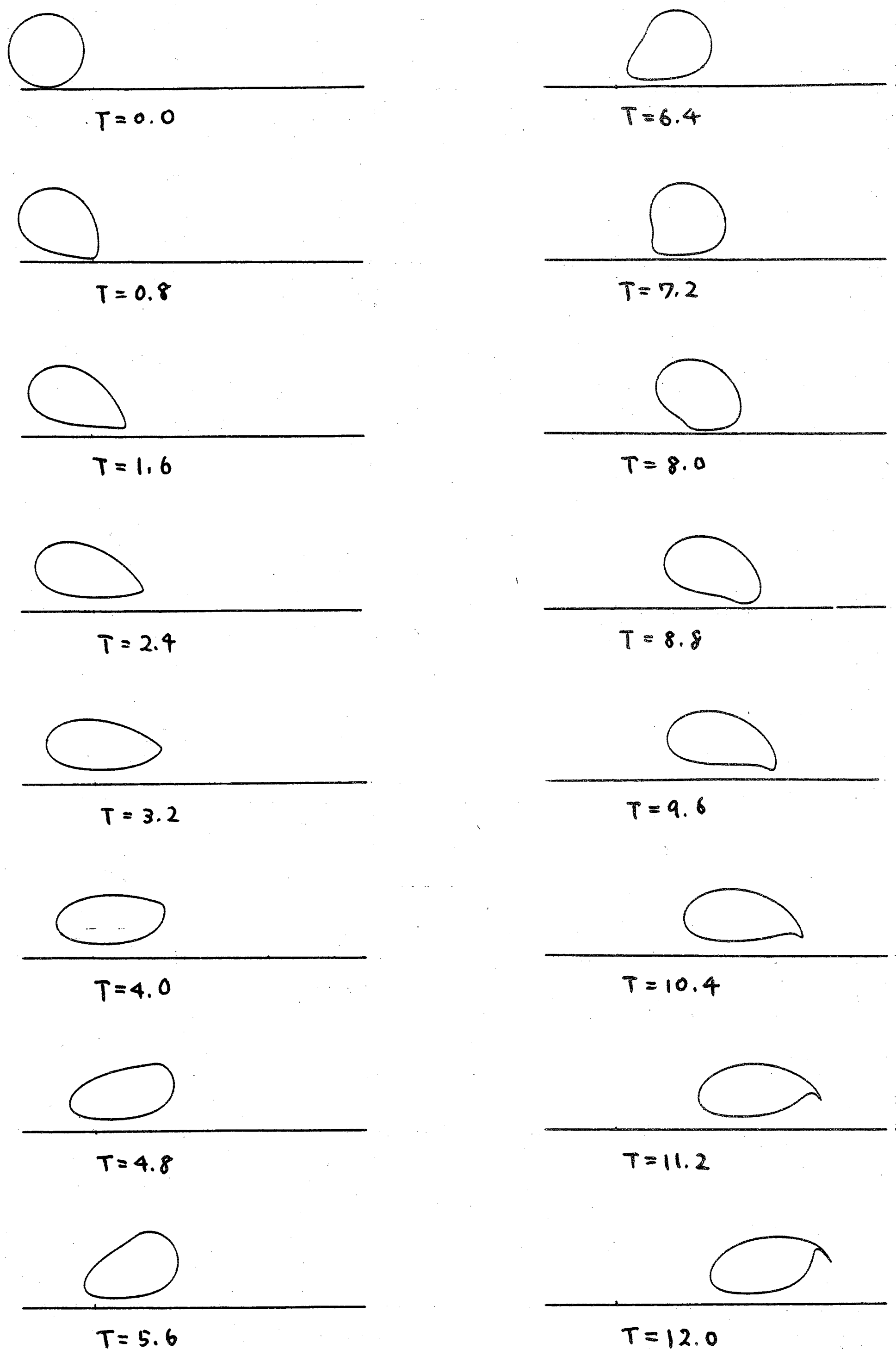
T=0.0
T=0.8
T=1.6
T=2.4
T=3.2
T=4.0
T=4.8
T=5.6
T=6.4
T=7.2
T=8.0
T=8.8
T=9.6
T=10.4
T=11.2
T=12.0

図7. 渦管対の変形