110
数理解析研究所講究録
第 681 巻 1989 年 110-122

Lauricella の超幾何関数 F_D の変換公式と Garnier 系

東大教養　木村弘信 (Hironobu Kimura)

§1. F_D の変換公式　$m=(m_1,\cdots,m_n)\in\mathbb{N}_0^n$ に対し、$|m|=m_1+\cdots+m_n$ と書き、変数 $s=(s_1,\cdots,s_n)\in\mathbb{C}^n$ に対し、$s^m=s_1^{m_1}\cdots s_n^{m_n}$ と略記する。複素パラメータ $v=(v_0,v_1,\cdots,v_n,v_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+2}$ が与えられたとき、超幾何級数 $F_D(v,s)$ は

$$F_D(v,s)=\sum_{m\in\mathbb{N}_0^n}\frac{(v_0,|m|)(v_1,m_1)\cdots(v_n,m_n)}{(v_{n+1},|m|)(1,m_1)\cdots(1,m_n)}s^m$$

で与えられる。ここで $(\alpha,k)=\Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha)$ である。$v_{n+1}\notin\mathbb{Z}_{<0}$ ならば、$F_D(v,s)$ は $\max_i|s_i|<1$ で収束し、そこで正則関数をあらわす。$F_D(v,s)$ は次の完全積分可能な系：

$$(1)\qquad s_i(1-s_i)\partial_i^2u+(1-s_i)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}s_j\partial_i\partial_ju+[v_{n+1}-(v_0+v_i+1)s_i]\partial_iu$$
$$-v_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}s_j\partial_ju-v_0v_iu=0\qquad(i=1,\cdots,n)$$

を満たし、$F_D(v,s)$ は $0\in\mathbb{C}^n$ における正則な解で初期値 1 をとるものとして特徴づけられる。(1) の解空間を $\mathcal{S}(v)$ と書こう。

Def. 系(1)の変換とは、$l:(s,u)\longrightarrow(S,U)$, $s\rightarrow S$ は双有理変換, $u\rightarrow U$ はゲージ変換, 及び $l_*:\mathbb{C}^{n+2}\rightarrow\mathbb{C}^{n+2}$ で
$l\cdot S(v)=\mathcal{S}(l_*(v))$, $^\forall v\in\mathbb{C}^n$ が成立するものを言う。

さて、l_* が $\mathbb{C}^{n+2}$ の線形変換となるものの中で、次のものが知られている。

Prop.1[5] 系(1)の変換のなす群 H で、$(n+3)$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{n+3}$ に同型なものが存在する。

具体的には H の generators として次のものがとれる。
$H=\langle l_0, l_1, \cdots, l_n, l_{n+1}\rangle$ としたとき

$$l_0:\quad S_j=\frac{1}{s_j},\ U=s_1^{-v_1}\cdots s_n^{-v_n}u$$

$l_m\ (m=1,\cdots,n)$:

$$S_j=\begin{cases}\dfrac{s_m-s_j}{s_m-1} & (j\neq m)\\[2ex] \dfrac{s_m}{s_m-1} & (j=m)\end{cases},\quad U=(1-s_m)^{-v_0}u$$

l_{n+1}:

$$S_j=\frac{s_j}{s_j-1}\qquad U=(1-s_1)^{-v_1}\cdots(1-s_n)^{-v_n}u$$

この小論の目的は、Hが、パンルヴェ方程式P_{VI}の偏微分方程式系への拡張であるガルニエ系G_nの対称性より自然に得られることを注意することである。

§2. ガルニエ系

$\mathbb{CP}^1$上のFuchs型微分方程式

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{2}$$

を考える。特異点は$S_t = \{t_0 = 0, t_1, \cdots, t_n, t_{n+1} = 1, t_{n+2} = \infty, \lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$で、このうち$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$は見掛けの特異点とする。各特異点における特性指数をGauge変換によりnormalizeすることにより、(2)のRiemann schemeは

$$\left\{\begin{matrix} x = t_i & x = \lambda_k, & x = \infty \\ 0 & 0 & \nu \\ \theta_i & 2 & \nu + \theta_\infty \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \cdots, n+1 \\ k = 1, \cdots, n \end{matrix}$$

で与えられると仮定する。ここで、Fuchsの関係式を用いれば$\nu = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=0}^{n+2} \theta_i\right)$である。簡単な計算により、( )の係数は次のように書ける：

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1 - \theta_i}{x - t_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \lambda_k}$$

$$B(x) = \frac{\kappa}{x(x-1)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i(t_i-1)K_i}{x(x-1)(x-t_i)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k(\lambda_k-1)\mu_k}{x(x-1)(x-\lambda_k)}$$

ここで $\kappa = \nu(\nu+\theta_\infty)$ である。$x=\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ が見掛けの特異点であることより、K_i 達は (t,λ,μ) の有理関数として次で定まる：

$$K_i = M_i \sum M^{k,i} \left\{ \mu_k^2 - \mu_k \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\theta_j}{\lambda_k - t_j} + \frac{\kappa}{\lambda_k(\lambda_k-1)} \right\}$$

ここで、$M_i, M^{k,i}$ は $T(x) = \prod_{i=0}^{n+1}(x-t_i)$，$\Lambda(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k)$ を用いて

$$M_i = -\frac{\Lambda(t_i)}{T'(t_i)}, \quad M^{k,i} = \frac{T(\lambda_k)}{(\lambda_k - t_i)\Lambda'(\lambda_k)}$$

で定義される。$\lambda_1\cdots,\lambda_n,\mu_1,\cdots,\mu_n$ は特性指数からは定まらない量である。さて、(2) のモノドロミー保存変形を考えよう。すなわち、(2) で $t=(t_1,\cdots,t_n)$ を動かしたとき、そのモノドロミー表現で t によらないものが存在するように λ,μ を定めることを考える。

Th.2 [6]. (2) のモノドロミー保存変形は、次の完全積分可能な、ハミルトン系で記述される：

$$G_n \qquad \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} = \frac{\partial K_i}{\partial \mu_j}, \quad \frac{\partial \mu_j}{\partial t_i} = -\frac{\partial K_i}{\partial \lambda_j} \qquad (i,j=1,\cdots,n)$$

ハミルトン系 G_n を ガルニエ系 と呼ぶ。

以下で我々が F_D との関連を考察するのは、G_n ではなく、G_n より，適当な有理変換を通じて得られる方程式系である。有理変換を考える理由は次のように説明できる。G_n の $n=1$ の場合に相当する Painlevé 方程式 P_{VI} は動く分岐点をもたないという性質（Painlevé property）により特徴づけられる方程式であるが $n \geq 2$ の場合、G_n は動く代数的分岐点を持つ [6]。そこで、これを解消するために、変換 $\Phi : (t, \lambda) \longrightarrow (s, q)$ を

$$s_i = \frac{t_i}{t_i - 1}, \quad q_i = -t_i M_i \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

で定義する。q_i 達は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の対称関数である。更に

$$\begin{array}{ccccccc}
 & B\times T^*\mathbb{C}^n & \xleftarrow{\ \Phi^\#\ } & B\times T^*\mathbb{C}^n & \ni (s, q, p) \\
(t,\lambda,\mu) & \downarrow & \circlearrowright & \downarrow & \\
\downarrow & B\times\mathbb{C}^n & \xrightarrow{\ \Phi\ } & B\times\mathbb{C}^n & \downarrow \\
(t,\lambda) & & \longrightarrow & (s, q). &
\end{array}$$

とする。$T^*\mathbb{C}^n$ の fiber 方向での写像は逆がとれて $\Phi_* = (\Phi^\#)^{-1}$ が構成でき，p が t, λ, μ の有理関数として定まる。

Th.3 [2]　正準変換 Φ_* により G_n は次のハミルトン系に移される。

$$G_n: \quad \frac{\partial q_j}{\partial s_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial s_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_j} \quad (i, j = 1, \cdots, n)$$

$$H_i = \frac{1}{s_i(s_i-1)}\left[\sum_{j,k=1}^{n} E^i_{jk}(s, q)\, p_j p_k - \sum_{j=1}^{n} F^i_j(s, q) p_j + \kappa q_i\right]$$

ここで $E^i_{jk}, F^i_j \in \mathbb{C}(s)[q]$ は $E^i_{jk} = E^i_{kj} = E^j_{ik}$, $F^i_j = F^j_i$ を満たす。—

具体的には E^i_{jk}, F^i_j は次で与えられる。

$$E^i_{jk} = \begin{cases} q_i q_j q_k & (i \neq j \neq k \neq i) \\ q_i q_j (q_j - \Gamma^j_i) & (i \neq j = k) \\ q_i(q_i - 1)(q_i - s_i) - \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} S^i_k q_i q_k & (i = j = k) \end{cases}$$

$$F^i_j = \begin{cases} \eta q_i q_j - \theta_j \Gamma^j_i q_i - \theta_i \Gamma^i_j q_j & (i \neq j) \\ (\theta_0 - 1) q_i (q_i - 1) + \theta_{n+1} q_i (q_i - s_i) + \theta_i (q_i - 1)(q_i - s_i) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \{\theta_k q_i (q_i - \Gamma^i_k) - \theta_i S^i_k q_k\} & (i = j) \end{cases}$$

$$\Gamma^i_j = \frac{s_i(s_j - 1)}{s_j - s_i} \qquad S^i_j = \frac{s_i(s_i - 1)}{s_i - s_j}$$

$$\eta = \sum_{i=0}^{n+1} \theta_i - 1$$

この結果と、Miwa [4], Malgrange [3] の結果より

系　$\mathfrak{G}_n$ は Painlevé property を満たす。

§3. $\mathfrak{G}_n$ の対称性.

$\mathfrak{G}_n$ の対称性とは、$(S, \mathfrak{q}, P)$ の双有理的な正準変換のなす群であって、パラメータ $\theta = (\theta_0, \cdots, \theta_{n+1}, \theta_{n+2})$ の変換を除いて、$\mathfrak{G}_n$ を不変にするものを言う。すなわち、$l : (S, \mathfrak{q}, P) \longrightarrow (S, Q, P)$ を変換とすると、$l \cdot \mathfrak{G}_n(\theta) = \mathfrak{G}_n(l_* \theta)$ となるものである。

Prop.4　$\mathfrak{G}_n$ の対称性として、$(n+3)$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{n+3}$ に同型なものが存在する。

証明の概略.　線形方程式 (2) において、$\mathbb{CP}^1$ の正則変換で S_t を $\{0, 1, \infty, t_1^*, \cdots, t_n^*, \lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*\}$ に移す。例えば ∞ を固定し、0 と 1 を入れ換える変換は、$z = 1 - x$ で与えられる。方程式 (1) が

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + P_1(z)\frac{dy}{dz} + P_2(z)y = 0$$

に移ったとすると、(3) の特異点は $\{0, 1, \infty, 1-t_1, \cdots,$

$1-t_n, 1-\lambda_1, \cdots, 1-\lambda_n\}$である。そこで、これらを$\{0, 1, \infty, t_1^*, \cdots, t_n^*, \lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*\}$とおき、更に、

$$\mu_i^* = \operatorname*{Res}_{z=\lambda_i^*} P_2(z) \quad , \quad K_i^* = -\operatorname*{Res}_{z=t_i^*} P_2(z)$$

とする。(2)のモノドロミー保存変形は、自然に(3)のそれを誘導し、変形は再びG_nで与えられる。但しパラメータ達は置換$\ell_*(\theta_0, \cdots, \theta_{n+2}) = (\theta_{n+1}, \theta_1, \cdots, \theta_n, \theta_0, \theta_{n+2})$を受ける。このようにして、$n+3$コの特異点の入れ換えに対応して、$\mathfrak{S}_{n+3}$に同型な群が構成される。これらを$\Phi_*$によって$G_n$の変換群にもち上げるのである。略証終

具体的には、群を$F = \langle \sigma_0, \cdots, \sigma_{n+1} \rangle$と生成元で書くと、$\sigma_i$達は次で与えられる。

$$\sigma_0 : \quad S_j = \frac{1}{s_j} \quad , \quad Q_j = \frac{q_j}{s_j} \quad , \quad P_j = s_j p_j$$

$$\sigma_{n+1} : \quad S_j = \frac{s_j}{s_j - 1} \quad , \quad Q_j = \frac{q_j}{\omega_1 - 1} \quad , \quad P_j = -(\omega_1 - 1)\left\{\nu - p_j + \sum_{a=1}^{n} q_a p_a\right\}$$

$\sigma_m \ (m = 1, \cdots, n)$:

$$S_j = \begin{cases} \dfrac{s_m - s_j}{s_m - 1} & (j \neq m) \\[2ex] \dfrac{s_m}{s_m - 1} & (j = m) \end{cases}$$

$$Q_j = \begin{cases} \dfrac{q_j}{\Gamma^j_m} & (j \neq m) \\ -(\omega_s - 1)\dfrac{s_m}{s_m - 1} & (j = m) \end{cases}$$

$$P_j = \begin{cases} \Gamma^j_m \left(p_j - \dfrac{s_m}{s_j} p_m \right), & (j \neq m) \\ (s_m - 1) p_m & (j = m) \end{cases}$$

ここで　$\omega_1 = \sum_{a=1}^{n} q_a$,　$\omega_s = \sum_{a=1}^{n} \dfrac{q_a}{s_a}$.

特に F は次の元を含むことが計算で分る。

$\tau_m = (\sigma_0 \circ \sigma_m) \circ \sigma_{n+1} \circ (\sigma_0 \circ \sigma_m)^{-1}$　$(m = 1, \cdots, n)$:

$$S_j = \begin{cases} \dfrac{s_j}{s_m} \\ \dfrac{1}{s_m} \end{cases}, \quad Q_j = \begin{cases} -\dfrac{q_j}{q_m}, \\ \dfrac{1}{q_m}, \end{cases} \quad P_j = \begin{cases} -q_m p_j \\ q_m \left(1 - \sum_{a=1}^{n} q_a p_a\right) \end{cases}.$$

§4. G_n と F_D の関係

ここでは、G_n のパラメータ $\theta = (\theta_0, \cdots, \theta_{n+1}, \theta_\infty)$ が $\nu(\nu + \theta_\infty) = 0$ を満たすとき、G_n の特殊解として、F_D があらわれることを示す。

$\mathbb{P}^n$ 上のアファインバンドル $\overset{\circ}{\Sigma}$ を次のように定義する。$(z_0; z_1, \cdots, z_n)$ を $\mathbb{P}^n$ の斉次座標とし、$U_i = \{$

$z\in \mathbb{P}^n \mid z_i\neq 0\}$ における非斉次座標を $z^i=(z^i_0,\dots,z^i_{i-1},z^i_{i+1},\dots,z^i_n)$, $z^i_k=z_k/z_i$ とする。$U_i\times\mathbb{C}^n\ni(z^i,\zeta^i_0,\dots,\zeta^i_{i-1},\zeta^i_{i+1},\dots,\zeta^i_n)$ と $U_j\times\mathbb{C}^n\ni(z^j,\zeta^j_0,\dots,\zeta^j_{j-1},\zeta^j_{j+1},\dots,\zeta^j_n)$ を次の関係があるときに同一視する。

$$z^i_k=\begin{cases} z^j_k/z^j_i & (k\neq i,j) \\ 1/z^j_i & (k=j) \end{cases}$$

$$\zeta^i_k=\begin{cases} z^j_i\,\zeta^j_k & (k\neq i,j) \\ z^j_i\left(\nu-\sum_{a=1}^{n} z^j_a\zeta^j_a\right) & (k=j) \end{cases}$$

$\bigcup_{i=0}^{n} U_i\times\mathbb{C}^n$ を上の同一視によってはり合せた多様体を $\overset{\circ}{\Sigma}_\nu$ と書く。$(U_0\times\mathbb{C}^n)\times B\cong\mathbb{C}^{2n}\times B$ に注意し、$\mathbb{G}_n$ が $(U_0\times\mathbb{C}^n)\times B$ で定義されているものと考える。この時、τ_m $(m=1,\dots,n)$ によって $\mathbb{G}_n$ が再び $\mathbb{G}_n$ に移されることに注意すれば次の事が分る。

<u>Prop.5.</u> $\mathbb{G}_n$ は $\overset{\circ}{\Sigma}_\nu\times B$ 上のハミルトン系に延長される。更に、ハミルトニアンは $\overset{\circ}{\Sigma}_\nu$ の座標についての多項式である。

<u>Rem.</u> $\nu=0$ のとき $\overset{\circ}{\Sigma}_0\cong T^*\mathbb{P}^n$。従って $\mathbb{P}^n$ に同型な部分多様体（零切断）をもつ。

G_n と F_D の関係は次で与えられる。

<u>Prop. 6.</u> $\theta \in \mathbb{C}^{n+3}$ が $\kappa = \nu(\nu+\theta_\infty) = 0$ を満たすとき、G_n は次の特殊解をもつ：

$$\begin{cases} q_i(s) = \eta^{-1} s_i(s_i - 1)\dfrac{\partial}{\partial s_i} \log \prod_{k=1}^{n} (s_k - 1)^{\theta_k}\, u(s) \\ p_i(s) = 0 \quad 。\end{cases}$$

ここで $u(s)$ は方程式系 (1) の任意の解 $\in \mathcal{S}(1-\theta_{n+1}, \theta_1, \cdots, \theta_n, \sum_{k=0}^{n}\theta_k)$.

<u>証明の概略.</u> G_n において $p_i = 0$ $(i=1, \cdots, n)$ とおくとハミルトニアン H_i $(i=1, \cdots, n)$ の形から、$(\partial H_i / \partial q_j)(s, q, 0) = 0$。従って G_n の第2方程式は自明に成立する。G_n は

(4) $\dfrac{\partial q_j}{\partial s_i} = -F_j^i(s, q)$ $\qquad (i, j = 1, \cdots, n)$

に reduce する。一方、Prop. とそのRemarkにより (4) は $\mathbb{P}^n \times B$ 上の方程式に延長され、$s^0 \in B$ で $q(s^0) = q^0 \in \mathbb{P}^n$ なる解 $q(s; s^0, q^0)$ は、

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ \Psi & & \Psi \\ q^0 & \longmapsto & q(s; s^0, q^0) \end{array}$$

により $\mathbb{P}^n$ の解析自己同型をひきおこす。$\mathbb{P}^n$ の自己同型が $\mathbb{C}^{n+1}$ の線形変換より書かれるから、$q(s; s^0, q^0)$ は線形方程

式の解を用いて書かれるはずであるが、実際、(4) の任意の解 $\Omega(s)$ に対して $\omega=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Omega_i(s)}{s_i(s_i-1)}ds_i$ が closed であることが $F_j=F_i$ より確められることより、$\omega=\eta^{-1}d\log\prod_{k=1}^{n}(s_k-1)^{\theta_k}u(s)$ と $u(s)$ を導入すると、$u(s)$ は方程式 (1) において $v=(1-\theta_{n+1},\theta_1,\cdots,\theta_n,\sum_{k=0}^{n}\theta_k)$ としたものの解であることが分る。　略証終。

§5. F の F_D への作用

群 F の生成元 σ_i $(i=0,1,\cdots,n+1)$ の具体的な形より、パラメータ $\Theta=(\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_{n+1},\theta_\infty)$ が関係式 $\nu=0$ を満たすとき、F の元は $P=0$ を $P=0$ に移すことが分る。よって §4 で構成した $G_n(\Theta)$ の特殊解を再び $G_n(\sigma_*\Theta)$ の特殊解に移す。この事実をまとめて、

Th.7. G_n の対称性の群 F $(\simeq S_{n+3})$ は F_D のみたす方程式系の解空間に作用する。

Rem. F の形より §1 の変換 l_i はすべて F から誘導される変換に含まれる。

参考文献

[1] H. Kimura ; Feuilletage associé au système de Garnier. (preprint).

[2] H. Kimura, K. Okamoto ; On the polynomial Hamiltonian structure of the Garnier systems, J. Math. Pure et appl. 63 (1984) 129–146.

[3] B. Malgrange ; Sur les déformations isomonodromiques I. singularités régulières, Seminaire de l'E.N.S. 1978–1982

[4] T. Miwa ; Painlevé property of monodromy preserving deformation equations and the analyticity of τ-functions, Publ. RIMS 17 (1981) 703

[5] J. Miller ; Encyclopedia of Mathematics, Academic Press. 1977

[6] K. Okamoto ; Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA 1986.