

2次元非粘性流体中の一様渦度領域間の界面

京大理物理 大木谷耕司 (Koji Ohkitani)

1. はじめに

2次元非粘性流体の運動は初期条件が十分に滑らかであればいつまでも正則にとどまる¹⁾。また Contour Dynamics (以下では CD と略す) で考えられているような区分的に一様な有限渦度領域を初期条件とする流れについても同じ事が言える²⁾。しかしながら初期条件が何らかの特異性をもつときには、流体の運動は必ずしも正則にはとどまりえない。典型的な例として、渦層にかく乱を与えた時の初期値問題、いわゆる Kelvin-Helmholtz 不安定性問題 (以下では KH と略す)⁴⁾ が挙げられる。最近の数值的^{5,6)} 及び解析的^{7,8)} 研究の結果、粘性を無視した時、この問題は ill-posed であって有限時間内に解に特異性が現れることが知られている。この特異性はもとの流れが線型不安定である事に帰因すると考えられる。

この小稿では、その両側で速度は連続であるが、渦度が跳びをもつような2次元非粘性流体中の界面の運動を考える。これは上のKH問題よりは特異性の弱い初期条件をもつ問題である。主流は次のようにかける。

$$\begin{aligned} v &= (\omega_1 y, 0) & (y > 0) \\ &= (\omega_2 y, 0) & (y < 0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

ここで ω_1, ω_2 は各領域での渦度(定数)で、 x 座標をかく乱を受けない時の界面とする。(図1) 主流(1.1)の渦度は上半面と下半面にそれぞれ一様に分布している。KH流と異り、この流れは線型安定(§2参照)であることがわかっている。そこでこの流れにかく乱を加え、非線型段階でどのようにふるまうか、そしてこの問題が well-posed であるかどうか調べることを考える。

2. 基礎方程式

界面の位置を $r(s) = (x(s), y(s))$ と表す。ここで s は界面に沿って計った弧長である。かく乱は渦なしと仮定し、Biot-Savart 則を考えると、界面上の点 $r(s)$ における速度 $u(s)$ は次のようにかける。

$$u(s) = \begin{pmatrix} \bar{\omega} y(s) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi} \int \frac{[r(s) - r(s')] \wedge [\Omega(s') - \Omega_b(s')]}{|r(s) - r(s')|^2} ds' - \frac{1}{2\pi} \int \frac{|r(s) - r(s')| \xi(s') ds'}{|r(s) - r(s')|^2}, \quad (2.1)$$

$$\Omega_b(s) = -[W] \alpha'(s) \gamma(s) \quad , (2.2)$$

$$\xi(s) = -[W] \gamma'(s) \gamma(s) \quad , (2.3)$$

ここで ' は s に関する微分を、そして $\Omega_b(s)$ および $\xi(s)$ はそれぞれ主流の界面における接線および法線方向の跳びを表す。

また、 \int はコーシーの主値積分、 $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$, $[W] = \omega_1 - \omega_2$, $r \wedge \Omega \equiv (\gamma \Omega, -\alpha \Omega)$ である。もとの Birkhoff 方程式との比較をするため (2.1) をかく際、界面上の渦度分布 $\Omega(s)$ を考えた。後で示す数値計算では $\Omega(s) \equiv 0$ とおく。

第2項ではかく乱による界面上の渦度分布からの寄与を表しているのので、積分核では全渦度分布 $\Omega(s)$ から主流による渦度分布 $\Omega_b(s)$ を差し引いておかなければならない。この項は界面において速度の法線成分の連続性を保証する。

線型安定性を調べるためには界面を $\gamma = \gamma(x, t)$ の形で表すのが便利である。⁹⁾ 基礎方程式 (2.1) は $s = \alpha$ ととることによって簡単化される。また運動学的条件と界面における渦度の保存より、

$$\gamma_t + \gamma_x u_1 - u_2 = 0 \quad , (2.4)$$

$$\Omega_t + (u_1 \Omega)_x = 0 \quad (2.5)$$

が成り立つ。(2.1) 及び (2.4-5) を $(u, \Omega) = (0, \Omega_0)$ のまわりで線型化したのち Fourier 変換を行うと次の式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta y(k) \\ \delta \Omega(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\text{sgn } k}{2} i[\omega] & -\frac{\text{sgn } k}{2} i \\ i k \Omega_0 \left(\frac{|k| \Omega_0}{2} - \bar{\omega} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y(k) \\ \delta \Omega(k) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

ここで $\delta y(k)$, $\delta \Omega(k)$ はそれぞれ $y(x)$, $\Omega(x)$ の Fourier 変換の無限小変位を表す。 $\delta y(k) = A_1 e^{\sigma t}$, $\delta \Omega(k) = A_2 e^{\sigma t}$ と仮定すると、増巾率 σ は

$$\sigma = \left\{ -\frac{i[\omega]}{2} \text{sgn } k \pm \sqrt{-\left(\frac{[\omega]}{2}\right)^2 + |k| \Omega_0 (|k| \Omega_0 - 2\bar{\omega})} \right\} / 2 \quad (2.7)$$

で与えられる。同じ結果は非粘性の Orr-Sommerfeld 方程式 (いわゆる Rayleigh 方程式) に基づく標準的な方法によっても得られる。¹⁰⁾ (2.7) 式から今の場合 ($\Omega_0 = 0$) 流れは中立安定であり、そうでない時 KH 不安定性が効いてくる事がわかる。以下では問題を $\Omega_0 = 0$ の場合に限る。このとき $\sigma = -i[\omega]/2$, $A_2 = 0$ となる。

ここで弱非線型の解析では安定性の議論で済まないことを付記しておく。なぜなら、増巾率 σ が波数 k に依存しないため "非線型 Schrödinger 方程式" は分散項を欠いてしまうからである。従って非線型段階のふるまいを調べるためには完全に非線型な数値計算が必要となる。

3. 数値的方法

非線型段階における界面のふるまいはいわゆる渦糸法によ

って調べられる。 界面を Lagrange 表示で $r(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ ($\alpha = \text{マーカー変数}$) とかく。 式 (2.1-3) は $r(\alpha)$ と $\kappa(\alpha) (\equiv \Omega(s) ds/d\alpha)$ を用いると

$$\frac{\partial x(\alpha)}{\partial t} = \bar{\omega} y(\alpha) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{[\kappa(\beta) - \kappa_b(\beta)] \sinh[y(\alpha) - y(\beta)] + \xi(\beta) \sin[x(\alpha) - x(\beta)]}{\cosh[y(\alpha) - y(\beta)] - \cos[x(\alpha) - x(\beta)]} d\beta \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial y(\alpha)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{[\kappa(\beta) - \kappa_b(\beta)] \sin[x(\alpha) - x(\beta)] - \xi(\beta) \sinh[y(\alpha) - y(\beta)]}{\cosh[y(\alpha) - y(\beta)] - \cos[x(\alpha) - x(\beta)]} d\beta \quad (3.2)$$

とかけると、ここで

$$\kappa_b(\alpha) = -[\omega] x'(\alpha) y(\alpha) \quad (3.3)$$

$$\xi(\alpha) = -[\omega] y(\alpha) y'(\alpha) \quad (3.4)$$

である。 2次元流における渦度の保存から、 $\kappa(\alpha)$ は定数 (時間によらない) である。 当然のことであるが $\omega_1 = \omega_2 = 0$ の時、式 (3.1-4) はもとの Birkhoff 方程式に帰着する。

渦系法の方程式は式 (3.1-4) を離散化する事によって得られる。 これらを積分する際には (3.1-2) の各項の被積分関数を次のように正規化してから行う。 これは次のように行う。

$$\int f(\beta) \cot \left[\frac{z(\alpha) - z(\beta)}{2} \right] d\beta = \int \left[f(\beta) - f(\alpha) \frac{z'(\alpha)}{z'(\beta)} \right] \cot \left[\frac{z(\alpha) - z(\beta)}{2} \right] d\beta \quad (3.5)$$

ここで $z(\alpha) = x(\alpha) + iy(\alpha)$ で $f(\beta)$ は $\kappa(\beta) - \kappa_b(\beta)$ あるいは $\xi(\beta)$ を表す。 この正規化とは別に、Krasny が KH 問題

を取扱う際に用いた filtering というテクニックがある。⁶⁾
 しかし、今の場合この方法は必要ないので用いなかった。

計算は倍精度で行い、時間発展は4段の Runge-kutta
 法 (時間ステップ $\Delta t = 0.01$) で行った。計算に用いた
 点数 N は 128, 256, 512 である。

4. 数値シミュレーション

4.1 初期条件

ω_1, ω_2 の符号の選び方には3通りある ; i) 同符号、ii)
 異符号、iii) 一方が0。ここでは主に i) の場合について考察
 し、ii)、iii) については最後に簡単にふれるにとどめる。

初期条件としては正弦波の形の線型波 $x(\alpha) = \alpha$, $y(\alpha) =$
 $A \sin[\alpha(\alpha)]$, $\kappa(\alpha) = 0$ を選ぶ。i) の場合に関してはパ
 ラメターを $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 1$ に定める。この時、線型波の
 位相速度は $v_{ph} = [\omega]/2 = 1$ である。十分小さな初期か
 く乱の振幅 A に対しては、波は線型理論に従って伝わること
 が確かめられる。しかし、 A が小さくない時は以下で見るよ
 うに非線型性のために大きな変化がひきおこされる。

4.2 同符号の場合 ($A = 0.1$)

図2に $N = 256$ を用いた界面の時間発展を示す。波はほ

ほぼ線型理論における位相速度 $v_{ph} (=1)$ に従って伝わる。しかし、よく観察すると界面の形が正弦波からずれている事がわかり、この程度の振巾でも非線型性が効いている事を意味している。

界面の解析的な性質を調べるには渦糸 (マーカー) の位置 $q(\alpha) = [x(\alpha) - \alpha] + iy(\alpha)$ の Fourier 変換

$$p(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} q(\alpha_j) e^{-i\alpha_j k}, \quad \alpha_j = \frac{2\pi j}{N} \quad (j=0 \sim N-1)$$

を見るのがよい。⁶⁾ 図は省略するが $|p(k)|$ に見られる励起は計算した時間全体で、低波数領域に限られている。

より詳しく界面の変形を調べるには、その曲率

$$C(\alpha) = (x'(\alpha)y''(\alpha) - y'(\alpha)x''(\alpha)) / (x'(\alpha)^2 + y'(\alpha)^2)^{3/2}$$

に注目すると都合がよい。⁶⁾ 図3に $t=0, 1, 2, \dots, 5$ に対する $C(\alpha)$ を $x(\alpha)$ の関数として示す。曲率の絶対値はまず $t \leq 3$ の間増加し、後に減少する。曲率の時間変化を見るために各瞬間の曲率の絶対値 $C_m(t) = \text{Max}_{\alpha} |C(\alpha, t)|$ を考える。明らかにこの関数は無限小かく乱に対しては定数である。しかし今の場合、図4に見るように $C_m(t)$ は周期的である。さらにその周期は線型波が空間一周期の半分を伝わる時間、即ち π にほぼ等しい。従ってこの場合、非線型効果はほんの少しだけ効いているといえる。

ここで、KH不安定性問題に現われる特異性がどのようにして上記の方法によって見出されたか思い起しておく。渦糸法によるKrasnyの結果によれば、⁶⁾ Fourierスペクトル $|p(k)|$ は有限時間においてべき則 $k^{-2.5}$ の形をとり、その時曲率は ∞ となる。このようにして界面はなめらかさを失い、特異性が現われる。

今の問題においては、少くとも $A=0.1$ という振巾では小さなスケールの構造が作られないので、そのような特異性は現われない。それでは初期のかく乱の振巾を大きくしたらどのようなことが起るだろうか。

4.3 同符号の場合 ($A=0.2$)

$A=0.2$ の場合の界面の時間発展 ($N=512$) を $t=0, 1, 2, 3, 4$ について図5aに示す。 $A=0.1$ の場合と比べ定性的に異なるふるまいが見られる。即ち、小さなスケールの構造が界面に現われる。そのような構造を、有限渦度領域のCDの類似の現象にならって"フィラメント"と呼んでおく。³⁾ フィラメントの形成後しばらくすると計算は続行できなくなる。(片方の領域が渦なしであるという意味で case iii) がより CD に近い。後に見るように case ii), iii) においてもフィラメントが形成される。)

フィラメント形成について調べる前に、数値計算の収束性も、break down するまでの範囲で確認しておく。図58には $\tau=3.5$ におけるフィラメントの拡大図を $N=128, 256, 512$ の場合について示す。界面は異なる N に対してずれているが、そのずれ方は N が大きくなるにつれて小さくなっている。このことは $N \rightarrow \infty$ における数値計算の収束性の1つの支持になっている。

$A=0.1$ の場合とは違って時間が進むにつれ Fourier スペクトルにどんどん小さなスケールが励起されていくのがみとれる。(図6a) しかしながら、以下に見るようにこれは特異性の現われによるものとは考えにくい。図6bに $\tau=3.5$ における Fourier スペクトルを $N=128, 256, 512$ の場合について示す。まず第一にベキの部分は低波数領域(尤く10)に限られていてベキ則は明らかとは言い難い。仮にこれがベキ則であるとして低波数側から指数を見つめるとそれは τ^{-4} より急である事がわかる。よって曲率が大きな値をとることがあっても、それは $N \rightarrow \infty$ の極限で ∞ になるとは言えない。さらに重要なことは、 N を大きくしてもベキの部分が広がらないという事である。これは K 不安定性問題の場合とは大きく事情が違う。そこではベキの部分は N が大きい程、広がっていたからである。⁶⁾ 実際、今の計

算では、 N が大きい程 break down までの時間が長くなっている。以上の事から、この break down は単に数値的なものであることが示唆される。

図7には $t=0, 1, 2$ について曲率が示されている。 $A=0.1$ の場合と違って曲率は絶対値において単調に増加している。また、曲率の絶対値の最大値 $C_m(t)$ は急激に増加する。この増加のようすを t の関数として (近似的に) 表すことは興味ぶかい。ここでは試行関数として $C_m(t) \sim e^{at^b}$ を選んだ ($a, b = \text{const}$)。これらの定数は最小二乗法によって $0 \leq t \leq 3.5$ のデータを用いて決定される。図8に $C_m(t)$ を t^b ($b=2, 3$) の関数として、fitした線と共に示す。最大曲率は fitした線のまわりで少しくゆらいでいて、 $A=0.1$ の場合の最大曲率の周期的なふるまい起こさせる。しかしながら $C_m(t)$ の大局的な形は (t^b の関数として) ほぼ指数的である。このことは曲率が有限時間内では ∞ とはならないという上の観察と合致している。

次に、かく乱振巾をさらに大きくした $A=0.5$ の計算について簡単にふれる。この時もファイラメントが形成されるがその時期はさきの場合より早い。ファイラメント形成後、数値計算は続行できなくなるが、Fourier スペクトルの観察によると、この break down も特異性の出現によるものとは考

えにくい。また、最大曲率 $C_m(t)$ はやはり e^{at^b} の様にふるまうが fitting を行くと $b=1, 2$ となって、 b は A の値に依存することがわかる。 $C_m(t)$ の関数形が近似的なものであるため、 b の A -依存性を調べることは困難なので、これはさしひかえておく。

4.4 異符号あるいは片方が0の渦度の場合

最後に、case ii), iii) について述べる。まず case ii) として $A=1.0$, $(\omega_1, \omega_2) = (1.5, -0.5)$ についての界面の発展を図9に、さらに case iii) として $A=0.5$, $(\omega_1, \omega_2) = (2, 0)$ についての結果を図10に示す。これらから時間がたつにつれ界面にはやはりフィラメントが形成されるのがわかる。また、Fourier スペクトルや最大曲率のふるまいは case i) と定性的に同じで、高波数成分が励起されるものの特異性は現れないように見える。

5. おわりに

2次元非粘性流体中の一様渦度領域間の界面の運動を、渦なしかく乱に限って考察した。無限小かく乱については、線型安定性のため正弦波がそのまま伝わる。この時界面の最大曲率は時間的に一定である。有限ではあるが小さなかく

乱に対しては、界面の最大曲率は時間的に振動しはじめる。この時、Fourierスペクトルで見ると励起されている成分は低波数領域に限られる。さらに大きなかく乱については高波数成分が励起されて界面にフィラメントが形成される。類似の現象は有限渦度領域のCDにおいても観察されていて、そこではフィラメント形成は渦領域の軸対称化に重要であることが報告されている。³⁾ 今の場合、渦度は無限領域にわたって存在するわけであるが、このことはフィラメントの形成が局所的な現象であることを示唆している。

フィラメント形成中は最大曲率は時間について指数的に、つまり e^{at^b} ($a, b = \text{const}$) のように増加する。言い換えると曲率は有限時間では ∞ となりえない。この事に加えてFourierスペクトルのふるまいから、今の問題はKH問題と異り、well-posedである事が示唆される。今の問題と有限渦度領域のCDがフィラメントという共通の現象で特徴づけられる事を考えると、この結論はCDのwell-posedness符合するといえる。

研究会において貴重な助言をくださった方々に感謝いたします。

References

- 1) T.Kato: Arch.Rat.Mech.Anal.25(1967)188.
- 2) V.I.Yudovich: Zh.Vycisl.Mat.Fiz.3(1963)1032.
- 3) N.J.Zabusky: Physica 18D(1986)15;
M.V.Melander, J.C.McWilliams and N.J.Zabusky:
J.Fluid Mech.178(1987)137.
- 4) G.Birkhoff: in Hydrodynamic Instablity, Proc.of Symp.
Appl.Math. XIII, Ann,Math.Soc.(1962)55.
- 5) D.I.Meiron, G.R.Baker and S.A.Orszag:J.Fluid Mech.114(1982)283
- 6) R.Krasny: J.Fluid Mech.167(1986)65.
- 7) D.W.Moore: Proc.R.Soc.Lond. A365(1979)105.
- 8) R.E.Caflisch: in IUTAM SYMPOSIUM ON FUNDAMENTAL ASPECTS OF
VORTEX MOTION ABSTRACT 1987.
- 9) C.Sulem and P.L.Sulem: J.Mec.Theor.Appl. Special issue on
two-dimensional turbulence (1983)217.
- 10) P.G.Drazin and W.H.Reid: Hydrodynamic stabilty (Cambridge
University Press, 1981) p.144

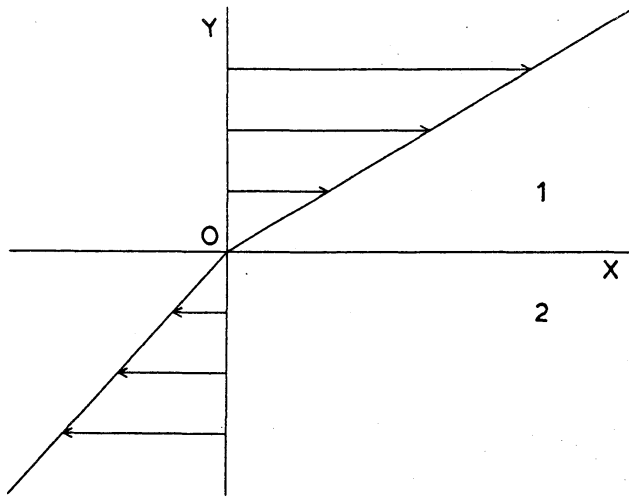


图 1

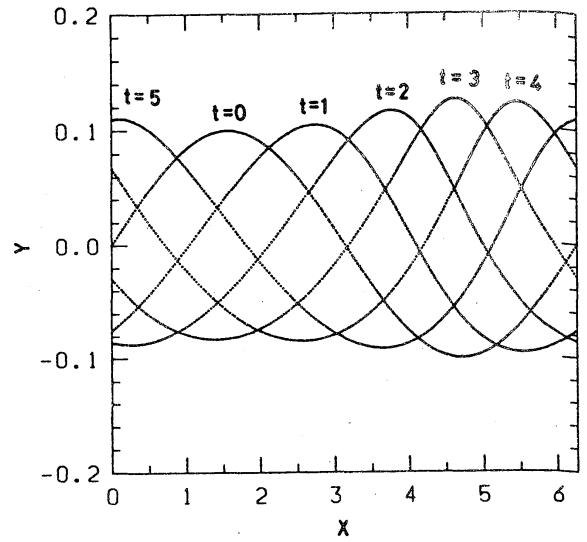


图 2

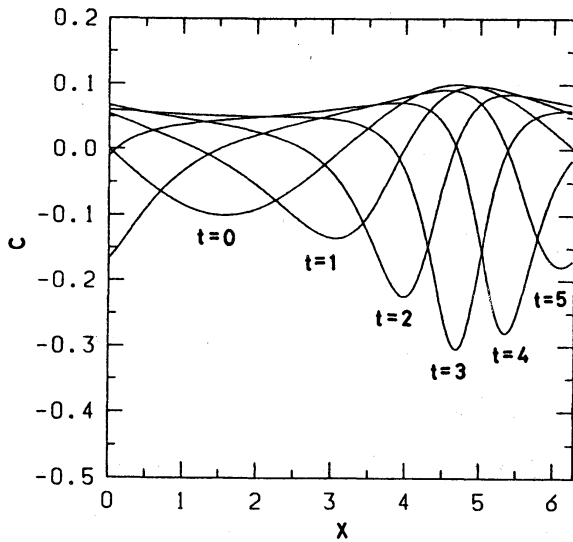


图 3

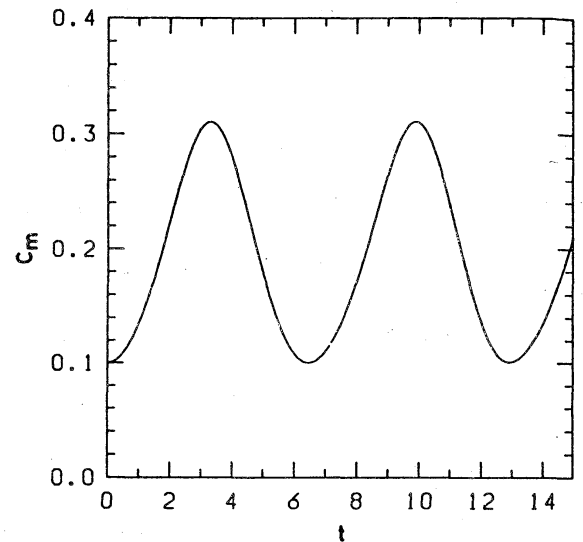


图 4

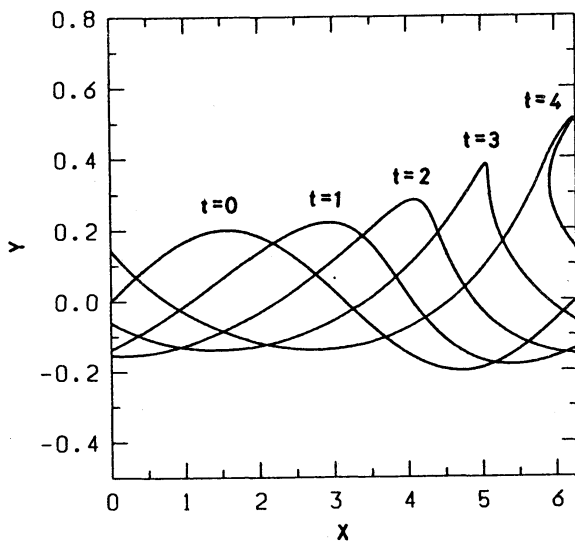


图 5a

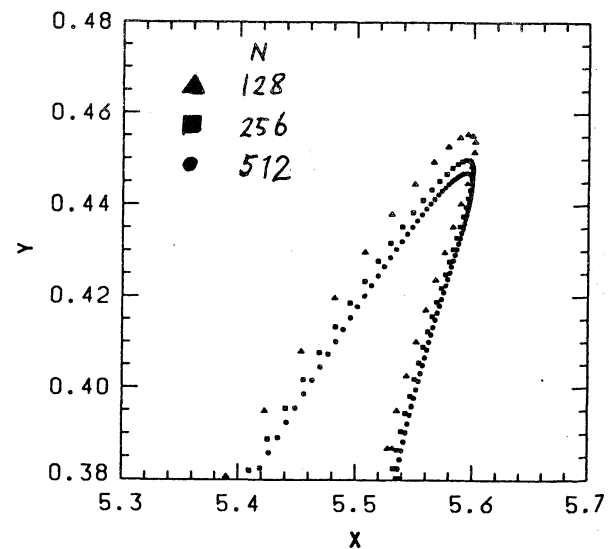


图 5b

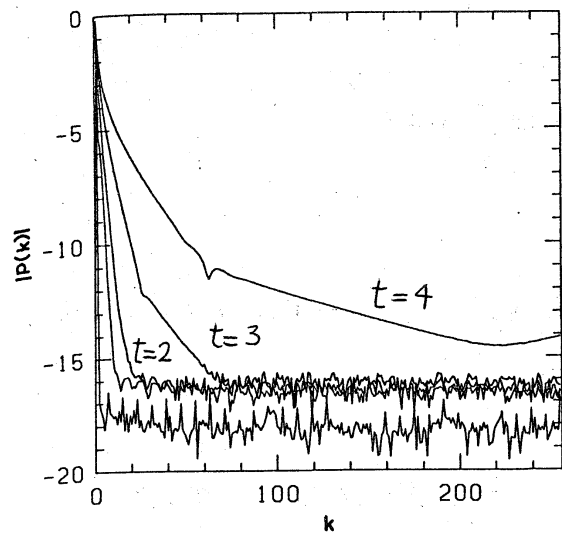


图 6a

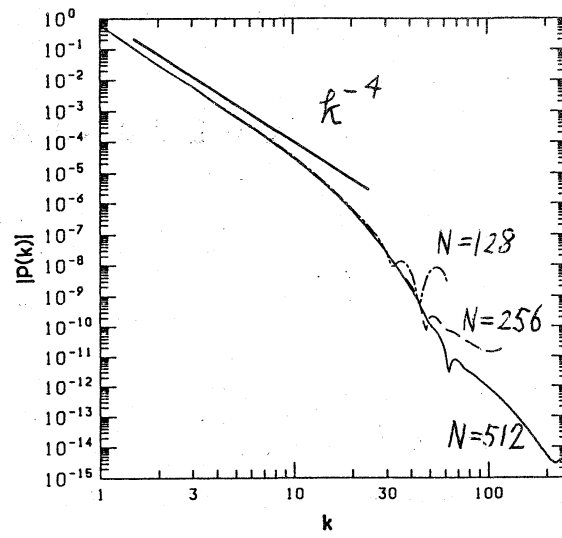


图 6b

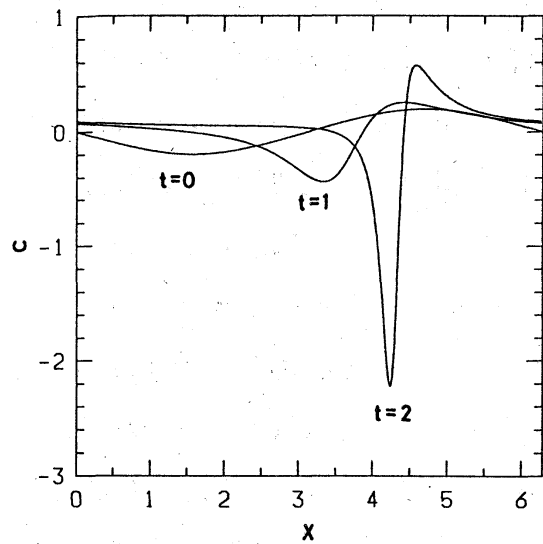


图 7

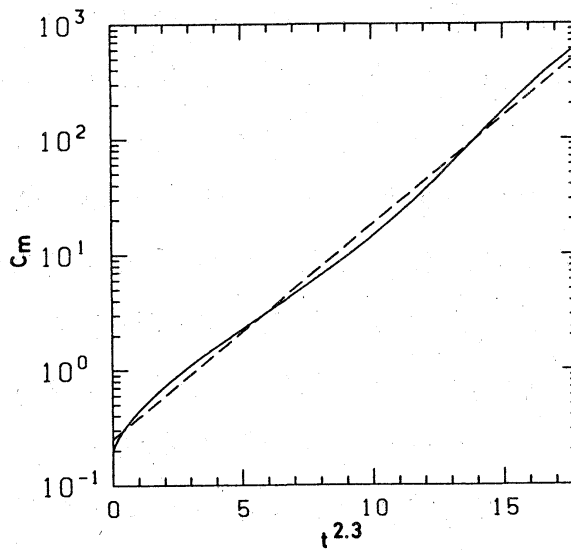


图 8

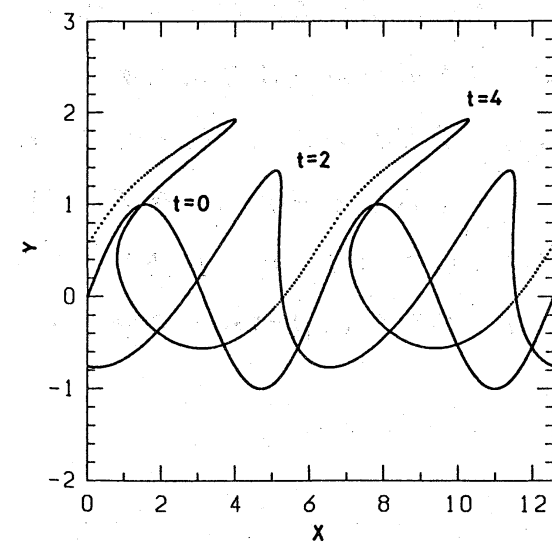


图 9

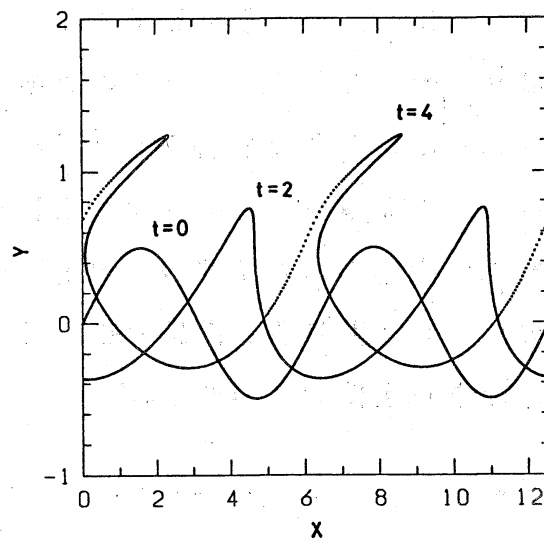


图 10