

丘をすぎる密度成層流の数値計算

計算流体力学研究所 鈴木 昌弘 (Masahiro Suzuki)

1 緒言

丘などの突起物をすぎる密度成層流の解明は、流体力学的興味のみならず社会的ニーズの強いものである。

○山や丘での大気汚染物質の移流拡散問題。

○過去に山岳部での乱気流により航空機の墜落事故が起こっているが、より安全な航空機航路を決定する上で流れ場の解明は必要不可欠である。また小さな島などでは土地がないため山の近くに飛行場を建設せざるを得ないが、その場合も同様に流れ場の解析が重要になって来る。

○風のエネルギーの効率的な利用。

○齊州島で知られる大気中のカルマン渦などの気象学上の問題。

以上のように多岐にわたっている。過去これらのことについて多くの研究がなされてきたが、その方法は以下のようなものによる。

1) Field study 2) 解析解 3) 実験 4) 数値解析

Field study は実際にその場所に行って測定するものであるが、非常に長い時間とそれにとともなう莫大な費用がかかる。またそのようにして苦勞して得たデータも普通一般性が乏しいため他の場所に適用する事は難しい。解析的手法は現時点では3次元の複雑な形状に適用することは難しい。実験的手法は多くの成果をあげてきているが、密度成層流を実現するための費用、時間は多大なものがある。また無次元パラメーターや風洞壁などの制限がある。以上の方法に比べ数値解析は、スーパーコンピュータの発達状況を考えると優れた手法になりつつある。しかしながら現在までのところ3次元突起物まわりの密度成層流の数値解析はあまりおこなわれていない。そこで本研究では、丘をすぎる密度成層流についてブシネスク方程式系の一般曲線座標を用いた差分法による数値解析を試みた。その結果を実験と比較するとともに流れ場の構造を調べた。

2 流れ場の概説

丘をすぎる流れについて密度成層がある場合とない場合の一般的な違い¹⁾について説明する。(図-1)上流から来た流れは密度成層のないときはすべて丘を越えて行くが、密度成層のあるときはある高さより下の領域では密度勾配により丘を越えられずに丘のまわりを迂回して行く。(この高さをDividing-stream-line height²⁾という。)剝離は密度成層があると下流側へ移動する。後流にできるアーチ型渦は密度成層があると垂直方向の動きが抑えられ、水平断面で双子渦を形成する。この双子渦はくずれてカルマン渦を放出することもある。

3 計算手法と条件

平板の上におかれた丘形状まわりの密度成層流を考える。丘の形状は以下の式で定義する。

$$h = 1 / (1 + r^4)$$

ここで h: 高さ r: 原点(丘の中心)からの距離

Approach flow のshearは自然界においては状況によって様々な様相をているが、Huntらによればshearの違いは剝離の位置などの定量的なものに影響するが流れ場の基本的な構造には影響しない³⁾ので、以下のようにした。流入境界に

おいて一様流とする。よって丘に流れが達するまでにそれぞれのレイノルズ数に応じて shear が発達する。shear の大きさをみるために速度ベクトル図を図-2 にしめす。shear は丘の高さにくらべ十分に小さい。なお今回は行わなかったが、流入境界から丘までの長さを変えることにより shear の大きさを調整することも可能である。

気体の流れは次の二つの条件を満たす場合を考える⁴⁾。(ブシネスク近似)

1) 流速が音速よりはるかに小さい。

2) 流体粒子が上下に動く距離がスケールハイトに比べて十分小さい。

地球の自転の影響は考慮しない。山の裾野の直径が 5 キロメートル以下ならば Rossby 数は無視できる⁵⁾といわれているので、その程度の規模の現象を想定している。

密度成層は密度勾配一定な安定成層とする。Heating surface や 逆転層は興味深い問題であるが今回は扱わない。

乱流モデルは用いない。

基礎方程式系

連続の式

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

運動方程式

$$D_t \mathbf{u} = -\operatorname{grad} P + \Delta \mathbf{u} / Re + \mathbf{g} (\rho - \rho_0) / \rho_0 \quad (2)$$

エネルギー方程式

$$D_t T = \Delta T / (Re \cdot Pr) \quad (3)$$

非圧縮性流体に対する状態方程式

$$\rho = \rho_0 \{1 - \alpha (T - T_0)\} \quad (4)$$

- ここで
- \mathbf{u} : 速度 (u, v, w)
 - ρ : 密度
 - $\rho_0(z)$: 与えた遠方の密度分布
 - T : 温度
 - $T_0(z)$: 与えた遠方の密度分布による温度分布
 - P : ρ_0 の静力学的平衡による圧力からの寄与 $P_0 = \int p dp / \rho_0$ を除いた $\int p dp / \rho$ 但し p は圧力
 - \mathbf{g} : 重力加速度 ($0, 0, g$)
 - Re : レイノルズ数 ($= Uh / \nu$) 但し U は代表速度 h は代表長さで丘の高さとする ν は動粘性係数
 - Pr : プラントル数 ($= \nu / \kappa$) 但し κ は熱輸送係数
- 以上の物性値は標準大気圧下、300 K での空気のものを使用する。
- α : 体膨張率 理想気体の体膨張率 $\alpha = 1/T_0$ を用いる

数値計算法

MAC法⁶⁾に基づく。運動方程式(2)の発散をとることによりヘルムホルツ分解の非回転の場に対する式を得る。

$$\Delta P = -\operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + D / \delta t \quad (5)$$

ここで $D = \operatorname{div} \mathbf{u}$, δt は $\partial / \partial t$ の差分近似
上式を適当な初期値、境界値のもとに解き P を求める。この P から運動方程式(2)により次の時間ステップの速度場を求める。またエネルギー方程式(3)により次の時間ステップの温度場を求める。以下、この繰り返しにより時間を進める。なお密度分布は非圧縮性流体に対する状態方程式(4)により温度分布から求める。

空間積分に対しては運動方程式及びエネルギー方程式の非線形項(対流項)は三次精度風上差分⁷⁾、その他は中心差分を用いる。時間積分に対してはオイラーの陰解法を用いる。

実際の計算をするにあたっては、上記の方程式を一般曲線座標系に変換して行う。

計算格子

用いた格子系を図-3にしめす。流れ方向(x-軸方向)に173点、流れを横切る方向(y-軸方向)に89点、高さ方向(z-軸方向)に63点、全部で約97万点の格子点を用いている。この格子系はまずはじめに物体表面上に格子をはり、つぎにこのような格子を高さ方向に何層にも(ここでは63層)重ねるようにして生成したものである。(注:したがってこのような格子断面は丘が載っている平板($z = \text{constant}$ の断面)に必ずしも平行ではない。)

初期条件 境界を除く全領域で
 $u = 1, P = 0, T = T_0(z)$
 (インパルシブ・スタート)

境界条件 流入境界
 $u = 1, v = 0, w = 0, P = 0, T = T_0(z)$
 流出境界、側面および上面
 u, P, T は一次精度の外挿で決める。
 物体表面
 $u = 0$
 P, T は一次精度の外挿で決める。

密度勾配

密度成層の強さは通常、フルード数

$$Fr = U / Nh$$

で表す。ここで N は Brunt-Väisälä 振動数

$$N = \sqrt{(-g / \rho_0) \cdot (d\rho_0 / dz)}$$

である。

本計算では Brunt-Väisälä 振動数は密度勾配一定な安定成層とするため 1.0 で一定とした。

以上の条件のもとレイノルズ数 $Re = 10^3, 10^4, 10^5$, フルード数 $Fr = \infty, 1.5, 1.0, 0.5, 0.2, 0.1$ の場合について計算を行った。

4 計算結果

以下の現象について実験結果と比較しつつ述べる。

- 1) Dividing-streamline
- 2) 風下波
- 3) 双子渦
- 4) カルマン渦
- 5) レイノルズ数依存性

はじめにフルード数を変えたときの流れ場の違いについて 1) から 4) で述べ、最後に 5) でレイノルズ数の依存性について述べる。

4.1 Dividing-streamline

三次元の丘を過ぎる強い密度成層流 ($Fr \leq 1.0$) において 流れは二つの層に分けられる。上流で丘の頂上を通る垂直断面から粒子を流れの中に飛ばしたときに、粒子が密度勾配により丘を越えられずに丘のまわりを迂回して行く水平方向の流れからなる下の層と粒子が丘の頂上を越えていく上の層からなる。下側の層の厚さを Dividing-streamline height (H_b)²⁾ という。これは大気汚染物質の移流拡散問題で重要となるものである。理想的な場合、 H_b は Sheppard³⁾ の示す通り運動エネルギーと位置エネルギーとの関係式

$$(1/2) \rho U^2 \Big|_{z=H_b} = g \int_{H_b}^h (h-z) (-d\rho/dz) dz \quad (6)$$

で与えられるはずである。左辺は遠方上流の H_b の高さの粒子の持つ運動エネルギー、右辺は粒子が $d\rho/dz$ の密度勾配の中で H_b の高さから h の高さの丘の頂上に達するときを得る位置エネルギーである。Hunt & Snyder は塩水によって密度勾配をつけた水槽で丘 (形状は本計算で用いたものと同じ四次の逆数の関数で表されるが、工作の都合上多少異なる。) 回りの密度成層流の実験を行った¹⁾。一定の密度勾配をもつ一様流 (shear はない) が丘にあたるという条件のもとで次のような結果を得た。

$$H_b = h (1 - Fr) \quad (7)$$

これは (6) 式を上記の条件のもとに近似的に解いたものにほかならない。(7) 式と計算結果を比較するため 上流で丘の頂上を通る垂直断面 ($y = 0$ の断面) 上で高さを変えて仮想粒子を流れの中に飛ばした。図-4 に丘の後方斜め上からみた図を示す。図-5 に側面からみた図を示す。流れ場は瞬間の値を用いている。レイノルズ数は 10^4 , フルード数は上から 1.0, 0.5, 0.2 である。(7) 式によれば H_b はそれぞれ 0, 0.5h, 0.8h となるはずである。フルード数が 1.0 のとき丘の前方に存在する首飾り渦のために丘の頂上を越えない粒子があるがそれ以外は丘の頂上を越えていく。フルード数が 0.5, 0.2 のときも (7) 式にほぼ合致する。

4.2 風下波

丘によって内部重力波が励起される。これは風下波 (lee wave) と呼ばれる。風下波の波長 λ は内部重力波の分散関係より次式で与えられる⁴⁾。

$$\lambda = 2\pi U / N \quad (8)$$

Hunt & Snyder はこの風下波の波長についても実験を行い (8)式と良い一致を得ている¹⁾。計算結果について風下波の波長を調べた。図-5においても風下波は観察されるが、よりはっきりさせるために対称断面上 ($y = 0$ の断面) に投影した速度場をもとに粒子の軌跡を描いた⁹⁾。(図-6) (以後ある断面に投影した速度場上の粒子の軌跡を表面流線図という。) また同じ対称断面状の渦度の絶対値の分布を図-7に示す。それぞれ一番上に比較のため密度成層のない場合 ($Fr = \infty$) を示した。密度成層により後流が抑えられる様子がわかる。 $Fr = 0.5$ の風下波に注目すると dividing-streamline height より上の流れは低い丘を過ぎる $Fr = 1.0$ の流れに類似している。すなわちあたかも dividing-streamline 面上に床を挿入したかのようなになる。このことは Snyder & Lawson が水槽実験で dividing-streamline 面上に水面をもってくることで確認している¹²⁾。図-6, 7より風下波の波長を求めた。

Fr	λ (理論値)	λ (計算結果)
1.0	6.3h	6h
0.5	3.1h	2.8h
0.2	1.3h	1.2h

表-1 風下波の波長

計算結果は 10 パーセント程度の差で理論値とよく合っている。

4.3 双子渦

図-7より密度成層がより強い場合 ($Fr = 0.2$) , 後流において強い渦度は二つの領域に存在する。物体表面近くと Dividing-streamline height 上の領域である。これは Hunt & Snyder が実験で $Fr \leq 0.4$ のとき有効であることを検証した¹⁾ Drazin の理論¹⁰⁾と一致する。Drazin の理論によれば三次元の丘を過ぎる密度成層流は四つの領域に分けられる。(図-8) ほぼ水平方向にのみ流体が運動する領域 $[H_1]$, $[H_2]$ と垂直方向にも運動する領域 $[B]$, $[T]$ である。領域 $[B]$, $[T]$ の厚さは $\alpha_B Fr h$, $\alpha_T Fr h$ (α_B , α_T は丘の形状による 1 のオーダーの係数) となる。Drazin の理論との一致を確認するために渦度の流れに垂直な方向 (y -軸方向) の成分の分布図を図-9に示す。 α_B , $\alpha_T = 1$ とすると $Fr = 0.2$ では領域 $[B]$, $[T]$ の厚さは $0.2h$ となり計算結果は理論とほぼ一致する。

後流の三次元的な構造を見るために丘の頂上より約 $4h$ 後方の流れ方向にほぼ垂直な格子断面 (図-7の一点鎖線) 上の渦度の絶対値の分布図を図-10に示す。丘の後方からみた図である。丘の後流域とその両わきの境界層とははっきりと分かれる。後流域は密度成層が強くなるにつれ渦度の小さい領域すなわち水平方向にのみ流体が運動している領域 $[H_1]$ が大きくなる。

後流域における流れ場の三次元構造を調べるために $Fr = 0.2$ の場合についてそれぞれの格子断面上の表面流線を描いた。(図-11) 速度場はある瞬間の値を用いている。対応する格子断面は一番上の格子図にそれぞれの z -軸方向の番号 (k) で示した。丘から十分にはなれたところにおいてそれぞれの格子断面は物体表面上 約 $0.05h$, $0.2h$, $0.8h$ の高さにある。格子図は丘の側面

から、表面流線図は丘の上方から見たものである。物体表面近くで一对の渦状点¹³⁾が存在し物体表面からの渦の巻上り角を示している。(図-11a) この渦は双子渦を形成する。(図-11b) 双子渦は Dividing-streamline height の辺りで拡散される。(図-11c) 無次元時間で 200 ぐらいまで計算を進めてみたがこの双子渦はくずれなかった。

4.4 カルマン渦

上記の密度成層の強さでは双子渦は安定なままだったのでさらに密度成層を強めフルード数 $F_r = 0.1$ で計算を行った。双子渦は不安定になり時間を進めると周期的な渦の放出が現れた。図-12 に一つの格子断面上での表面流線の時間変化を示す。ほぼ渦放出の半周期分に相当する。渦放出をよりはっきりさせるために同じ断面上で z -軸方向の渦度成分を図-13 に示す。

Brighton が密度成層流でのカルマン渦放出について調べている¹¹⁾が、円柱、円錐、半球回りの流れについて実験を行いカルマン渦の放出は物体の形状によらずフルード数 F_r が 0.15 以下の時に起こると報告している。本計算結果はこれと一致している。

三次元的な構造を見るために前と同様にある瞬間の断面ごとの表面流線図を示す。(図-14) 双子渦の時と同様に物体表面近くで渦の巻上り角を示す渦状点が見られるが対称な対とはなっていない。(図-14a) 渦は Dividing-streamline height 近くで拡散される。(図-14c)

さらに水平方向にのみ流体が運動している領域 $[H_1]$ 内での構造を見るためある瞬間の領域 $[H_1]$ 内の断面ごとの表面流線を示す。(図-15) 各断面ごとの渦放出の位相のずれが観察される。図-15 において矢印で示す渦に注目すると床から離れるにしたがって各断面上で渦は後流側にずれる。すなわち渦の軸が後流に傾いている。この現象は Brighton も報告¹¹⁾している。

4.5 レイノルズ数依存性

通常、密度成層流の水槽実験では固定された密度勾配 ($N = \text{constant}$) の流体中で模型を動かす速度を変えることによってフルード数を変化させている。従ってフルード数を増すとレイノルズ数も増してしまい、流れ場のレイノルズ数依存性は調べにくい。Hunt & Snyder は $F_r = 0.4$ の場合について大小二つの水槽でそれぞれ二種類の密度勾配の塩水を用いて実験を行っている¹¹⁾。そのため対応するレイノルズ数は 400, 1900, 10000, 27500 となった。この実験より Hunt & Snyder は流れ場のレイノルズ数依存性はほとんどないとしている。しかしフルード数が 1 以上のときは慣性力が重力に優るため密度成層のないときと同様にレイノルズ数依存性が大きくなると思われる。図-16 に密度成層のないときのレイノルズ数依存性を示す。ある瞬間の対称断面上の表面流線である。レイノルズ数が大きくなると後流域が抑えられる。特にレイノルズ数が 10^5 の時には再付着がみられる。図-17 に $F_r = 1.5$ のときのレイノルズ数依存性を見るためにある瞬間の対称断面上の表面流線を示す。レイノルズ数が大きくなるにつれ後流域が狭まってくる。このことは同じ断面上でみた渦度の絶対値の分布でもはっきりする。(図-18)

5 まとめ

ブシネスク方程式系を数値積分することで三次元の丘を過ぎる密度成層流を調べ、一般的な流れ場の特徴についてその結果を実験と比較し定性的に一致を見た。今回は密度勾配は一定としたが、実在の大気の密度勾配は高さで変化する。また heating surface もあつかわなかったが、地表面や海面の温度は流れに大きく影響する。今後これらも取り扱える方法を検討して行きたい。

参考文献

- 1) Hunt, J.C.R. & Snyder, W.H., "Experiments on stably and neutrally stratified flow over a model three-dimensional hill," *J. Fluid Mech.* vol.96, part 4, pp.671-704, (1980).
- 2) Snyder, W.H., "Fluid modeling of pollutant transport and diffusion in stably stratified flows over complex terrain," *Ann. Rev. Fluid Mech.* vol.17, pp.239-266, (1985).
- 3) Hunt, J.C.R., Abell, C.J., Peterka, J.A. & Woo, H., "Kinematical studies of the flows around free or surface mounted obstacles; applying topology to flow visualization," *J. Fluid Mech.* vol.86, pp.179-200; corrigendum *J. Fluid Mech.* vol.95, pp.796, (1979).
- 4) 木村竜治: 地球流体力学, 東京堂出版 (1981)
- 5) Snyder, W.H., "Guideline for fluid modeling of atmospheric diffusion," Rep. No. EPA-600/8-81-009, Environ. Prot. Agency, Research Triangle Park, N.C. 200pp., (1981)
- 6) Harlow, F.H. & Welch, J.E., "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface," *Phys. Fluids* vol.8, pp.2182-2189, (1965).
- 7) Kawamura, K., Takami, H. & Kuwahara, K., "Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness," *Fluid Dynamics Research* vol.1, pp.145-162, (1986).
- 8) Sheppard, P.A., "Airflow over mountains," *Quart. J. R. Met. Soc.* vol.82, pp.528-529, (1956).
- 9) 白山晋: 三次元流れの剝離構造の数値的研究, 学位論文 (1985)
- 10) Drazin, P.G., "On the steady flow of a fluid of variable density past an obstacle," *Tellus* vol.8, pp.239-251, (1961).
- 11) Brighton, P.W.M., "Strongly stratified flow past three-dimensional obstacles", *Quart. J. R. Met. Soc.* vol.104, pp.289-307, (1978).
- 12) Snyder, W.H. & Lawson, R.E.Jr., "Stable plume dispersion over an isolated hill: releases above the dividing-streamline height," In EPA Complex Terrain Model Development: Fourth Milestone Report, Environ. Prot. Agency, Research Triangle Park, N.C.
- 13) Lighthill, M.J., "Laminar boundary layers," L. Rosenhead (ed.), Oxford Univ. Press, New York, (1963).

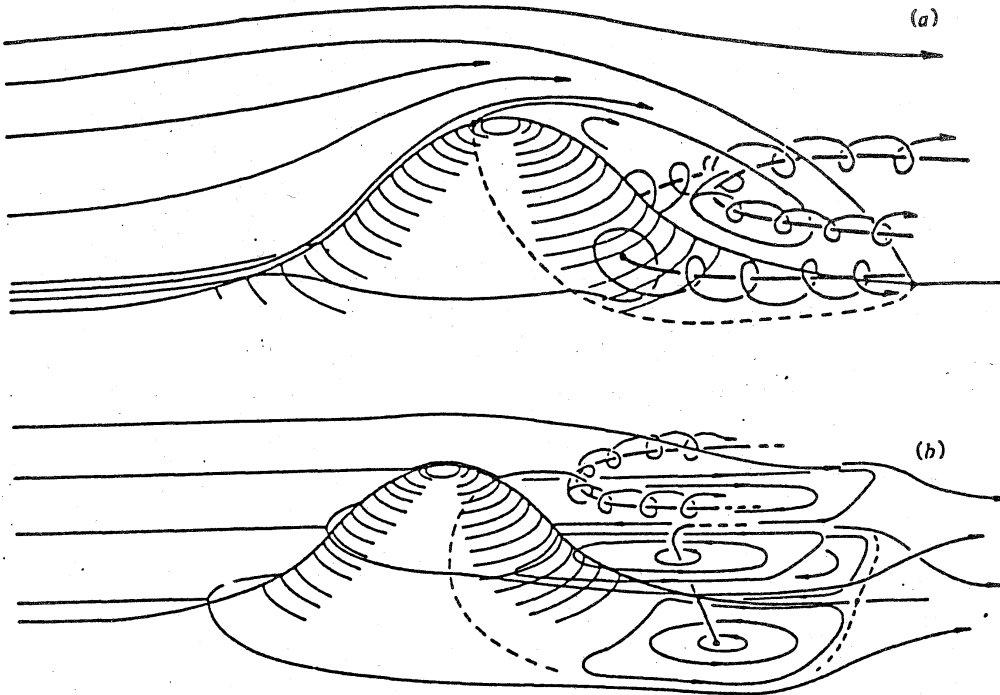


図-1 Sketch of flows over a three-dimensional hill in (a) neutral and (b) very stable stratification. (文献(1)より)

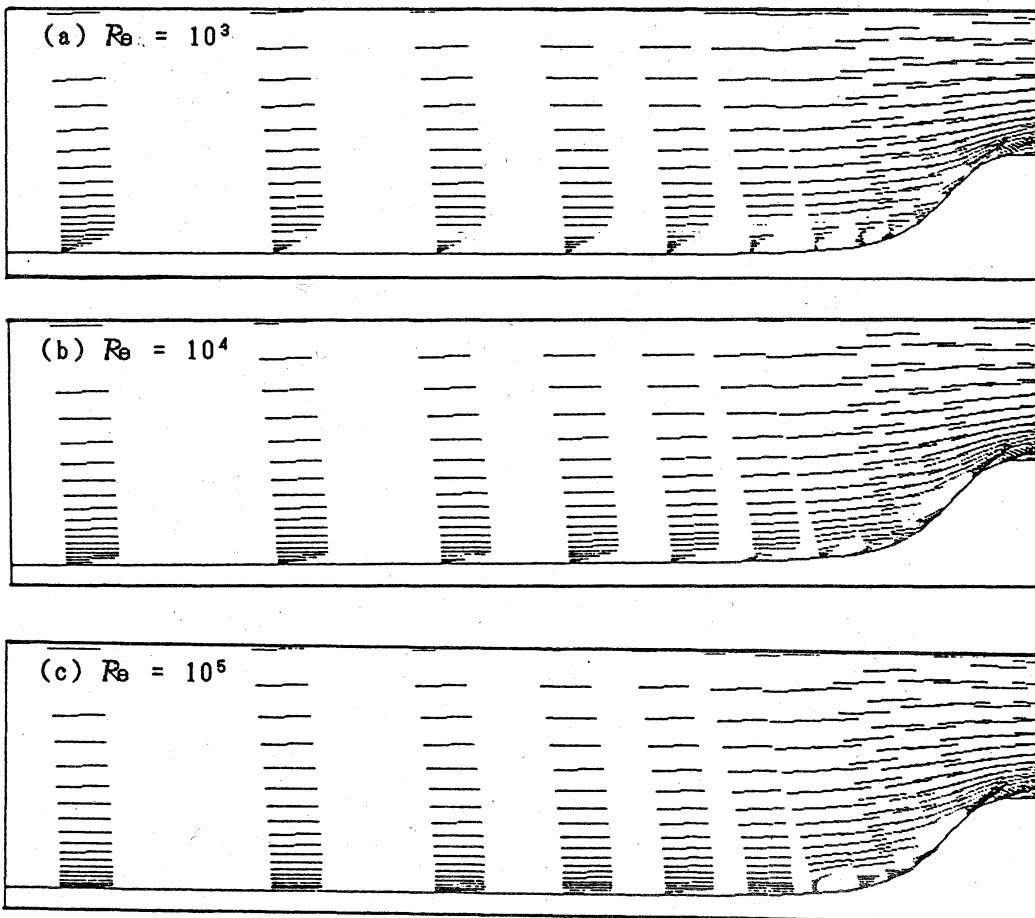


図-2 物体前方の対称断面における速度ベクトル ($F_r = 1.0$)

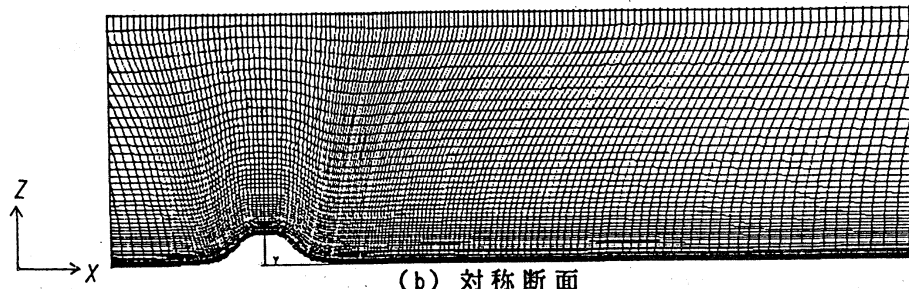
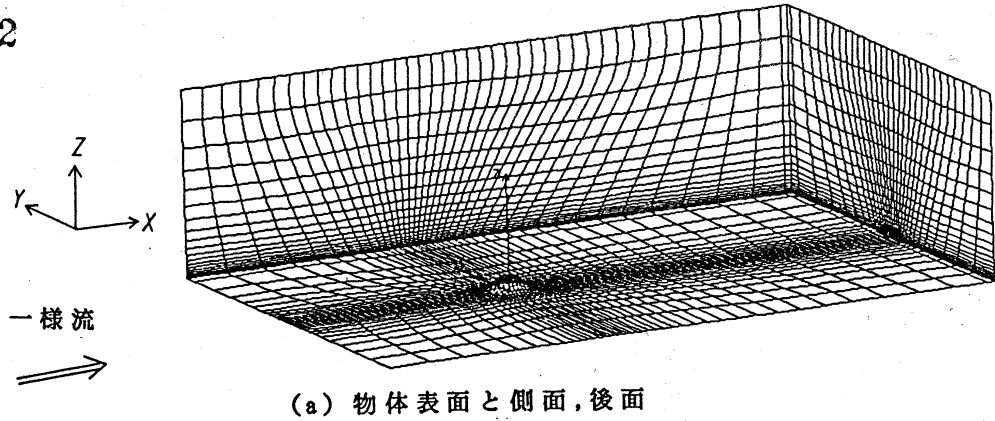


図-3 格子系

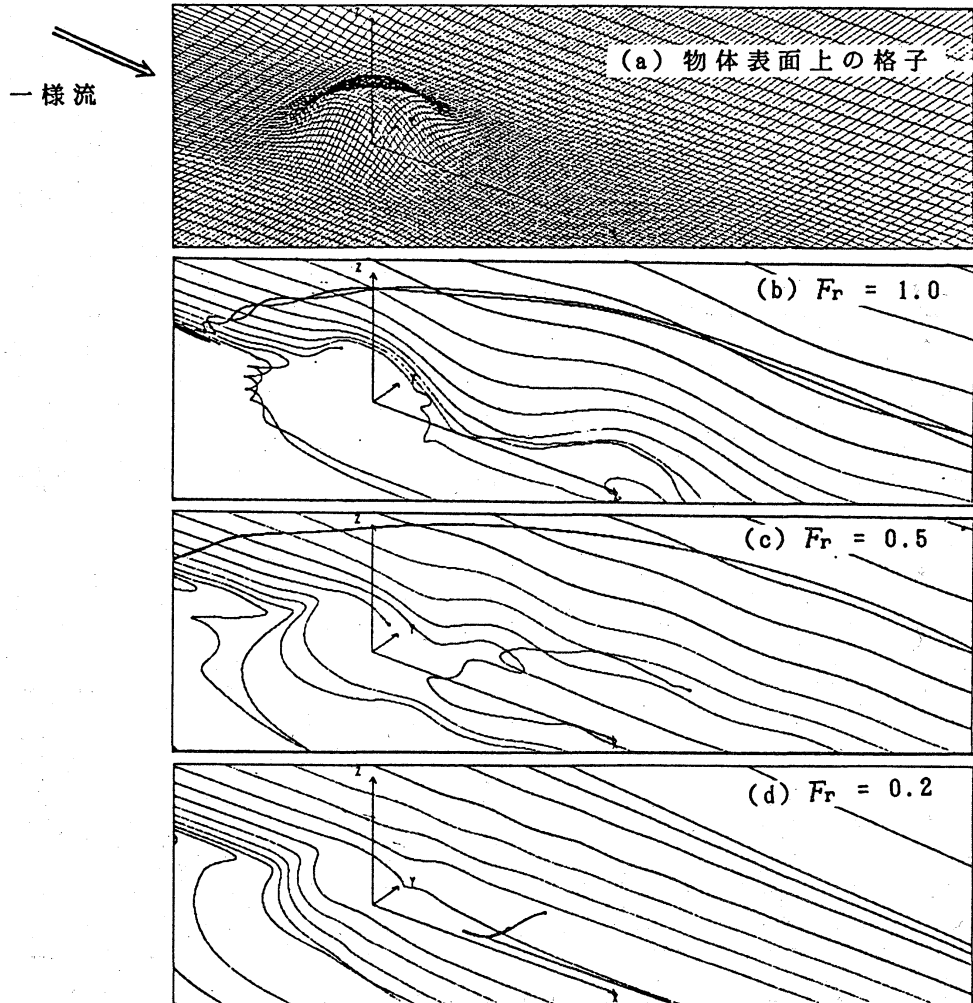


図-4 瞬間流線 (丘の後方斜め上からみた図) ($Re = 10^4$)

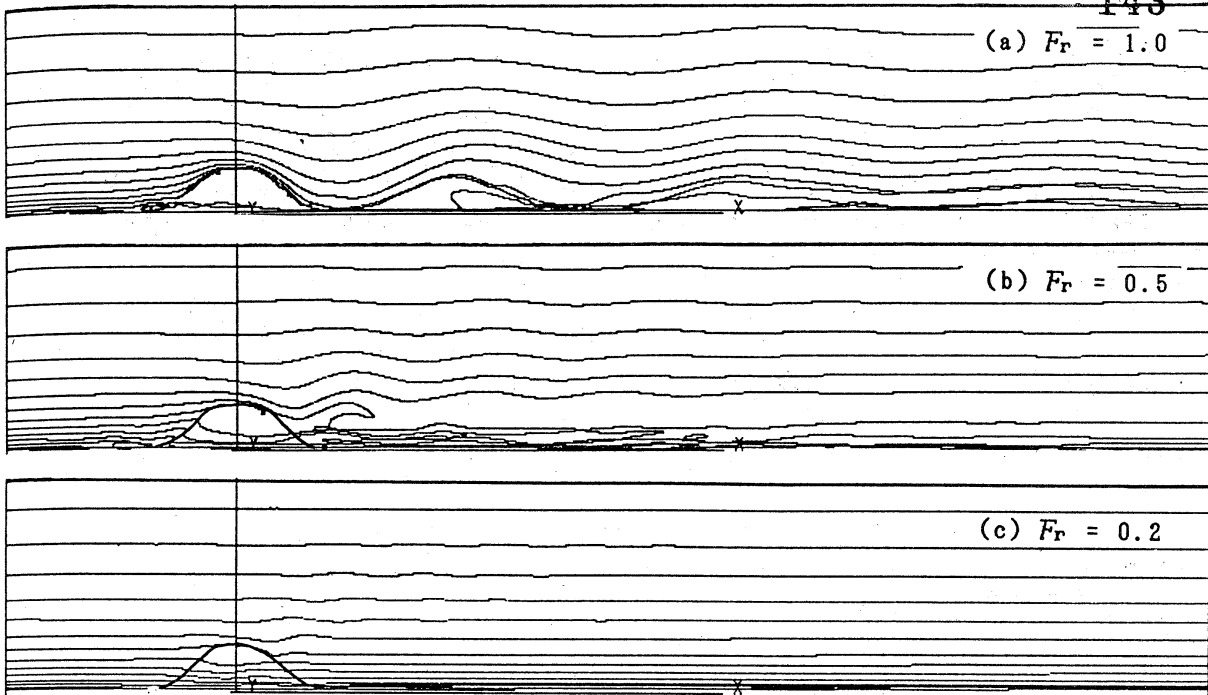


圖 - 5 瞬間流線 (側面圖) ($Re = 10^4$)

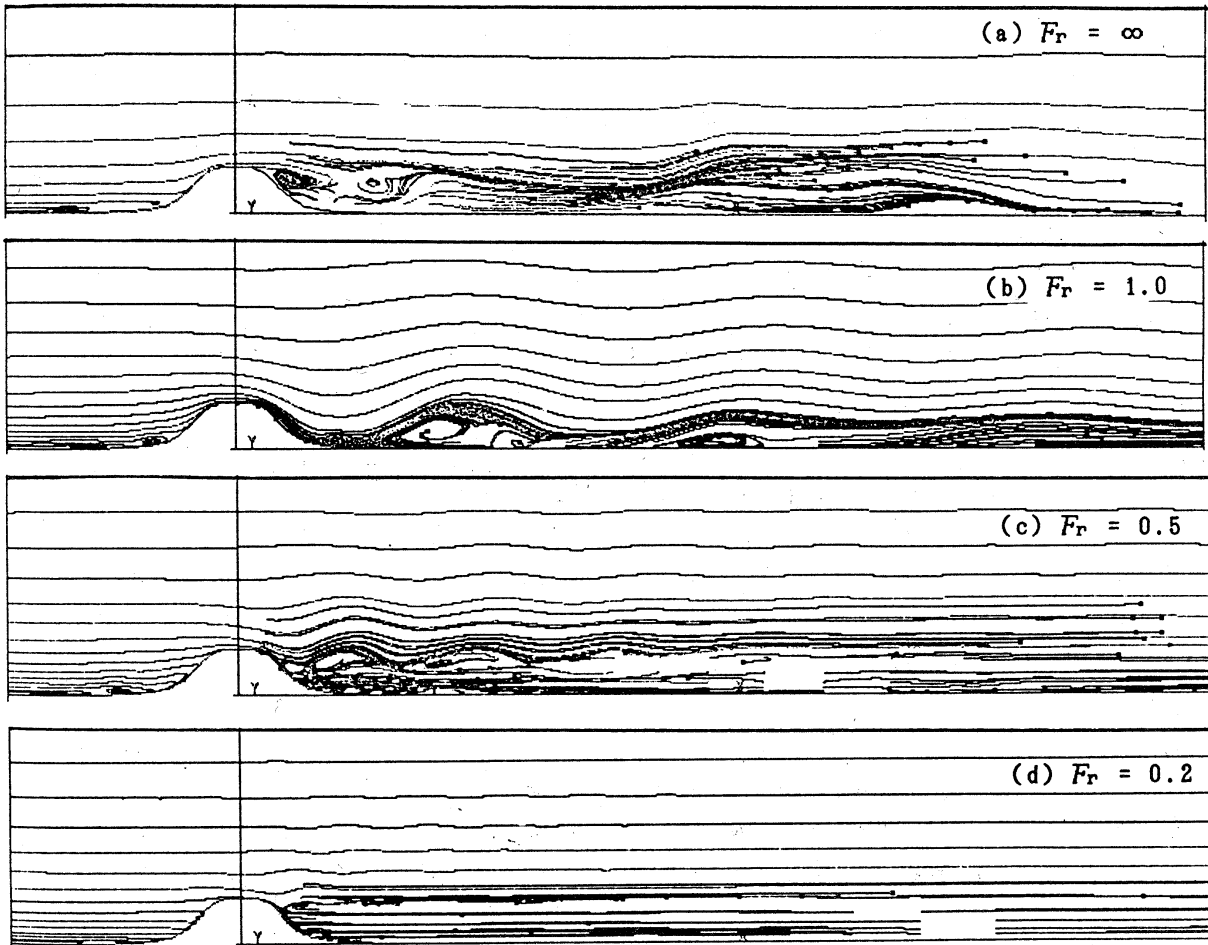


圖 - 6 瞬間表面流線 ($Re = 10^4$)

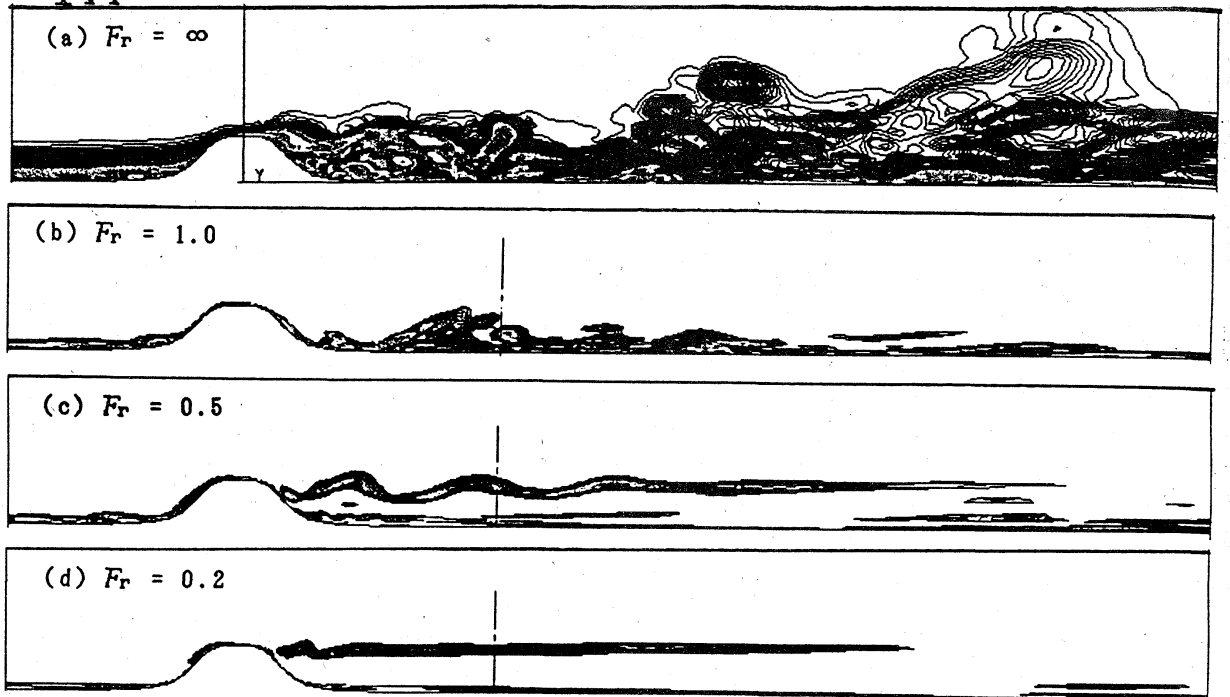


図 - 7 等渦度線 ($Re = 10^4$)

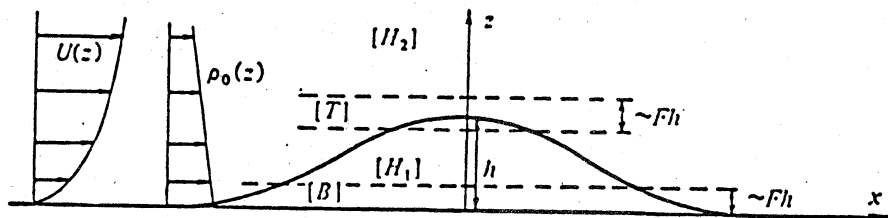


図 - 8 Small-Froude-number theory for flow over three-dimensional hills: Definition of regions (文献(1)より)

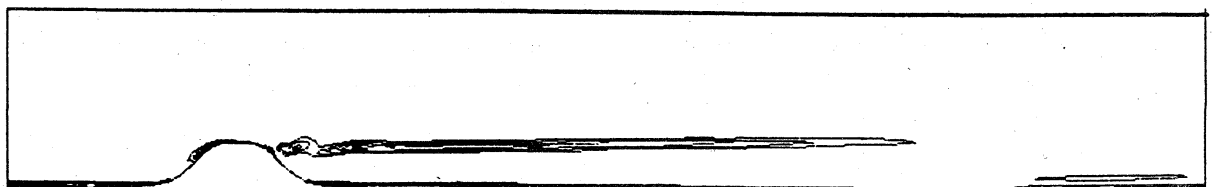


図 - 9 等渦度線 (y - 軸方向の成分) ($Fr = 0.2, Re = 10^4$)

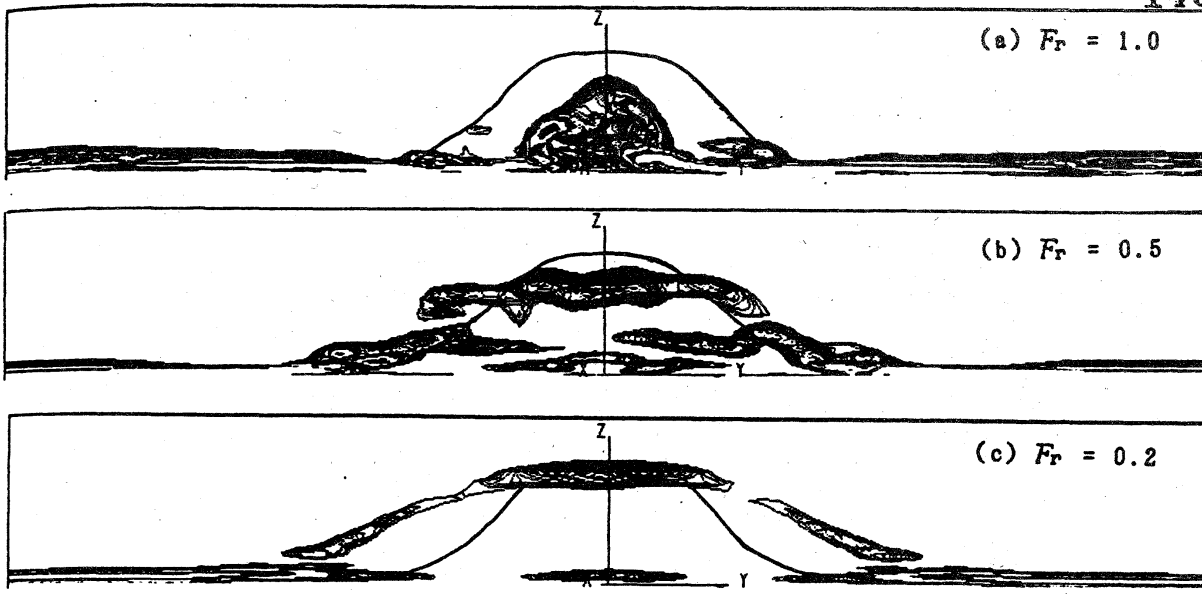


圖-10 等渦度線 ($Re = 10^4$)

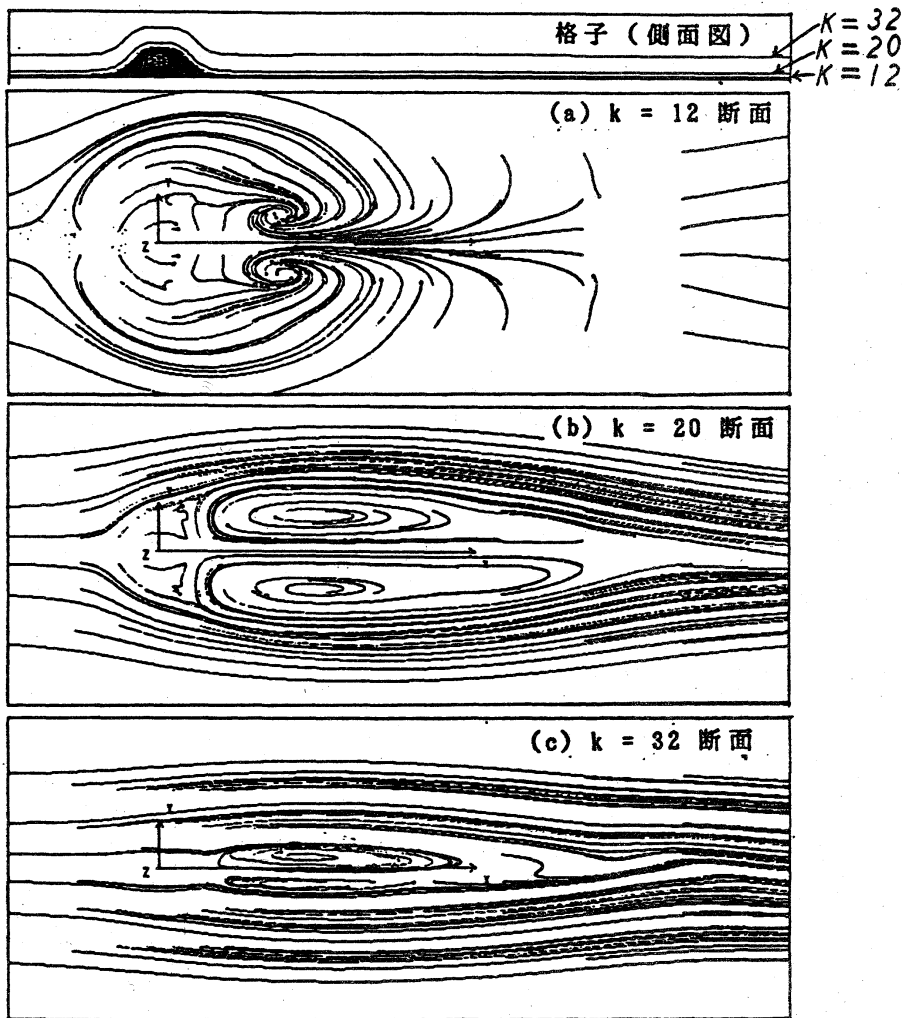


圖-11 瞬間表面流線 (上面圖) ($F_r = 0.2, Re = 10^4$)

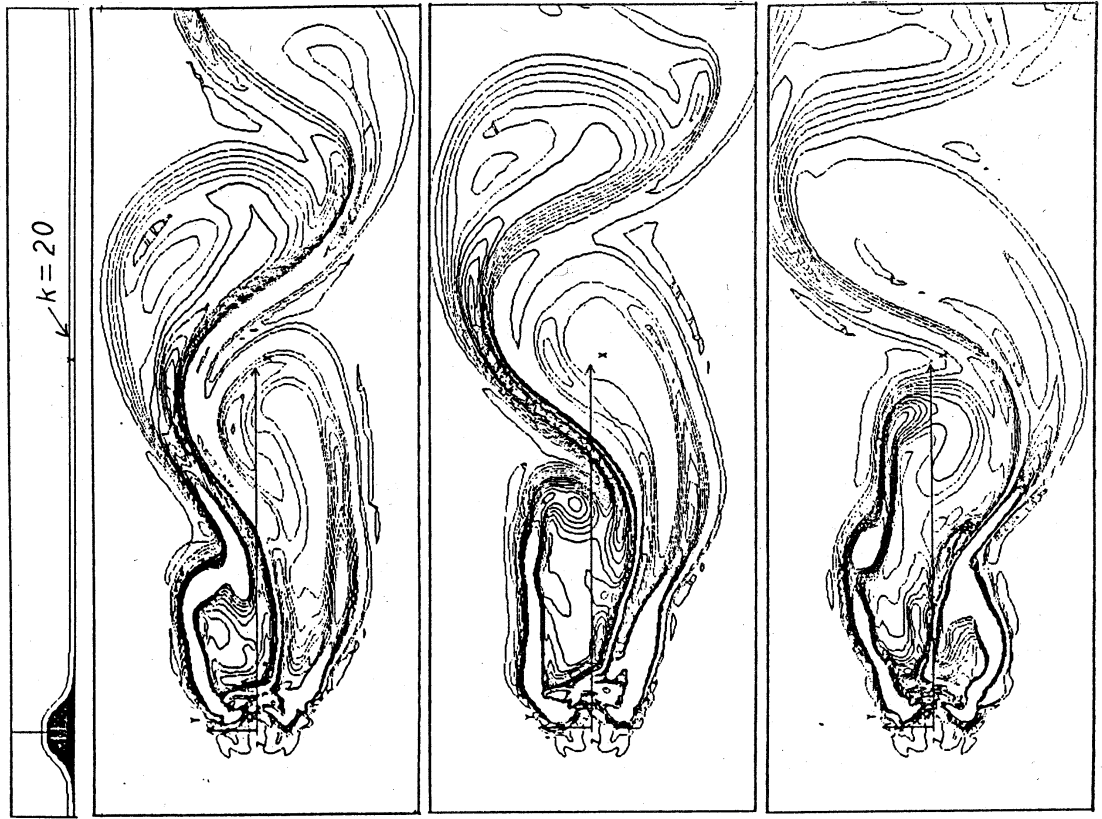


図-13 等渦度線 (z-x 軸方向の成分) の時間変化 ($k = 20$ 断面)
($Fr = 0.1, Re = 10^5$)



図-12 瞬間表面流線の時間変化 ($k = 20$ 断面)
($Fr = 0.1, Re = 10^5$)

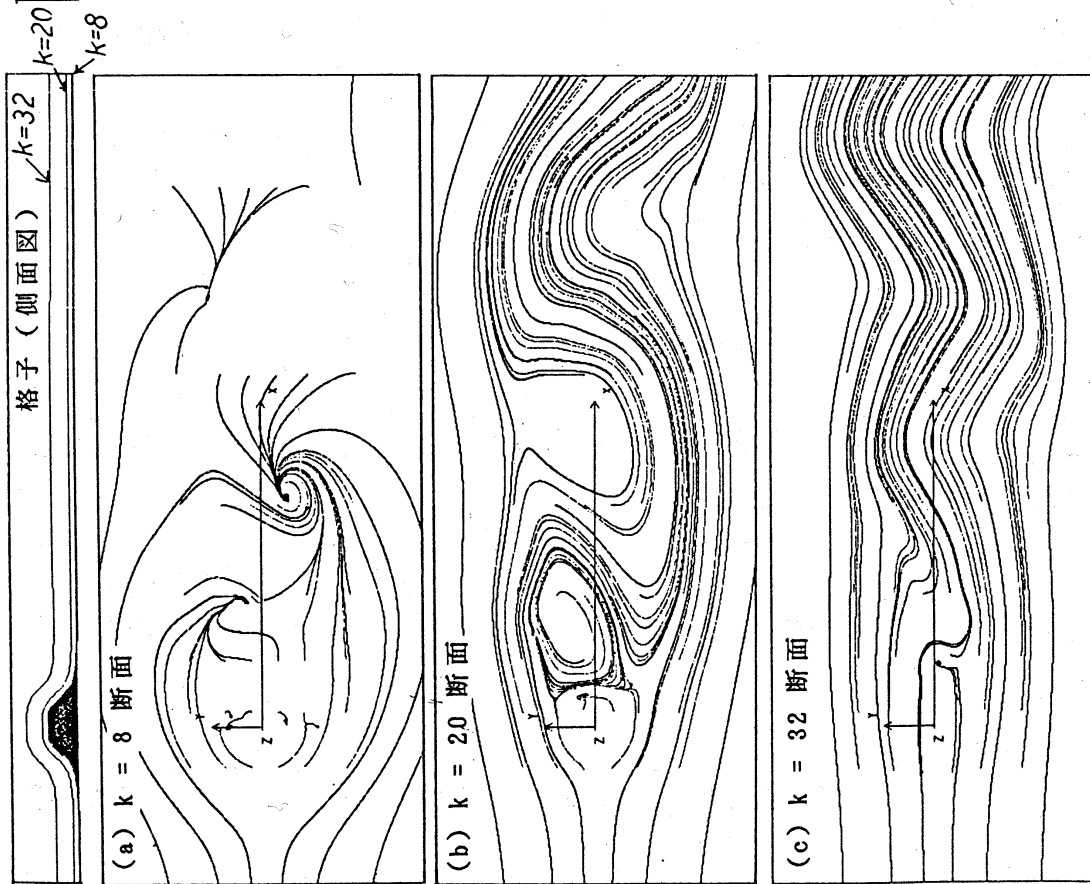


图-1-4 瞬间表面流线 (上面图)
($Fr = 0.1, Re = 10^5$)

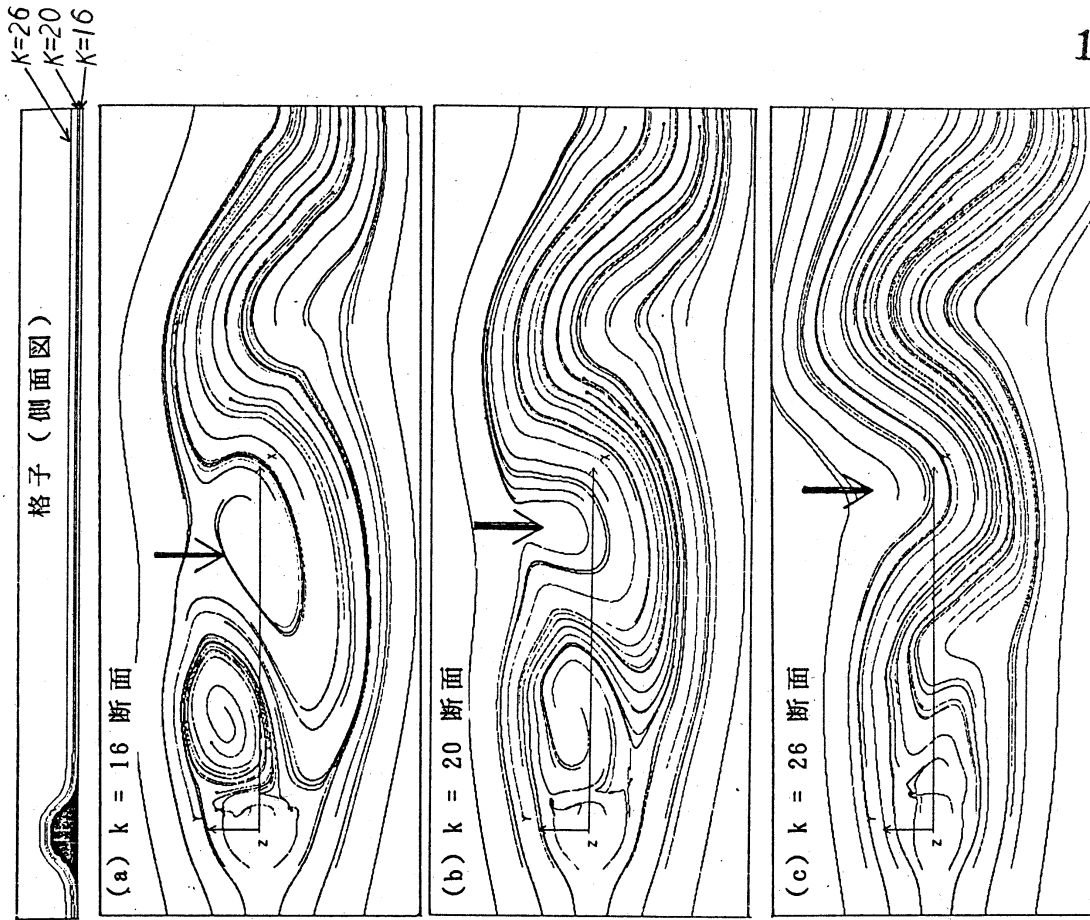


图-1-5 瞬间表面流线 (上面图)
($Fr = 0.1, Re = 10^5$)

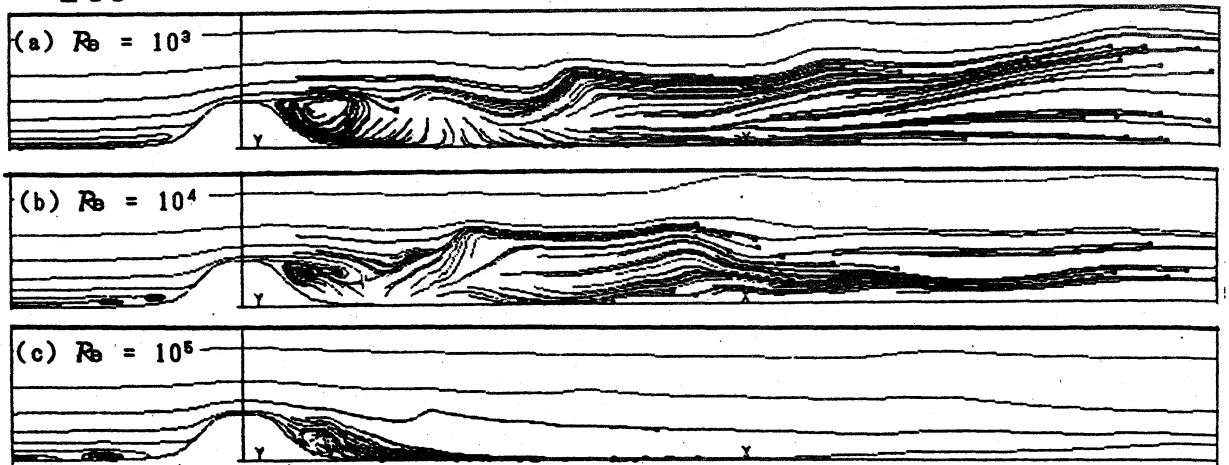


圖-16 瞬間表面流線 ($F_r = \infty$)



圖-17 瞬間表面流線 ($F_r = 1.5$)



圖-18 等渦度線 ($F_r = 1.5$)