数理解析研究所講究録
第681巻 1989年 90-102

桜井氏の見付けた微分方程式の局所解について

九大 理 山宮茂樹 (Shigeki Yamamiya)

九州大学の桜井氏が見付けた微分方程式の確定特異点の上での正則解を求めたい。これは、その中間報告である。

1. Gauss と Appell の超幾何級数および超幾何微分方程式

Gaussの超幾何級数とは次のものである。

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha,m)(\beta,m)}{(\gamma,m)(1,m)}x^m \qquad \gamma\neq 0,-1,-2,\cdots$$

xは複素変数 α,β,γ は複素パラメータ。

記号(a,k)の意味は $a\neq 0$ として $(a,0)=1$

$$(a,k)=a(a+1)\cdots(a+k-1) \qquad k=1,2,\cdots$$

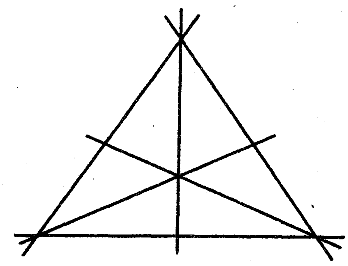
Gaussの超幾何級数の二変数への拡張として Appell の4つの超幾何級数があるが、その内の2つ、F_1とF_4を考える。

F_1とF_4はそれぞれ次の形、

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x_1,x_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}x_1^m x_2^n$$

$$F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma',x_1,x_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m+n)}{(\gamma,m)(1,m)(\gamma',n)(1,n)}x_1^m x_2^n$$

F1とF4の満たす偏微分方程式系をEF1、EF4と書く事にする。これらは、$\mathbb{CP}^2$上の方程式系と考える事が出来る。$\mathbb{CP}^2$の同次座標を(x, y, z)とする。

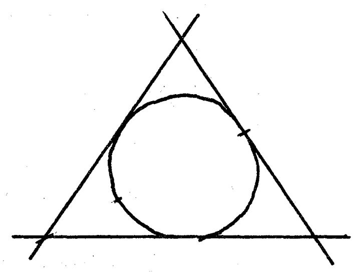


EF1は$\mathbb{CP}^2$上

$H_1=\{x=0\}$、$H_2=\{y=0\}$　$H_3=\{z=0\}$

$H_4=\{x=y\}$　$H_5=\{y=z\}$　$H_6=\{z=x\}$

で確定特異点を持つ、解空間が3次元となる方程式系である。



EF4は$\mathbb{CP}^2$上

H_1、H_2、H_3、$H_7=\{(x+y-z)^2-4xy=0\}$

で確定特異点を持つ、解空間が4次元となる方程式系である。

EF4に、ある微分方程式を一つ付け加えて、パラメータ間に、$\beta=\gamma+\gamma'-1$ なる関係を入れると、それは F4を解に持つ解空間が3次元の方程式系となる。この系を REF4 と書く事にする。[M. Kato]

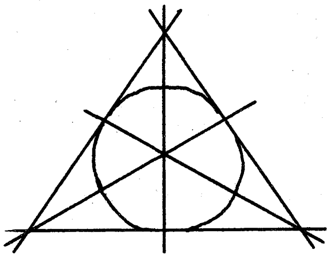
2、桜井氏が見付けた方程式系 [K. Sakurai]

ここで扱う方程式系は、$\mathbb{CP}^2$上で定義され、パラメータ s^1, s^4, s^7 を持つ。この系を$E(s^1,s^4,s^7)$と書く。(略して

E(s)とも書く。）先程の$\mathbb{CP}^2$の同次座標を使い$(x_1, x_2)(=X)$ $=(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$と置き、未知関数を$u$とすればE(s)は次の通り

$$E(s)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{2} P_{ij}^{k}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + P_{ij}^{0}(x)\,u \qquad i,j=1,2$$

この4つの方程式の内、$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$と$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}$を含む方程式は同一。各$P_{ij}^{k}$は、パラメータ$s^1, s^4, s^7$、変数$x_1, x_2$に関する有理式の形をしている。E(s)は$x_1, x_2$に関して対称であり、§1の記号を使えば、$\bigcup_{i=1}^{7} H_i$で確定特異点を持つ。



また、E(s)は可積分条件を満たす。

$$\underset{def}{\Longleftrightarrow}\ \text{解空間が3次元}$$

$$\Longleftrightarrow\ s^7(6s^1-3s^4-2s^7+1)=0$$

ゆえに パラメータs^1, s^4, s^7の間には、関係がある。

E(s)は normal form

$$\underset{def}{\Longleftrightarrow}\ \sum_{j=1}^{2} P_{ij}^{j}(x) = 0 \qquad i=1,2$$

EF1とREF4の未知関数をuとして、別の未知関数wと正則関数$a(x)$により解の変換 $u=a(x)\cdot w$ を行なえば、EF1とREF4を normal form に変形出来る。

E(s)は$s^7=0$と置いた時、EF1の normal form のパラメータを特殊にしたものと一致する。

$$E(s^1, s^4, s^7=0) = EF1\left(-3s^1-3s^4-1,\ -\tfrac{3}{2}s^4,\ -\tfrac{3}{2}s^4,\ -3s^1-\tfrac{3}{2}s^4\right)$$

$E(s)$ は $s^4=0$ と置いた時、REF4のnormal formのパラメータを特殊にしたものと一致する。

$$E(s^1, s^4=0, s^7) = REF4(-3s^7-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}s^7, \tfrac{1}{2}-s^7, \tfrac{1}{2}-s^7)$$

3、解の変換、形式解を求める途中で現れる漸化式

$E(s)$ の解を u、別の未知関数 w、

$$H = x_1^{s^1} x_2^{s^1} (x_1-1)^{s^4} (x_2-1)^{s^4} (x_1-x_2)^{s^4} \{x_1^2 + x_2^2 + 1 - 2(x_1+x_2+2x_1x_2)\}^{s^7}$$

として、解の変換 $w=H\cdot u$ を考える。この変換は $s^7=0$ と置けば、EF1のnormal formを、原点で正則なF1を解に持つEF1に変換する。また、$s^4=0$ とすれば、REF4のnormal formを、原点で正則な解F4を持つREF4に変える。以上の事から、この変換を $E(s)$ に行ない、得られた方程式系も、原点で正則な解を持つのではあるまいか。すなわち確定特異点の上で正則な解を持つのではないかと思われる。そこで、この変換して得られた方程式の形式解を求めてみる。

変換された後の $E(s)$ の係数は x_1, x_2, s^1, s^4, s^7 の有理式となり形式解を求める時、不便なので分母をはらい、各係数を多項式の形にしておく。手計算を簡単にする為、$Dx_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1}$、$Dx_2 = x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ で置き換える。この操作の後に得られたものを $RE(s)$ と書く事にする。$E(s)$ は実質的に3つの方程式から

成るので、RE(s) は次の形になる。

$$
\mathrm{RE}(s)\left\{
\begin{aligned}
&\{(x_1+x_2-1)^2-4x_1x_2\}(x_1-x_2)(x_1-1)\,Dx_1Dx_2w \\
&\quad = R_{11}^1 Dx_1 w + R_{11}^2 Dx_2 w + R_{11}^0 w \qquad \cdots ① \\
&\{(x_1+x_2-1)^2-4x_1x_2\}(x_1-x_2)\,Dx_1Dx_2w \\
&\quad = R_{12}^1 Dx_1 w + R_{12}^2 Dx_2 w + R_{12}^0 w \qquad \cdots ② \\
&\{(x_1+x_2-1)^2-4x_1x_2\}(x_1-x_2)(x_2-1)\,Dx_2Dx_2w \\
&\quad = R_{22}^1 Dx_1 w + R_{22}^2 Dx_2 w + R_{22}^0 w \qquad \cdots ③
\end{aligned}
\right.
$$

R_{ij}^k は s^1, s^4, s^7, x_1, x_2 による多項式

RE(s) が原点で正則な解を持つものとして

$$W=\sum_{i,j=0}^{\infty} A(i,j)\,x_1^i x_2^j$$

をRE(s) に代入して $x_1^m x_2^n$ $m,n=0,1,\cdots$ について、まとめる。するとRE(s)の各々の式は、

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} Z_K(m,n)\,x_1^m x_2^n = 0 \qquad K=1,2,3$$

Kは RE(s)の Ⓚ に対応している。よって次を得る。

$$Z_K(m,n)=0 \qquad K=1,2$$

$Z_K(m,n)$ は、m, n, s^1, s^4, s^7 の多項式を係数とする $A(i,j)$ の一次式となり $A(i,j)$ の係数を $B(i,j)$ と置けば

$$Z_K(m,n)=\sum_{\text{有限個の}(i,j)} B(i,j)\,A(i,j)$$

$Z_K(m,n)=0$ は $A(i,j)$ の漸化式になっている。

$Z_1(m,n)=0$ に現れる $A(i,j)$

A(m-4,n)	A(m-3,n)	A(m-2,n)	A(m-1,n)	
	A(m-3,n-1)	A(m-2,n-1)	A(m-1,n-1)	A(m,n-1)
		A(m-2,n-2)	A(m-1,n-2)	A(m,n-2)
			A(m-1,n-3)	A(m,n-3)

$Z_2(m,n)=0$ に現れる $A(i,j)$

A(m-3,n)	A(m-2,n)	A(m-1,n)	
	A(m-2,n-1)	A(m-1,n-1)	A(m,n-1)
		A(m-1,n-2)	A(m,n-2)
			A(m,n-3)

$Z_3(m,n)=0$ に現れる $A(i,j)$

A(m-3,n)	A(m-2,n)	A(m-1,n)	
A(m-3,n-1)	A(m-2,n-1)	A(m-1,n-1)	A(m,n-1)
	A(m-2,n-2)	A(m-1,n-2)	A(m,n-2)
		A(m-1,n-3)	A(m,n-3)
			A(m,n-4)

$Z_K(m,n)=0$ に現れる $A(i,j)$ は、m,n の値により、$i<0$ または $j<0$ となる時は、$A(i,j)=0$ と約束する。

$Z_1(m,n)$ と $Z_3(m,n)$ の間には、次の関係がある。

$$Z_1(m,n) = Z_3(n-1, m+1)$$

ゆえに $Z_k(m,n) = 0 \quad k=1,2$ が本質的である。

$Z_k(m,n) = 0 \quad k=1,2$ に現れる $B(i,j)$ を求める。

$Z_1(m,n) = 0$ に現れる $B(i,j)$

$$B(m-1,n) = -m^2 + 3\,m\,S1 + -\,m\,S4 + 3\,m - \frac{3}{2}\,n\,S4 - 3\,S1 - \frac{3}{2}\,S4 - 2$$

$$B(m,n-1) = m\,(m - 3\,S1 - 1)$$

$$B(m-2,n) = 3\,m^2 - 21\,m\,S1 - \frac{3}{2}\,m\,S4 - 17\,m - 12\,n\,S1 + 9\,n\,S4 - 2\,n + 54\,S1^2 - \frac{27}{2}\,S1\,S4 + 63\,S1 + 24$$

$$B(m-1,n-1) = -m^2 + 15\,m\,S1 - 6\,m\,S4 + 5\,m + 12\,n\,S1 - \frac{3}{2}\,n\,S4 + 2\,n - 54\,S1^2 + \frac{27}{2}\,S1\,S4 - 48\,S1 + \frac{21}{2}\,S4 - 8$$

$$B(m,n-2) = 2\,m\,(-m + 3\,S1 + 1)$$

$$B(m-3,n) = -3\,m^2 + 33\,m\,S1 - \frac{3}{2}\,m\,S4 + 25\,m + 12\,n\,S1 - \frac{15}{2}\,n\,S4 + 2\,n - 108\,S1^2 + 27\,S1\,S4 - 141\,S1 + \frac{21}{2}\,S4 - 52$$

$$B(m-2,n-1) = 3\,m^2 - 33\,m\,S1 + 12\,m\,S4 - 19\,m + 54\,S1^2 - 27\,S1\,S4 + 87\,S1 - 30\,S4 + 28$$

$$B(m-1,n-2) = -m^2 + 3\,m\,S1 - \frac{9}{2}\,m\,S4 + 3\,m - 12\,n\,S1 + \frac{3}{2}\,n\,S4 - 2\,n + 54\,S1^2 + 42\,S1 + \frac{3}{2}\,S4 + 4$$

$$B(m,n-3) = m\,(m - 3\,S1 - 1)$$

$$B(m-4,n) = m^2 - 15\,m\,S1 + \frac{3}{2}\,m\,S4 - 11\,m + 54\,S1^2 - \frac{27}{2}\,S1\,S4 + 81\,S1 - 9\,S4 + 30$$

$$B(m-3,n-1) = -3\,m^2 + 21\,m\,S1 + 6\,m\,S4 + 23\,m - 12\,n\,S1 + \frac{15}{2}\,n\,S4 - 2\,n - \frac{81}{2}\,S1\,S4 - 51\,S1 - \frac{69}{2}\,S4 - 40$$

$$B(m-2,n-2) = 3\,m^2 - 9\,m\,S1 - \frac{21}{2}\,m\,S4 - 15\,m + 12\,n\,S1 - 9\,n\,S4 + 2\,n - 54\,S1^2 + \frac{135}{2}\,S1\,S4 - 27\,S1 + 54\,S4 + 12$$

$$B(m-1,n-3) = -m^2 + 3\,m\,S1 + 3\,m\,S4 + 3\,m + \frac{3}{2}\,n\,S4 - \frac{27}{2}\,S1\,S4 - 3\,S1 - \frac{21}{2}\,S4 - 2$$

$Z2(m,n)=0$ に現れる $B(i,j)$

$$B(m-1,n) = n\,(m - -\,S4 - 1)$$

$$B(m-2,n) = n\,(-2\,m + 6\,S1 + 5)$$

$$B(m-3,n) = n\,(m - 6\,S1 + -\,S4 - 4)$$

$$B(m,n-1) = m\,(-n + -\,S4 + 1)$$

$$B(m-1,n-1) = 6\,m\,S1 - 6\,m\,S4 + m - 6\,n\,S1 + 6\,n\,S4 - n$$

$$B(m-2,n-1) = -3mn + 18\,m\,S1 - \frac{15}{2}\,m\,S4 + 6m + 24\,n\,S1 - 9\,n\,S4 + 10\,n - 108\,S1^{2} + 54\,S1\,S4 - 102\,S1 + 36\,S4 - 20$$

$$B(m,n-2) = m\,(2n - 6\,S1 - 5)$$

$$B(m-1,n-2) = 3mn - 24\,m\,S1 + 9\,m\,S4 - 10\,m - 18\,n\,S1 + \frac{15}{2}\,n\,S4 - 6\,n + 108\,S1^{2} - 54\,S1\,S4 + 102\,S1 - 36\,S4 + 20$$

$$B(m,n-3) = m\,(-n + 6\,S1 - - S4 + 4)$$

E(1)のパラメータの関係より $S^7=0$ でない一般の場合には $6S^1-3S^4-2S^7+1=0$ となっている。B(i,j)は S^1、S^4、S^7 を含んでいるが、この関係を使い、各B(i,j)から S^7 を消去してある事に注意する。

4、漸化式による係数A(i,j)の決まり方、A(i,j)の形

A(0,0)=1と置いた時、各Zk(m,n)=0によるA(i,j)の決まり方を見る。次の事がわかる。

パラメータに条件を付ければ、Z1(m,n)=0 m,n=0,1,… のみを使い、仮定 A(0,0)=1 から出発して、次に示す順序で全てのA(i,j)を決定する事が出来る。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A(0,4) & & & & & \\
A(0,3) & A(1,3) \arrow[ul] & & & & \\
A(0,2) & A(1,2) \arrow[ul] & A(2,2) \arrow[ul] & & & \\
A(0,1) & A(1,1) \arrow[ul] & A(2,1) \arrow[ul] & A(3,1) \arrow[ul] & & \\
A(0,0) \arrow[r] & A(1,0) \arrow[r] \arrow[ul] & A(2,0) \arrow[r] \arrow[ul] & A(3,0) \arrow[r] \arrow[ul] & A(4,0) \arrow[r] \arrow[ul] & {}
\end{tikzcd}$$

右の方へ同じ様に繰り返す

これらの事を示す。

$Z_1(m,n)=0$ は $A(m-1,n)$ を定める漸化式とみなす事にする。

$\{A(i,j) : i,j=0,1,\cdots\}$ を $l\ (=0,1,\cdots)$ による集合、

$\{A(i,j) : i+j=l\}$ に分け、l に関する帰納法で、全ての $A(i,j)$ が定まる事を示す。

$l=0$ の時、仮定より $A(0,0)=1$ となっている。

仮に、$i+j\leq l$ を満たす $A(i,j)$ が定まっているものとすれば次に、$i+j=l+1$ となる $A(i,j)$ 達が

$$A(l+1,0)\to A(l,1)\to\cdots\to A(1,l)\to A(0,l+1)$$

の順に、定まる。なぜなら、

$Z_1(m,n)=0$ に現れる $A(i,j)$ の並び方（3参照）に注意する。

この漸化式は、$A(m-1,n)$ を定めるが、$A(m-1,n)$ は $A(m,n-1)$ と他の $i+j\leq m+n-2$ を満たす $A(i,j)$ で定まる事がわかる。

さて、$A(l+1,0)$ は $A(l+1,0)$ を定める漸化式 $Z_1(l+2,0)=0$ に、仮定で既に定まっている $A(i,j)$ を代入すれば定まる。

$A(l,1)$ も、これを定める漸化式 $Z_1(l+1,1)=0$ に 今定めた、$A(l+1,0)$ と仮定で定まっている $A(i,j)$ を代入すれば定まる。

以上方法を　上で記した順序通り繰り返せば良い。

しかし以上の議論は $Z_1(m,n)=0$ における $A(m-1,n)$ の係数が零となれば使えない。$A(m-1,n)$ の係数は、

$$3(m-1)s^1+\frac{3}{2}(m-n-1)s^4-m^2+3m-2$$

であるから、$E(\alpha)$ のパラメータ s^7 を $s^7=3s^1-\frac{3}{2}s^4+\frac{1}{2}$ とおいて消去したもの $E(s^1,s^4,s^7=3s^1-\frac{3}{2}s^4+\frac{1}{2})$ は、パラメータ空間 $\{(s^1,s^4)\in\mathbb{C}^2\}$ から 次の所を除いた部分で、この議論が使える。

$$\bigcup_{m,n=0}^{\infty}\left\{(s^1,s^4)\in\mathbb{C}^2 \,\middle|\, 3(m-1)s^1+\frac{3}{2}(m-n-1)s^4-m^2+3m-2=0\right\}$$

$Z_1(m,n)=0$ が $A(m,n-1)$ を定める漸化式と考えても、$A(i,j)$ は全て定まる。

$Z_1(m,n)=0$ の時と同様に $Z_2(m,n)=0$ が $A(m-1,n)$ を定める漸化式であるとする。しかし、この時 $B(m-1,n)$ が n を因数として持つ為 s^1,s^4,s^7 がいかなる値を取ろうとも $n=0$ となれば $B(m-1,0)=0$ となり、$A(m-1,0)$ は定まらない。すなわち、$A(i,0)$ $i=1,2,\cdots$ が定まらない。$Z_2(m,n)=0$ が $A(m,n-1)$ を定める漸化式としても、同じ理由で 今度は $A(0,j)$ $j=1,2,\cdots$ が定まらない。

$Z_1(m,n)=0$ $m,n=0,1,\cdots$ から実際に $A(i,j)$ をいくつか

求めてみる。求めたものは $A(i,j)$ は i,j に関して対称、$A(i,0)$ の形をした係数は推測出来る。対称性は $E(s)$ の対称性からわかる。$A(i,0)$ の形は次の様に推測される。

$$A(i,0)=\frac{(-9s^{1}-2,i)(-6s^{1}+\frac{3}{2}s^{4}-1,i)}{(-3i-\frac{3}{2}s^{4},i)(1,i)}$$

$A(i,0)$ $i=0,1,\cdots$ は漸化式 $Z_1(m,0)=0$ $m=1,2,\cdots$ から定まっている。$Z_1(i,0)=0$ は $A(i-1,0)$、$A(i-2,0)$ $A(i-3,0)$ $A(i-4,0)$ より成る一次式であり、これに、上で推測した $A(i,0)$ の i を $i-1$、$i-2$、$i-3$、$i-4$ にかえたものを代入すれば $Z_1(i,0)=0$ となり漸化式を満たす。

ここまでの話は、正則解があるとして、形式解を求める為に形式解の係数が満たす漸化式を導いた。この漸化式より各係数は $A(0,0)=1$ という仮定から出発し、全てが定まる事がわかった。しかし矛盾なく定まるかどうかは別問題である。もし矛盾なく定まれば、その形式解を $x_2=0$ と置くと上の $A(i,0)$ を係数とする一変数の級数が現れるが、これは Gauss の超幾何級数である。

求めてみた他の $A(i,j)$、すなわち $j\neq 0$ なるものは、分母に関しては $A(i+j,0)$ に等しい。分子は、いくつかに因数分解されるが、$A(i+j,0)$ と同じ因数がある他は i,j が大きくなれば次数も上がっていく推測不可能な因子も含む。

$\sum_2(m,n)=0$ はきれいな形になっている。例えば、$B(m-1,n)$ と $B(m,n-1)$ は、m と n に関して反対称、すなわち、$B(m-1,n)$ の m と n を入れかえると $-B(m,n-1)$ に等しい。

3．の $\sum_2(m,n)=0$ に現れる $A(i,j)$ を並べて書いてある所で $A(i,j)$ は直角三角形に並んでいる。この直角三角形の直角を二等分する線に関して、対称に位置する $A(i,j)$ の係数が、反対称の関係になっている。また、$m=n$ とおけば、$A(i,j)$ が i,j に関して対称である事に注意すると、$\sum_2(m,m)$ に現れる各項は、たがいに打ち消し合い消えてしまう。

文献

[M. kato] 加藤満生

Appell's F4 with $b=c+c'-1$ （プレプリント）

[K. Sakurai] 桜井幸一、吉田正章

Fucksian systems associate with the $\mathbb{P}^2(F_2)$ - arrangement