

## M H D 乱流の数値計算 ( R F P )

東大生研 半場藤弘 (Fujihiro Hamba)

### § 1 はじめに

逆転磁場ピンチ<sup>1)</sup> (Reversed Field Pinch; R F P) は核融合のプラズマ閉じ込め装置の 1 つで、トカマクと同じように軸対称トーラス系 (図 1) である。トーラスに沿ったトロイダル方向の磁束をかけることによって、らせん状の磁力線を作りプラズマを閉じ込める。トカマクと異なる点は、大きなプラズマ電流を流しポロイダル磁場がトロイダル磁場と同程度の大きさであることである。

図 2 は典型的な磁場の配位で、トロイダル磁場 ( $B_z$ ) が壁付近 ( $r > 0.8$ ) で負になっていることから逆転磁場ピンチと呼ばれる。この分布は Taylor<sup>2)</sup> によって理論的に導出され壁のごく付近を除けば実験値をよく説明する。すなわち、磁気ヘリシティ  $\int A \cdot B dV$  ( $A$  はベクトルポテンシャル、 $B$  は磁場) が一定の下で磁気エネルギー  $\int B^2 / 2 dV$  が最小という

変分原理から

$$\nabla \times B = \kappa B \quad (1)$$

( $\kappa$  は定数) が得られ、円柱近似をするとベッセル関数を用いて

$$B_z = B_0 J_0(\kappa r), \quad B_\theta = B_0 J_1(\kappa r) \quad (2)$$

と表される。 $\kappa a > 2.4$  ( $a$  は中心から壁までの距離) のとき  $B_z$  が反転する。

プラズマはイオンと電子から成り、粒子としての取り扱いももちろん必要であるが、磁場の配位などプラズマのマクロなふるまいに関しては、プラズマを流体として扱い MHD 近似をしてもよく記述できることが明らかになってきた。上述した配位が形成される緩和過程や、抵抗があるにもかかわらず配位が保たれるための維持機構が 3 次元の MHD 数値計算を使って研究されている。

Aydemir et al.<sup>3)</sup> は流体を圧縮性または非圧縮性として扱った 5 つのコードの計算結果を比較し、反転が維持されるには圧縮性が重要であると結論した。図 3 はある時刻のポロイダル磁場  $B_\theta$  の分布、図 4 は壁での  $B_z$  の値の時間変化である。圧縮性と非圧縮性とでは結果が定性的に異なることがわかる。また Kusano et al.<sup>4)</sup> は圧縮性の数値計算で非線形駆動リコネクションモデルの妥当性を示した。Kirby<sup>5)</sup> は非圧縮

性のコードでも反転が維持されることを示し、磁場の拡散率の分布の実験値を用いてよい結果を得た。

本研究では非圧縮性として扱い、さらに乱流モデル (Large Eddy Simulation; LES) <sup>6, 7, 8)</sup> を使い、計算を行った。磁気レイノルズ数が大きくなり磁場の擾乱が高波数成分を持つようになると、計算格子ではとらえ切れなくなるので、細かい擾乱の相関を  $\alpha$  効果や渦拡散 (異常拡散) としてモデル化する。平均磁場の分布やエネルギースペクトルなどを求め、乱流モデルを使わない場合と比較し考察する。

## § 2 基礎方程式と計算方法

非圧縮性流体の Navier Stokes 方程式と磁場の誘導方程式は、適当な無次元化を行うと

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u} - \mathbf{b}\mathbf{b}) - \nabla (p_0 + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2) + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b} - \lambda \nabla \times \mathbf{b}) \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (5)$$

と書ける。ここで  $\mathbf{u}$  は速度、 $\mathbf{b}$  は磁場、 $\nu$  は流体の動粘性係数、 $p_0$  は圧力、 $\lambda$  は磁場の拡散係数である。

LES で速度、磁場などの物理量は

$$f = \bar{f} + f' \quad (6)$$

のように分けられる。 $\bar{f}$  は grid scale の物理量、 $f'$  は  $\bar{f}$  か

らのずれ (subgrid scale の量) であり、 $\bar{f}$  はフィルター関数  $G(x, y)$  を用いて

$$\bar{f}(x) = \int \int \int G(x-y) f(y) dy \quad (7)$$

と定義される。このフィルター平均を (3) ~ (5) 式にほどこすと subgrid scale の相関が現れるので次のようにモデル化する。

$$\overline{u'u' - b'b'} = \frac{1}{3} (\overline{|u'|^2} - \overline{|b'|^2}) I - \nu_e S \quad (8)$$

$$\overline{u' \times b'} = \alpha \bar{b} - \lambda_e \nabla \times \bar{b} \quad (9)$$

$$I_{ij} = \delta_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \quad (10)$$

(ただし、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーの  $\delta$  記号。) (8) 式は乱流の数値計算で用いられている Smagorinsky モデル<sup>6)</sup>で、渦粘性を表す。(9) 式はダイナモ効果を表す  $\alpha$  項と渦拡散<sup>8)</sup>の項から成る。結局 grid scale の速度と磁場の発展方程式は以下のようなになる。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\bar{u} \bar{u} - \bar{b} \bar{b}) - \nabla \bar{p} + \nabla \cdot \{(\nu + \nu_e) S\} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} = \nabla \times \{ \bar{u} \times \bar{b} - (\lambda + \lambda_e) \nabla \times \bar{b} + \alpha \bar{b} \} \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = \nabla \cdot \bar{b} = 0 \quad (13)$$

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \frac{1}{2} (\overline{|b|^2} + \overline{|b'|^2}) + \frac{1}{3} (\overline{|u'|^2} - \overline{|b'|^2}) \quad (14)$$

$$\nu_e = C_V \Delta^2 \left\{ \frac{1}{2} C_V S_{ij} S_{ij} + C_B \{ |\nabla \times \bar{b}|^2 - C_{B2} \frac{(\bar{b} \cdot \nabla \times \bar{b})^2}{|\bar{b}|^2} \} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

$$\lambda_e = \frac{C_B}{C_V} \nu_e \quad (16)$$

$$\alpha = C_{B2} \lambda_e \frac{\bar{b} \cdot \nabla \times \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \quad (17)$$

$$\Delta = \sqrt{(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2)} / 3 \quad (18)$$

ここで、 $C_v, C_B, C_{B2}$  はモデル定数、 $\Delta_{x, (y, z)}$  は各方向の格子間隔である。

実際の計算は図5のような円柱座標系で行った。半径の長さ、 $b_z$  の円柱断面での平均とで規格化し、円柱の  $z$  方向の長さは 6.4 である。格子点は  $r, \theta, z$  の順に  $16 \times 32 \times 32$  である。空間については 2 次精度の中心差分を用い、時間については  $\theta$  方向の拡散項に Crank-Nicolson 法を、それ以外に Adams-Bashforth 法を使った。また、 $z$  方向の空間振動をおさえるため、時間ステップの 2 回に 1 回  $u$  と  $b$  を Fourier 変換して高波数成分を除去した。 $z$  方向の境界では周期境界条件を、壁 ( $r = 1$ ) では次の条件を課した。

$$\bar{u}_r = 0, \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \bar{u}_\theta \right) = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} = 0 \quad (19)$$

$$\bar{b}_r = 0, \quad E_z = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{b}_\theta) = \text{const.}, \quad E_\theta = \lambda \frac{\partial \bar{b}_z}{\partial r} = 0 \quad (20)$$

つまり、速度に対して free slip、磁場に対して導体壁と近似し、ただし  $z$  方向に弱い一定の電場をかけた。

### § 3 計算結果と考察

速度、磁場などの物理量は  $\theta$  と  $z$  方向に統計的に一様であるので次のような平均を考える。

$$\bar{b} = \langle \bar{b} \rangle + \bar{b}'' \quad (21)$$

$$\langle \bar{b} \rangle (=B) = \frac{1}{2\pi L_z} \int \int \bar{b}(r, \theta, z) d\theta dz \quad (22)$$

計算の初期条件は平均値を

$$\nabla \times B = \kappa B, \quad \kappa = \kappa_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}r\right) \quad (23)$$

$$U = 0 \quad (24)$$

で与えた。平均磁場を図6に示す。擾乱は乱数で作り、乱流強度を

$$\sqrt{\langle |\bar{b}''|^2 \rangle} = \sqrt{\langle |u''|^2 \rangle} = 10^{-3} \quad (25)$$

とした。

まず、LESモデルを使わない場合の平均磁場の分布を図7に示す。 $B_z$ は壁付近で反転しているが値は小さい。 $B_\theta$ は壁付近で急に値が大きくなっている。電流分布を見ると大きな $J_z$ が流れていることがわかる。これはAydemir et al.の計算(図3)の非圧縮性の場合に対応している。すなわち、拡散係数 $\lambda$ が一定で非圧縮性の計算では、十分な電場をかければ反転はするが $B_\theta$ の分布が実験値と異なる。

図8はLESモデルを入れた計算結果である。 $B_z$ の反転の割合が大きくなり、 $B_\theta$ は $r \sim 0.5$ でピークをもち、壁に向かってなだらかに下がっている。つまり、非圧縮性の計算でもLESモデルを使うことによって実験値に近い磁場分布を得ることができた。

そこで  $B_\theta$  の発展方程式の各項のバランスを調べてみる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\theta}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial r} (\langle \bar{u}_r \bar{b}_\theta \rangle - \langle \bar{u}_\theta \bar{b}_r \rangle) \quad : \text{grid scale} \\ & - \frac{\partial}{\partial r} \langle C_{B2} \lambda_e \frac{\bar{\mathbf{b}} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{b}}}{|\bar{\mathbf{b}}|^2} \bar{b}_z \rangle + \frac{\partial}{\partial r} \langle \lambda_e (\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \bar{b}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{b}_r) \rangle : \text{subgrid scale} \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_\theta \quad : \text{diffusion} \end{aligned} \quad (26)$$

$\nabla \times \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$  の grid scale の項、subgrid scale の項（モデル化されている）、 $B_\theta$  の diffusion 項の 3 つに分けられる。

図 9 はモデルなしの場合である。 $r < 0.8$  で  $B_\theta$  の分布は上に凸であるので diffusion 項は負であり、grid scale の項がそれを補っている。ところが grid scale の項は  $r > 0.8$  で大きく負となり、それにつりあうため diffusion 項が正で  $B_\theta$  の分布が右上がりになっている。一方、モデルを入れた図 10 では  $r > 0.5$  で subgrid scale の項が正となっている。ダイナモ効果をモデル化した第 1 項の影響と考えられる。

次に  $\mathbf{b}$  のエネルギースペクトルを図 11 に示す。 $\theta$  と  $z$  方向に Fourier 変換し、 $r$  方向については積分したものである。

$$E_{m,n} = \int_0^1 |\bar{\mathbf{b}}(r, m, n)|^2 r dr \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{b}}(r, \theta, z) = \sum_{m=-M/2+1}^{M/2} \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \bar{\mathbf{b}}(r, m, n) \exp(im\theta + i\frac{2\pi n}{L_z} z) \quad (28)$$

$\theta$  方向のモード  $m$  が増えるにつれてスペクトルの形が左にず

れ、 $n/m \sim -3$ がピークとなっている。これは、ある一定のピッチをもつ、ら旋上の擾乱が主であることを表している。モード  $n$  が上がると値が急激に小さくなり、エネルギーは低波数が支配的である。このような速度場、磁場では、使ったモデルが subgrid scale のモデルとして意味があるのか疑わしくなる。しかし、モデル定数  $C_{B_2}$  を変えると (図 12)、高波数成分をもつようになる。(ただし、平均磁場の分布は悪くなる。) また、実験<sup>9)</sup>でも密度や電位について、幅の広いスペクトルが観測されている (図 13)。磁気レイノルズ数が高くなればスペクトルが高波数に広がることが十分に考えられる。高波数成分をもち、平均値の分布も実験に近い磁場を、LES モデルで計算することはこれからの課題である。それにはモデル定数の最適化やモデルそのものの改良が必要であると思われる。

#### § 4 まとめ

LES モデルを用いて RFP の数値計算を行い、平均磁場やエネルギースペクトルの分布を求めた。非圧縮性の計算でもモデルを入れることで平均磁場分布を改善することができた。しかし今回の計算では低波数モードが支配的であり、幅の広いスペクトルをもつ磁場を求めることは今後の課題であ



る。

### 参考文献

- 1) H.A.B. Bodin and A.A. Newton: Nucl. Fusion 20 (1980) 1255.
- 2) J.B. Taylor: Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1139.
- 3) A.Y. Aydemir, D.C. Barnes, E.J. Caramana, A.A. Mirin, R.A. Nebel, D.D. Schnack, and A.G. Sgro: Phys. Fluids 28 (1985) 898.
- 4) K. Kusano and T. Sato: Nucl. Fusion 26 (1986) 1051.
- 5) P. Kirby: Phys. Fluids 31 (1988) 625.
- 6) J.W. Deardorff: J. Fluid Mech. 41 (1970) 453.
- 7) P. Moin and J. Kim: J. Fluid Mech. 118 (1982) 341.
- 8) A. Yoshizawa: Phys. Fluids 30 (1987) 1089.
- 9) REPUTE-1 Annual Report 1986.

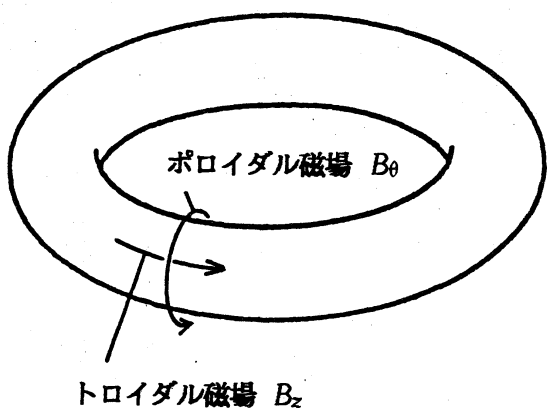


図1 RFPの磁場

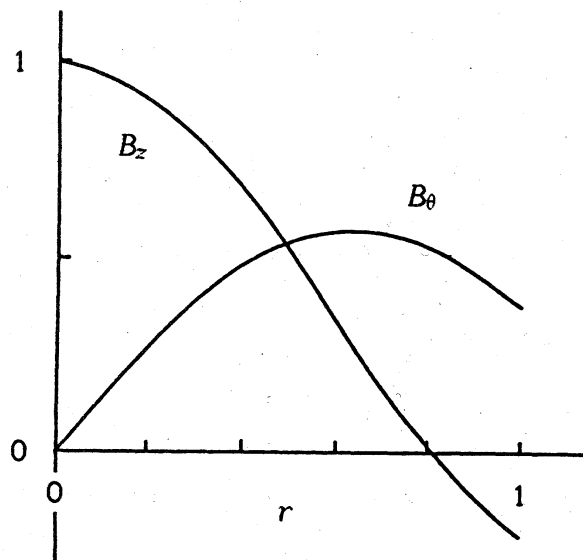


図2 磁場分布

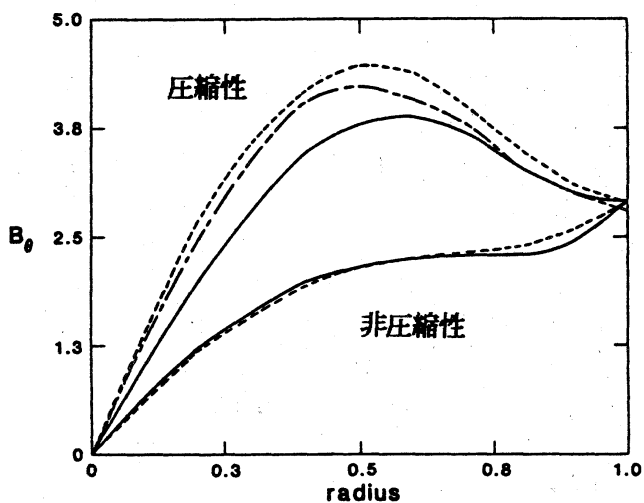


図3  $B_\theta$ の分布(ref.3)

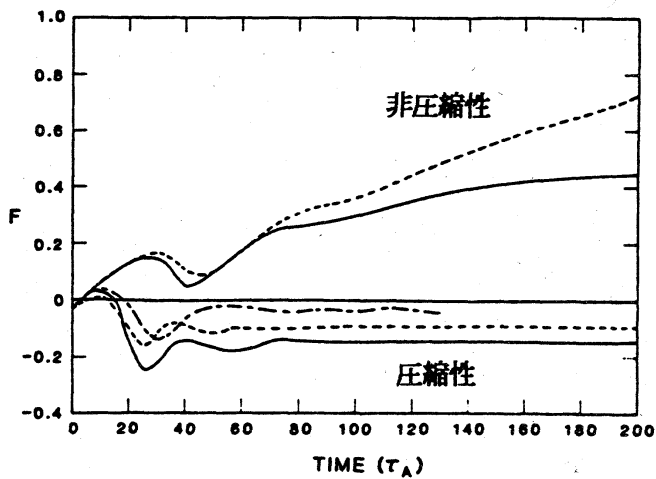


図4  $B_z$ の時間発展( $r=1$ , ref.3)

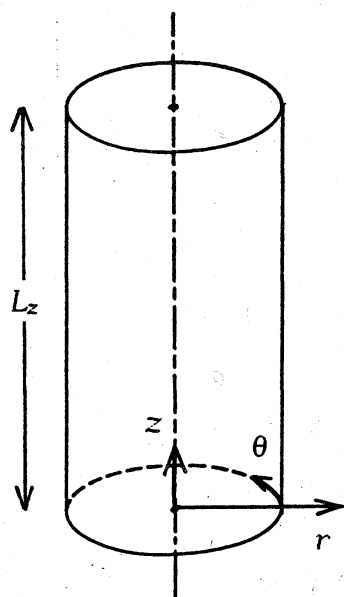


図5 座標系

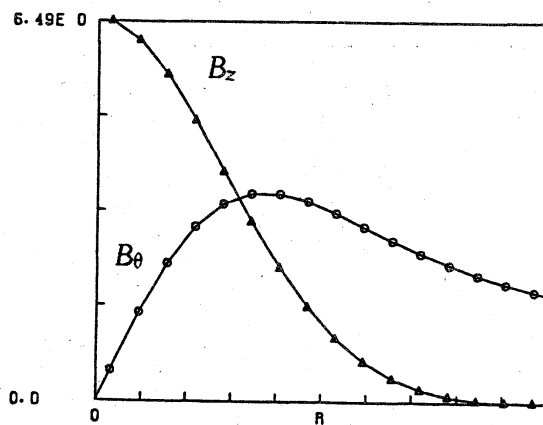


図6 t=0 の平均磁場

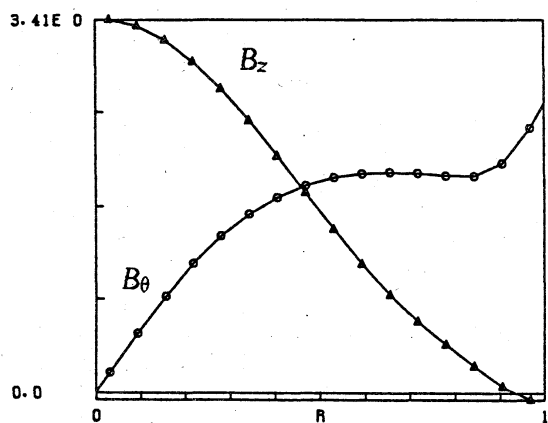
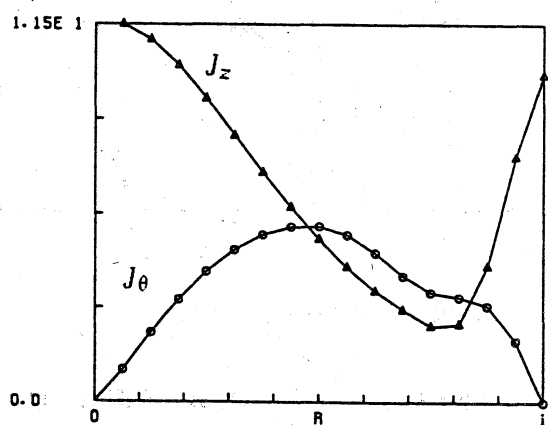


図7 (a) 平均磁場分布



(b) 平均電流分布

( $\nu=0.04, \lambda=0.002, C_v=C_B=C_{B2}=0, t=48$ )

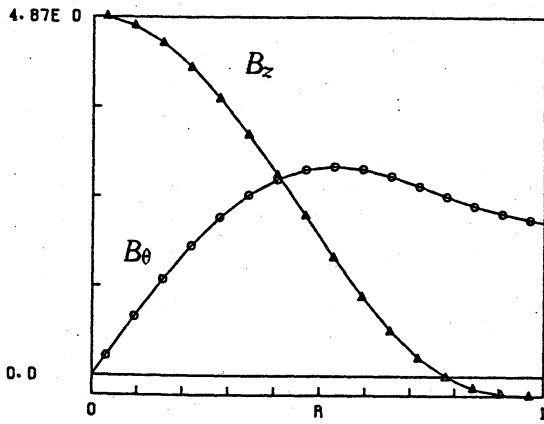
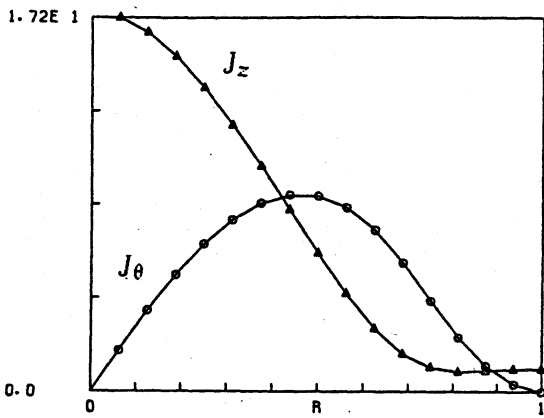


図8 (a) 平均磁場分布



(b) 平均電流分布

( $\nu = \lambda = 0, C_v = 2, C_B = 0.5, C_{B2} = 0.97, t = 240$ )

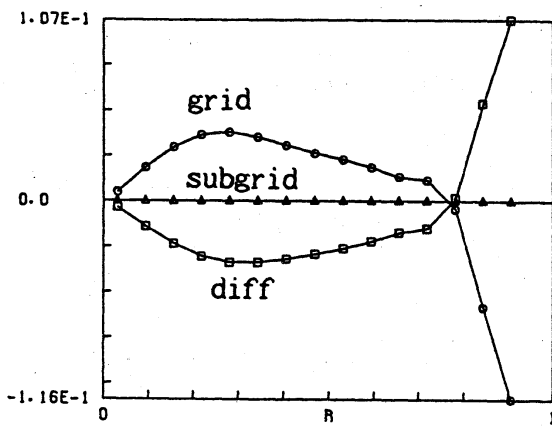


図9  $B_\theta$  のバランス

( $\nu = 0.04, \lambda = 0.002, C_v = C_B = C_{B2} = 0, t = 48$ )

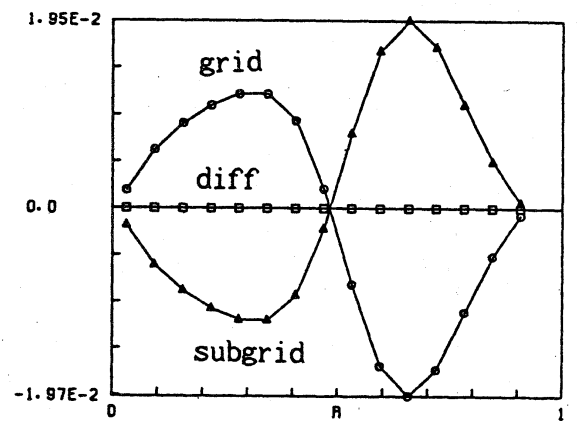


図10  $B_\theta$  のバランス

( $\nu = \lambda = 0, C_v = 2, C_B = 0.5, C_{B2} = 0.97, t = 240$ )

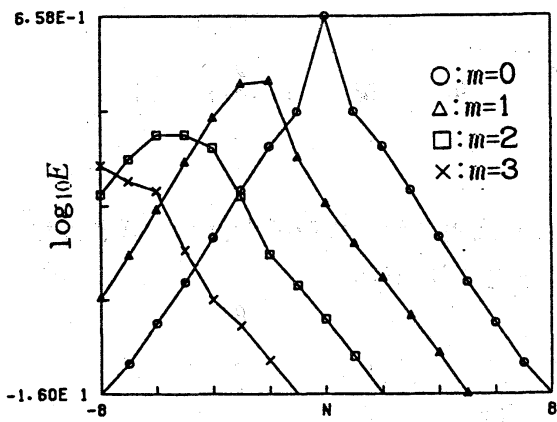


図11 磁場のエネルギースペクトル( $C_{B2}=0.97$ )

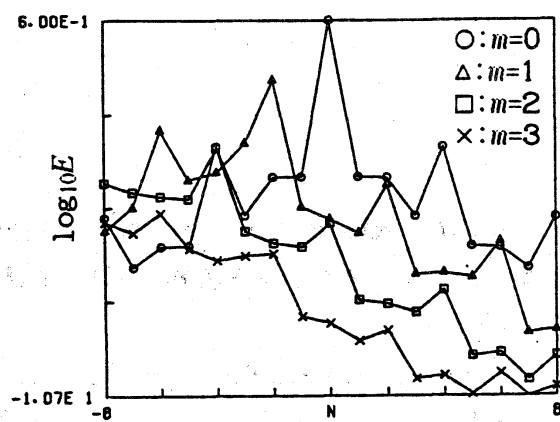


図12 磁場のエネルギースペクトル( $C_{B2}=1$ )

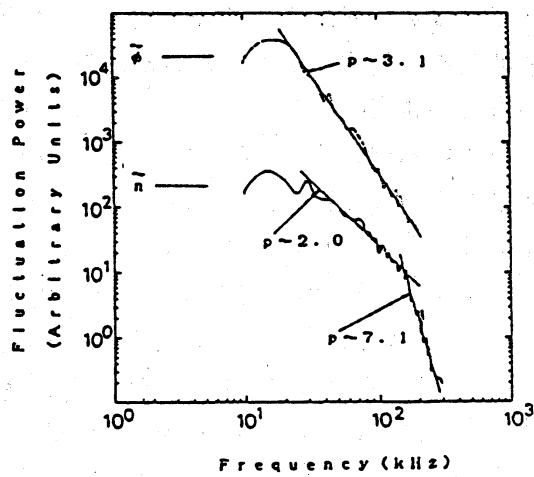


図13 密度と電位のスペクトル(ref.9)