

有限モノドロミ一群をもつ一般化された超幾何方程式

都立大・理 佐々井崇雄 (Takao Sasai)

§ 1. 次の様な大久保 type の微分方程式を考える:

$$(\#) \quad (tI - B) \frac{dx}{dt} = Ax.$$

ここで、 $t \in S$ (Riemann 球)、 $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ で

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} -a_1 & & 0 & 1 \\ & \cdots & & \vdots \\ 0 & & -a_{n-1} & 1 \\ \hline b_1 & \cdots & b_{n-1} & -a_n \end{array} \right) \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}),$$

即ち、 A, B 共に $n \times n$ の定数行列である。更に、以下の 2 条件を仮定する。

(A-1) A は n 々の相異なる固有値 $-\rho_1, \dots, -\rho_n$ をもつ。

(A-2) $a_i, a_j - a_k, \rho_l - \rho_m \in \mathbb{Z}$ & $\rho_l \in \mathbb{N}$ 。ただし、 $i, l, m = 1, 2, \dots, n$; $j, k = 1, 2, \dots, n-1$ である。

仮定 (A-2) により、(＃) は対数解を持たない。今、

$$e_j = \exp(-2\pi\sqrt{-1}a_j), \quad f_j = \exp(-2\pi\sqrt{-1}\rho_j)$$

とする。

Lemma 1. (#)は $t=0, 1, \infty$ を確定特異点にもつ Fuchs 型方程式であり、それぞれの点に於ける特性指数は

$$(-a_1, \dots, -a_{n-1}, 0) \quad \text{at } t=0,$$

$$(0, \dots, 0, -a_n) \quad \text{at } t=1,$$

$$(p_1, \dots, p_n) \quad \text{at } t=\infty,$$

である。

Lemma 2 (Riemann-Fuchs の関係式).

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n p_j \quad \text{従って} \quad \prod_{j=1}^n e_j = \prod_{j=1}^n f_j.$$

次の定理も容易に示される。

Theorem 3.

$$b_j = - \frac{\prod_{k=1}^n (p_k - a_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n-1} (a_k - a_j)} \quad (j=1, 2, \dots, n-1).$$

Remark. (#)に此の b_j を代入して、 x_1, \dots, x_{n-1} を消去し、更に $x = x_n$ とおく。 $\delta = t(d/dt)$ とすると、 x は

$$[\delta(\delta+a_1-1)\cdots(\delta+a_{n-1}-1) - t(\delta+p_1)\cdots(\delta+p_n)]x = 0$$

となる微分方程式をみたし、 $t=0$ での正則な解として

$${}_nF_{n-1}(p_1, \dots, p_n; a_1, \dots, a_{n-1}; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p_1)_k \cdots (p_n)_k}{(a_1)_k \cdots (a_{n-1})_k k!} t^k$$

をもつ。ただし、 $(p)_k$ は 2 項係数である。

又、大久保 type の方程式に対する基本定理は次の様に述べられる。

Theorem 4 (Gauss-大久保の公式)。 $t=0, 1$ のまわりで、特性指数 $-a_j$ に対応する (#) の解

$$\begin{cases} X_j(t) = t^{-a_j} \sum_{m=0}^{\infty} g_j(m) t^m, & j=1, 2, \dots, n-1 \\ X_n(t) = (t-1)^{-a_n} \sum g_n(m) t^m \end{cases}$$

が存在する。ただし、 $g_j(0)$ は、第 j 成分のみ 1 で他は 0 である n -ベクトル。更に $S^* = S \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の単連結領域に於いて、これらの Wronskian は

$$\det X = \det [X_1, \dots, X_n] = \left[\prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(1-a_j)}{\Gamma(1-p_j)} \right] t^{-(a_1+\dots+a_{n-1})} (t-1)^{-a_n}.$$

この定理と (A-2) により、 X_1, \dots, X_n の一次独立性が分る。

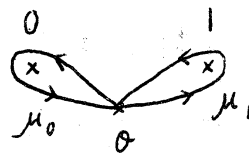
さて、点 $\theta \in S^*$ を一つ固定し、 θ を基点とする loop μ_0, μ_1 を図の様にとる。従って $\mu_\infty = \mu_1 \cdot \mu_0$

(μ_0 を先に行き、次に μ_1) は、 $t=\infty$

の回りを負の向きに 1 周する loop である。

ある。Theorem 4 により、これら μ_0, μ_1 に対応する circuit 行列

は、それぞれ M_0, M_1 とすると、



$$M_0 = I + \begin{pmatrix} e_1-1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_{n-1}-1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{I_{n-1}}{0 \dots 0} \middle| \begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & e_{n-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{(e_1-1)p_1}{\vdots} \middle| \begin{array}{c} (e_{n-1}-1)p_{n-1} \\ p_{n-1} \end{array} \right),$$

$$M_1 = I + (e_n-1) \left(\frac{0}{g_1 \dots g_{n-1} \ 1} \right) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & e_n \end{pmatrix} \left(\frac{0}{(e_n-1)g_1 \dots (e_n-1)g_{n-1}} \right)$$

の形をとる事が分る。今、Theorem 4 で述べた基本解 X に関するモノドロミー群を G で表わす。もし G を explicit に、即ち p_j , g_j をきちっと求めれば、それは接続係数を決めた、という事で、この方程式 (generalized hypergeometric equation; 今後 GHGE と略) については大久保 [2] によって求められた ([4] も参照)。一般の方程式について、接続係数をきちっと計算するのは難しいが ([1], [8] 及びその reference 中の文献参照)、 G の群としての構造を知る為には、以下の様な結果で十分であり、又計算する上でも便利である。即ち、各解 X_j を 0 でない定数倍、従って、non-singular な対角行列 D による X の変換 XD を基本解に取り直すと、対応するモノドロミー群は $D^{-1}GD$ となる。これは群を決める際に $n-1$ の自由度を与えてくれるが、GHGE の場合、結果は次の様になる。

Theorem 5 (大久保-高野 [3]). (#) のモノドロミー群は、次の式で定まる。

$$\begin{aligned}
 p_j q_j &= - \frac{\prod_1^n (e_j - f_k)}{e_j (e_j - 1) (e_n - 1) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n-1} (e_j - e_k)} \\
 &= - \frac{\prod_1^n \sin(a_j - p_k) \pi}{\sin a_j \pi \sin a_n \pi \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n-1} \sin(a_j - a_k) \pi}.
 \end{aligned}$$

Remark. G は X に関するモノドロミー群と定義したが、今述べた様に、 $2(n-1)$ 個の p_j, q_j がある中で、 $n-1$ 個を任意に指定し、他の $n-1$ 個はこの定理をみたすように取ることで定まる行列を改めて M_0, M_1 と書き、それによって生成される、元の G と同型の群 $\langle M_0, M_1 \rangle$ を、やはり G と表わすことにする。

§2. GHGE の既約性判定条件を述べると、詳しい証明は [5] を見て頂きたい。

Theorem 6. G が既約である為の必要十分条件は、以下の 2 条件が成立することである。

- (1) $e_j \neq f_k$. $(j=1, 2, \dots, n-1; k=1, 2, \dots, n)$
- (2) $f_k \neq 1$.

言い換えれば、 $a_j - p_k, p_k \in \mathbb{Z}$ である。

Remark. 既に (A-2) によって $p_k \in \mathbb{N}$ である。 p_k が負の整数になるのは、2 ページの Remark により、対応する nF_{n-1} が多項式

になる場合である。

§3. 今後、(H)に対する条件(A-1)、(A-2)に加えて、そのGは既約である、という仮定の元に話しを進める。

今、行列 M_{0j} ($j=1, 2, \dots, n-1$) を

$$M_{0j} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e_j & & & \\ 0 & & & 1 & & \\ \hline & & & & (e_j - 1)p_j & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 1 \end{array} \right) \dots j\text{行目}$$

と定義すると、これは *generalized reflection* と呼ばれるものだが、明らかに $M_{0j} \cdot M_{0k} = M_{0k} \cdot M_{0j}$ であり、 $M_0 = M_{01} \cdot \dots \cdot M_{0,n-1}$ 。

$G = \langle M_0, M_1 \rangle$ であるが、群 \tilde{G} を

$$\tilde{G} = \langle M_{01}, \dots, M_{0,n-1}, M_1 \rangle$$

とすると、Gは当然 \tilde{G} の部分群であり、Gの既約性から \tilde{G} も既約である。又、当然だが、 $n \geq 3$ を仮定する。

以上の設定の元で、次の予想を思い起こそう。

Conjecture (大久保)。もしGが有限群ならば、 \tilde{G} も有限群であろう。

この予想の故に、本稿では \tilde{G} が有限群となる case を決定しよう、というのが今後の目標である。 \tilde{G} が有限であれば、Gは当然有限群であり、従って(H)の解は代数函数から成り、 a_j ,

$\rho_j \in \mathbb{Q}$ である。更に (A-2) 及び既約性、そして M_0, M_1 に現われるのは e_j, f_j であるから、

$$(*) \quad 0 < a_j, \rho_j < 1$$

として良い。加えて、 \tilde{G} が有限ならば、それは有限な unitary reflection group でなければならず、よって Shephard-Todd [6] (以後 S-T と略) の分類が使える。分類表の番号 (S-T number) を $((\cdot))$ で書くことにする。

まず仮定の (A-2) より、 $a_1 = \dots = a_{n-1} = \frac{1}{2}$ ではあり得ない。この事から S-T number $((2))$ の内の $G(m, 1, n)$ 、及び $((25))$, $((26))$, $((32))$ のみが可能性を持つ。 $G(m, 1, n)$ では 1 つを除いて、他の $a_j = \frac{1}{2}$ であるから、再び (A-2) により、 $n=3$ に限る。4次元の $((32))$ では、 a_j は $\frac{1}{3}$ 又は $\frac{2}{3}$ に限るから、これも (A-2) によって不可。以上まとめると、 $n=3$ の場合のみ可能で、それは

$$G(m, 1, 3), ((25)), ((26))$$

という事になり、generalized hypergeometric function (以後、GHGF と略) ${}_3F_2$ という、最も重要な class にのみ可能性がある事になった。ただし、以上で $m \geq 3$ 。

さて、ここで又、(H) のモノドロミー群 G について、 G -不変なエルミート行列に関する結果を思い出そう ([2], Chapter III)。

$$h = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & \cdots & 1 & p_{n-1} \\ \hline q_1 & \cdots & q_{n-1} & 1 \end{array} \right)$$

と、 h を定義する。

Theorem 7. 今、 $H = h^{-1}$ が存在し、しかも H がエルミート行列であれば、 H は G -不変である、即ち $\forall g \in G$ に対し $gHg^* = H$ 。

$\det h = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_j q_j$ であるが、一方、容易に示される様に、

$$\det h = \prod_{j=1}^n \frac{1-f_j}{1-e_j}$$

である。従って Theorem 7 は今の場合、以下の様に述べられる。

Theorem 8. $f_j \neq 1$ かつ $p_j q_j = |p_j|^2 = |q_j|^2 \geq 0$ が成立するならば、 $H = h^{-1}$ が存在し、それは G -不変なエルミート行列である。

\tilde{G} が有限な場合に戻ると、その時 G も有限であるから、 H は正定値でなければならず、しかも Theorem 8 より、それは対称行列であり、当然 \tilde{G} -不変でもある。更に既約性の仮定も加えて、 $p_1 q_1, p_2 q_2 > 0$ ($n=3$ 故) が分る。 $n=3$ の時の Theorem 5 を再び書いておこう。

$$p_1 q_1 = - \frac{\sin(a_1 - p_1)\pi \cdot \sin(a_1 - p_2)\pi \cdot \sin(a_1 - p_3)\pi}{\sin a_1 \pi \cdot \sin a_3 \pi \cdot \sin(a_1 - a_2)\pi},$$

$$p_2 q_2 = - \frac{\sin(a_2 - p_1)\pi \cdot \sin(a_2 - p_2)\pi \cdot \sin(a_2 - p_3)\pi}{\sin a_2 \pi \cdot \sin a_3 \pi \cdot \sin(a_2 - a_1)\pi}.$$

今、 $a_1 < a_2$, $p_1 < p_2 < p_3$ として一般性を失わない。(*)より

$0 < a_2 - a_1 < 1$, $-1 < a_j - p_k < 1$ に注意すると、 $p_1 q_1, p_2 q_2 > 0$ より

$$\begin{cases} (a_1 - p_1)(a_1 - p_2)(a_1 - p_3) > 0 \\ (a_2 - p_1)(a_2 - p_2)(a_2 - p_3) < 0 \end{cases}$$

となり、結局、Lemma 2 も合わせて、

$$(**) \quad \begin{cases} p_1 < a_1 < p_2 < a_2 < p_3 \\ p_1 < a_3 < p_3 \end{cases}$$

でなくてはならない。

ここで finite reflection group に関する大事な結果を述べておこう。今、 G を \mathbb{C}^n の non-singular な線型変換から成る群とし、 \mathbb{C}^n 上の多項式 f に対する $g \in G$ の作用を

$$(gf)(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(g^{-1}v) \quad (v \in \mathbb{C}^n)$$

と定める。更に R を G -不変な多項式全体の集合、即ち、

$$R = \{f; gf = f \text{ for } \forall g \in G\}$$

とすると、まず次の良く知られた結果が成り立つ。

Theorem (Chevalley). G を finite reflection group とすると、 R は n 個の代数的に独立な斉次多項式 f_1, \dots, f_n で生成される。更に、 $d_i = \deg f_i$ ($d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$) とすると、 $\{d_1, \dots, d_n\}$ は生成元 f_i の選び方によらず一意的に決まる。

この d_i を G の degree という。S-T[6] では $d_i - 1$ を G の exponent と呼んでいる。この量は重要で、例えば G の位数

$|G| = \prod_{i=1}^n d_i$ となる。さて、 $\zeta \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ を $\zeta^d = 1$ 、即ち 1 の d 乗根で、従って $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha/d)$ と表わす。この時、

Theorem 9 (Springer [7]). ζ を固有値に持つ G の元が存在する為の必要十分な条件は、 d がある degree d_i を割り切る、即ち、 $d | d_i$ である。

次に、可能性をもつ 3 つの場合について、行列の位数に関してどのような性質が成り立たねばならないか、S-T [6] の結果から抜き書きしておこう (S-T の table 参照)。

((25)): M_{01}, M_{02}, M_1 の位数 = 3.

$M_{01} \cdot M_{02}, M_1 \cdot M_{01}, M_1 \cdot M_{02}$ の位数 = 2, 3, 4 又は 6.

((26)): M_{01}, M_{02}, M_1 の位数 = 2 又は 3.

$M_{01} \cdot M_{02}, M_1 \cdot M_{01}, M_1 \cdot M_{02}$ の位数 = 2, 3, 4 又は 6.

$G(m, 1, 3)$: M_{01} の位数 = m , M_{02}, M_1 の位数 = 2 としてよい.

$M_1 \cdot M_{02}$ の位数 = 2 又は 3.

今、 $f_j = \exp(-2\pi\sqrt{-1}p_j)$ は $M_\infty = M_1 \cdot M_0$ の固有値である事に注意して、 $p_j = \frac{\alpha}{d}$ (符号の違いを無視してよい事は明らか) の時、 d はどのような値をとるべきか、以上の結果から考えてみる;

((25)): degree は {6, 9, 12}. 従って、 d として取り得るのは

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12

故に、 $p_j = \frac{\alpha}{36}$ として、 α は少なくとも 3 又は 4 を因数に持つ。

(26)) : degree は $\{6, 12, 18\}$ 。従って $d = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12$ 又は 18 。

$\rho_j = \frac{\alpha}{36}$ として、 α は少なくとも 2 又は 3 で割り切れる。

$G(m, 1, 3)$ については一般的に言えないが、degree は $\{m, 2m, 3m\}$ で、特に $m=3$ のとき。

$G(3, 1, 3)$: degree は $\{3, 6, 9\}$ 。 $d = 1, 2, 3, 6, 9$ 。 $\rho_j = \frac{\alpha}{18}$ として、 α は 2 又は 3 で割り切れる。

(*)、(**) 及び以上の結果から、複素共役を除いた全ての場合を調べると、 \tilde{G} が (25) の群となるには、

$$(a_1, a_2, a_3; \rho_1, \rho_2, \rho_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}\right)$$

$$\left(\quad \quad \quad ; \frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\left(\quad \quad \quad ; \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\left(\quad \quad \quad ; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

の 4 通りに限って、可能性のあることが分る。又、(26) 及び $G(3, 1, 3)$ については計 50 通りの case について可能性がある。

そこで、それぞれの場合について、 a_j, ρ_j の値を p. 8 で述べた $\rho_1 \rho_2$ の右辺に代入し、更に $\rho_1, \rho_2, \rho_1, \rho_2$ の内、2ヶは任意に指定してよかったので、 $\rho_1 = \rho_2 = 1$ とする。こうしておいて、p. 10 で述べた行列の位数に関する条件、特に 2つの生成元の積に関する条件が満たされるかどうか、を全てチェックする。この作業を人間の手でやるうとすれば、仮に根気

が続いたとしても軽く1年はかゝると思われる。幸いな事に、いじり始めて1ヶ月半程度だった数式処理システム Macsyma のお蔭で、慣れてくると7、8分程度で1つの case をチェックできた。

結論を述べると、

((25)) ; $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$ のみ可。このとき、

$$M_{01}^3 = M_{02}^3 = M_1^3 = I$$

$$M_0^3 = (M_{01} \cdot M_{02})^3 = I, (M_1 \cdot M_{01})^6 = (M_1 \cdot M_{02})^4 = I.$$

((26)) ; $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \frac{1}{18}, \frac{7}{18}, \frac{13}{18})$ は

$$M_{01}^3 = M_{02}^2 = M_1^3 = I$$

$$M_0^6 = I, (M_1 \cdot M_{01})^6 = (M_1 \cdot M_{02})^6 = I.$$

もう一つの可能性をもつ $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6})$ は

$$M_{01}^2 = M_{02}^3 = M_1^3 = I,$$

$$M_0^6 = (M_1 \cdot M_{01})^6 = (M_1 \cdot M_{02})^4 = I$$

((G(3,1,3))) ; $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$ のみ可。

$$M_{01}^3 = M_{02}^2 = M_1^2 = I$$

$$M_0^6 = (M_1 \cdot M_{01})^6 = (M_1 \cdot M_{02})^3 = I$$

この最後の case については、ある変換を施すことで、その生成元の形を見て G(3,1,3) と判別されるもので、 a_j, p_j を見ているだけでは、((26)) が G(3,1,3) かの判別はできない。最初

の case について、それが ((25)) であると判断するにはどうする
か述べると、まず、

$$M_{01} = \begin{pmatrix} \omega & 0 & \frac{\omega-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{02} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & \frac{\omega^2-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega-1 & \omega-1 & \omega \end{pmatrix}$$

である。ここで、 $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$ である。今、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を取ると

$$T^{-1}M_{01}T = \begin{pmatrix} \omega & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, T^{-1}M_{02}T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \omega^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}M_1T = -\frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

となる。これは確かにユタリ一行列であるが、更に S-T
に於いて ((25)) の典型的な生成元として述べられているものと
ほぼ一致し (S-T の p.296)、同じ群を与える事は一目で分る。
他の case についても同様であり、結局、それぞれの case が、
先に述べた unitary reflection group に同型となる事、又、同型と
なるのはこれらの case に限る事が分る (以上の決め方から)。
これで ((25)), ((26)), $G(3,1,3)$ となる場合について、 \tilde{G} に関して
完全に分ったのだが、その部分群 G はどうなるか見ると;
 $\tilde{G} \cong ((25))$ のとき、 G は位数 81 の部分群。詳しくは、

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}; * = 1, \omega \text{ or } \omega^2 \right\}, |\mathcal{G}| = 27$$

として、 $G \cong \mathcal{G} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ となる。

$\tilde{G} = ((26))$, $G(3,1,3)$ の場合は、何れの case も $\langle M_0 = M_{01} \circ M_{02} \rangle = \langle M_{01}, M_{02} \rangle$ となるので、 $G = \tilde{G}$ が分る。又、これらについて、その解のリーマン面の genus も容易に求まる。以上から、

Theorem A. G.H.G.E. の有限モノドロミー群 G で \tilde{G} も同時に有限群となるのは、 $\tilde{G} = ((25))$, $((26))$, $G(m,1,3)$ ($m \geq 3$) に限る。特に、 $\tilde{G} = ((25))$, $((26))$, $G(3,1,3)$ となるのは、条件(*) (p.7) の元で、以下の4つの case であり、又、その4つに限る。

(I) $(a_1, a_2, a_3; p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$ 及び、複素共役 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9})$ で $\tilde{G} = ((25))$, Riemann 面の genus = 7

(II) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \frac{1}{18}, \frac{7}{18}, \frac{13}{18})$ 及び $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \frac{5}{18}, \frac{11}{18}, \frac{17}{18})$ で $G = \tilde{G} = ((26))$,
genus = 17^2

(III) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6})$ 及び $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{11}{12})$ で $G = \tilde{G} = ((26))$,
genus = 17^2

(IV) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$ 及び $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9})$ で
 $G = \tilde{G} = G(3,1,3)$, genus = 19.

モノドロミー群の成分は全て e_j, f_j で表わされる (p.4 及び Theorem 5)。従って、 $(a_1, a_2, a_3; p_1, p_2, p_3)$ に関する G と、任

意の整数 l, m, n, p, q を取って $(a_1+p, a_2+q, a_3-l-m-n-p-q; p+l, p_2+m, p_3+n)$ の時のモノドロミ一群とは一致する。この事と、p.2 で述べた Remark、及び、 G が有限群であれば解は代数函数である、という事から;

Theorem B. 以下の G.H.G.F. は代数函数である:

$$(I) {}_3F_2\left(l \pm \frac{1}{9}, m \pm \frac{4}{9}, n \pm \frac{7}{9}; p \pm \frac{1}{3}, q \pm \frac{2}{3}; t\right)$$

$$(II) {}_3F_2\left(l \pm \frac{1}{18}, m \pm \frac{7}{18}, n \pm \frac{13}{18}; p \pm \frac{1}{3}, q \pm \frac{1}{2}; t\right)$$

$$(III) {}_3F_2\left(l \pm \frac{1}{12}, m \pm \frac{7}{12}, n \pm \frac{5}{6}; p \pm \frac{1}{2}, q \pm \frac{2}{3}; t\right)$$

$$(IV) {}_3F_2\left(l \pm \frac{1}{9}, m \pm \frac{4}{9}, n \pm \frac{7}{9}; p \pm \frac{1}{3}, q \pm \frac{1}{2}; t\right)$$

ここで、 $l, m, n, p, q \in \mathbb{Z}$.

§4. 残る case は \tilde{G} が $G(m, 1, 3)$ で $m \geq 4$ の場合である。得られた結果を述べると:

Theorem C. n は $(m, n) = 1, 1 \leq n < m$ をみたす任意の整数とする。ならば、 $(a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{n}{m}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{n}{3m}, \frac{m+n}{3m}, \frac{2m+n}{3m}\right)$ に対応するモノドロミ一群は全て有限群である。更に、

(i) m が奇数のときは、 $G = \tilde{G} = G(m, 1, 3)$ で、対応する G.H.G.F. の解の Riemann 面の genus $= \frac{(m-1)(3m^2-2m-2)}{2}$ である。

(ii) m が偶数のときは、 $\tilde{G} = G(m, 1, 3)$ であるか、

$$G \cong \left\langle G\left(\frac{m}{2}, 1, 3\right), \begin{pmatrix} \zeta_m & 0 \\ 0 & \zeta_m \\ 0 & \zeta_m \end{pmatrix} \right\rangle, \zeta_m = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}\right)$$

となり、従って Riemann 面の genus $= \frac{1}{8}(m-2)(3m^2-2m-4)$ となる。

Theorem B と同様にして：

Theorem D. 3 より大きい任意の自然数 m と、 $(m, n) = 1$, $1 \leq n < m$ をみたす任意の自然数 n に対し、

$${}_3F_2\left(\lambda \pm \frac{n}{3m}, \mu \pm \frac{m+n}{3m}, \nu \pm \frac{2m+n}{3m}; \rho \pm \frac{n}{m}, \xi \pm \frac{1}{2}; t\right)$$

は代数函数である。ただし、 $\lambda, \mu, \nu, \rho, \xi \in \mathbb{Z}$ 。

Remark. Theorem B の (IV) は、この定理で $m=3$, $n=1$ としたもので、結局、Theorem C, D は \hat{G} が非原始群 $G(m, 1, 3)$ ($m \geq 3$) となる case について述べている。即ち、 $m > 3$ の条件は $m \geq 3$ としてよい。前節の結果とどう違うかと言うと、§3 では \hat{G} が ((25)), ((26)) 及び $G(3, 1, 3)$ となる case を全て決定しているのに対し、Th. C, D は、それが $\hat{G} = G(m, 1, 3)$ ($m \geq 4$) となる全ての case がどうか不明な点である。勿論、 m が小さければ、これらで全てつくされるのは明らかだが。

文献

- [1] 河野實彦; Funkcial. Ekvac., 28 (1985), 249-266.
- [2] 大久保謙二郎; On the group of Fuchsian equations, 都立大学数学教室セミナー報告, 1987.

- [3] 大久保-高野恭一; Generalized hypergeometric functions (preprint).
- [4] 大久保-高野-吉田節治; Funkcial. Ekvac., 31(1988) 483-
- [5] 佐々井; G.H.G.F. with finite monodromy groups (準備中).
- [6] Shephard-Todd; Canad. J. Math. 6 (1954) 274-304
- [7] Springer; Inv. Math., (~~1974~~) 25(1974) 159-198.
- [8] H. Yokoyama; Hiroshima Math. J., 18(1988), 309-339.