

## いくつかの Bootstrap Confidence Intervals の比較

千葉大学理学部 神藤 健 (Takeshi Shindo)

千葉大学自然科学研究科 A.W. Alhassan

千葉大学理学部 田栗正章 (Masaaki Taguri)

### 1. 解析の目的

Bootstrap法を用いて、推定すべき母数（1変量）に対する信頼区間を構成するいくつかの方法が提案されているが（例えば Efron [2], Hall [3] 等を参照）、その理論的、数値的な検討は未だ不十分であると考えられる。そこで本研究では、4種類の方法について、主として数値的観点から、それらの比較・検討を行なう。

### 2. 4種類の信頼区間

まず、ここでとりあげる4種類の信頼区間について述べる。

#### (1) パーセンタイル法 [PERcentile method (PER法)]

$F$  を未知の母集団分布、 $\theta = \theta(F) \in \mathbb{R}^1$  を推定すべき母数とする。 $x_1, \dots, x_n$  を  $F$  からの無作為標本、すなわち

$x_1, \dots, x_n$  i.i.d.  $F$  とする。  $F_n$  を経験分布とし、  $\hat{\theta} = \theta(F_n) = t(x_1, \dots, x_n)$  とする。次に  $x_1^*, \dots, x_n^*$  を  $F_n$  からの無作為標本 (bootstrap sample) とし、  $\hat{\theta}^* = t(x_1^*, \dots, x_n^*)$  とする。このとき

$$\hat{G}(s) = \Pr\{\hat{\theta}^* \leq s\} \quad (F_n \text{ は固定})$$

と定義する。モンテカルロ法では、  $\hat{G}(s)$  は次式で近似される。

$$\hat{G}(s) \sim \# \{\hat{\theta}^* \leq s\} / B$$

ただし、  $B$  は Bootstrap 標本の抽出回数であり、  $\# \{\hat{\theta}^* \leq s\}$  は  $\hat{\theta}^* \leq s$  となる回数を表わす。

このとき、パーセンタイル法による  $\theta$  の  $(1-2\alpha)$  信頼区間は、次式で与えられる。

$$[\hat{G}^{-1}(\alpha), \hat{G}^{-1}(1-\alpha)]$$

この信頼区間が  $\theta$  の exact な  $(1-2\alpha)$  信頼区間であるための条件は、Efron [1], p.84 に与えられている。

## (2) BST法 [Bootstrap T method (BST法)]

$\theta = \mu$  (母集団平均) の推定の場合には、この方法は、次のようになる。  $F$  の下での  $T = (\bar{X} - \mu) / S$  の分布を、  $F_n$  の下での  $T^* = (\bar{X}^* - \bar{x}) / S^*$  の分布で近似することを考える。ここで

$$S^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2 / (n-1) \quad ; \quad \bar{X} = \sum X_i / n$$

$$S^{*2} = \sum (X_i^* - \bar{X}^*)^2 / (n-1) \quad ; \quad \bar{X}^* = \sum X_i^* / n$$

である。このような考え方にに基づき、BST法による $\theta$ の $(1-2\alpha)$ 信頼区間は、次のように構成される。

$$\begin{aligned} & [ \bar{x} - \{ \widehat{\text{CDF}}^{-1}(1-\alpha) \} s, \bar{x} - \{ \widehat{\text{CDF}}^{-1}(\alpha) \} s ] \\ & \widehat{\text{CDF}}(t) = \# \{ T^* \leq t \} / B \end{aligned} \quad (2.1)$$

(3) BC法 [Bias Corrected percentile method (BC法)]

$F$ を未知の母集団分布、 $\theta = \theta(F) \in \mathbb{R}^1$ を推定すべき母数、 $x_1, \dots, x_n$   $\stackrel{i.i.d.}{\sim} F$ とする。 $\hat{\theta}$ ,  $\hat{G}(s)$ をパーセントイル法の場合と同様に構成したとき、BC法による $\theta$ の $(1-2\alpha)$ 信頼区間は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & [ \hat{G}^{-1}(\Phi(2z_0 + z(\alpha))), \hat{G}^{-1}(\Phi(2z_0 - z(\alpha))) ] \\ & z_0 = \Phi^{-1}(\hat{G}(\hat{\theta})), \quad \hat{G}(s) = \text{Pr}\{\hat{\theta}^* \leq s\}, \\ & \Phi(z(\alpha)) = \alpha \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで $\Phi$ は標準正規分布の分布関数である。(2.2)で $z_0 = 0$ とおくと、これはパーセントイル法の信頼区間と一致する。

ところでBC法による信頼区間は、次の仮定に基づいて導き出されたものである。

[仮定] 次の条件を満たす単調増加関数 $g(\cdot)$ が存在する。

$$\begin{aligned} \phi &= g(\theta), \quad \hat{\phi} = g(\hat{\theta}), \quad \hat{\phi}^* = g(\hat{\theta}^*) \quad \text{のとき,} \\ \hat{\phi} - \phi &\sim N(-z_0\sigma, \sigma^2), \\ \hat{\phi}^* - \hat{\phi} &\sim N(-z_0\sigma, \sigma^2) \end{aligned} \quad [z_0, \sigma \text{ は定数}]$$

この仮定の下では、(2.2)は $\theta$ に対するexactな $(1-2\alpha)$ 信頼

区間である (Efron [1], p.83 参照)。この仮定が成り立っていない状況でも、BC法による  $\theta$  の  $(1-2\alpha)$  信頼区間を (2.2) で定義する。

(4) BCa法 [B.C.percentile acceleration method (BCa法)]

BCa法は、BC法の改良として Efron [2] が与えた方法である。ここではBCa法を、次の3つの場合に分けて簡単に述べておく。

- (i) 1 Parameter の場合 (Parametric な場合)
- (ii) Multiparameter の場合 (Parametric な場合)
- (iii) Nonparametric な場合

(i) 1 Parameter の場合

$\hat{\theta}$  を無作為標本  $(x_1, \dots, x_n)$  から得られた  $\theta$  の MLE とし、 $\hat{\theta} \sim F_\theta$  とする。この場合には  $\hat{\theta}$  の bootstrap 分布は、 $\hat{\theta}^* \sim F_{\hat{\theta}}$  で定義される。 $f_\theta$  を  $\hat{\theta}$  の p.d.f. とすれば、 $\hat{\theta}^*$  の p.d.f. は  $f_{\hat{\theta}}$  となるから、その分布関数は

$$\hat{G}(s) = P_{\hat{\theta}}\{\hat{\theta}^* \leq s\} = \int_{-\infty}^s f_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}^*) d\hat{\theta}^*$$

となる。BCa法では、次の仮定をおいている。

[仮定] 次の条件を満たす単調増加関数  $g(\cdot)$  が存在する。

$$\phi = g(\theta), \quad \hat{\phi} = g(\hat{\theta}) \quad \text{のとき、}$$

$$\hat{\phi} - \phi \sim N(-z_0 \sigma_\phi, \sigma_\phi^2), \quad \sigma_\phi = 1 + a \phi$$

[ $z_0, a$  は定数]

これは、BC法の仮定を特別な場合として含んでいる。この仮定の下では、BC法の場合と同様、 $\theta$  に対する exact な  $(1-2\alpha)$  信頼区間は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & [\hat{G}^{-1}(\Phi(z[\alpha])), \hat{G}^{-1}(\Phi(z[1-\alpha]))] \\ & z[\alpha] = z_0 + \{z_0 + z(\alpha)\} / \{1 - a(z_0 + z(\alpha))\}, \\ & z_0 = \Phi^{-1}(\hat{G}(\hat{\theta})), \quad \hat{G}(s) = \Pr\{\hat{\theta}^* \leq s\}, \\ & \Phi(z(\alpha)) = \alpha \end{aligned} \quad (2.3)$$

(2.3)で  $a = 0$  とおくと、BC法の信頼区間と一致することに注意しておく。

この信頼区間を計算するためには、 $a$  の推定が必要になるが、 $a$  は次式で推定すればよいことが示されている。

$$\begin{aligned} a &= \text{Skewness}(\dot{l}_\theta | \theta = \hat{\theta}) / 6, \\ \dot{l}_\theta(\cdot) &= \partial \log f_\theta(\cdot) / \partial \theta \end{aligned}$$

これを用いれば、(2.3)の値を計算することができる。

ところで 1 Parameter の場合には、適当な条件の下で次が成り立つことが証明されている。

$$(\theta_{BCa}[\alpha] - \theta_{EX}[\alpha]) / \sigma(\hat{\theta}) = O(n^{-1})$$

ここで  $\theta_{BCa}[\alpha]$  は BCa 法による信頼区間の端点、 $\theta_{EX}[\alpha]$  は有意水準  $\alpha$  の最強力検定に対応する棄却域の端点である。

#### (ii) Multiparameter の場合

$\eta$  を母数ベクトル、 $y \sim F_\eta$  とするとき  $\theta = t(\eta) \in$

$R^1$ の信頼区間を構成する。まず、 $\hat{G}(s)$ は次のように作る。

$y$ の観測値から $\eta$ のM.L.E.  $\hat{\eta}$ を求め、 $\hat{\theta} = t(\hat{\eta})$ とする。

$y$ のbootstrap分布を  $y^* \sim F_{\hat{\eta}}$  で定義すれば、 $y^*$ の観

測値から $\eta$ のM.L.E.  $\hat{\eta}^*$ が得られ、これから  $\hat{\theta}^* = t(\hat{\eta}^*)$  が

計算できる。このとき

$$\hat{G}(s) = P_{\hat{\eta}}\{\hat{\theta}^* \leq s\}$$

である。これを  $\#\{\hat{\theta}^* \leq s\} / B$  で近似すれば、 $\theta$ の(1-

$2\alpha$ )信頼区間は(2.3)で与えられる。この場合aの推定は、

Stein(1956)の'least favorable family'の考え方をい

れば1 Parameterの場合に帰着させることができ、(i)の

場合の式を用いれば、

$$a = \text{Skewness} (d/d\lambda \log f_{\hat{\eta} + \lambda \hat{\mu}} | \lambda = 0) / 6 \quad (2.4)$$

となる。ここで  $\hat{\mu} = I_{\hat{\eta}}^{-1} \hat{\nabla}$  であり、 $I_{\hat{\eta}}$ は  $k \times k$  行列でその

ij成分は  $(I_{\hat{\eta}})_{ij} = [-\partial^2 / \partial \eta_i \partial \eta_j (\log f_{\eta})]_{\eta = \hat{\eta}}$

で与えられる。また  $\hat{\nabla}$ の第i成分は  $(\hat{\nabla})_i = [\partial / \partial \eta_i$

$t(\eta)]_{\eta = \hat{\eta}}$  である。特に指数型分布族の場合、すなわち  $y$

の p.d.f.が

$$f(y) = \exp[n\{\eta'y - \phi(\eta)\}] f_0(y) \quad (2.5)$$

と表わされる場合には、(2.4)は

$$a = \hat{\phi}^{(3)}(0) / \{\hat{\phi}^{(2)}(0)\}^{3/2} / 6\sqrt{n}, \quad (2.6)$$

$$\hat{\phi}^{(j)}(0) = \partial^{(j)} / \partial \lambda^{(j)} \hat{\phi}(\hat{\eta} + \lambda \hat{\mu}) | \lambda = 0$$

となる。これにより、(2.3)を計算することができる。

(iii) Nonparametric な場合

$F$  を未知の分布、 $x_1, \dots, x_n$   $\overset{i.i.d.}{\sim} F$  とし、 $\theta = \theta(F) \in R^1$  の信頼区間を構成する。 $\hat{\theta}$ ,  $\hat{G}(s)$  の構成方法はパーセントイル法の場合と同じであり、 $\theta$  の  $(1-2\alpha)$  信頼区間は(2.3)で与えられる。この場合、 $a$  は次式で推定される。

$$a = [\sum U_i^3 / (\sum U_i^2)^{3/2}] / 6, \quad (2.7)$$

$$U_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ t((1-\epsilon)F_{n+\epsilon} \delta_i) - t(F_n) \} / \epsilon$$

上式は、次のようにして導かれる。 $F = F(W)$  を、 $x_i$  に  $w_i$  の重みをおいた分布とする。ただし、 $W = (w_1, \dots, w_n)$ ,  $w_i \geq 0$  ( $i=1, \dots, n$ ),  $\sum w_i = 1$  である。この  $F(W)$  を母分布と考えれば、 $X_1, \dots, X_n$   $\overset{i.i.d.}{\sim} F(W)$  と考えられるが、これは次のように書き換えることができる。

$$P_i = \# \{X = x_i\} / n, \quad P = (P_1, \dots, P_n)$$

とおけば、

$$P \sim \text{multi}_n(n, W) / n,$$

すなわち  $P$  は  $n$  カテゴリー多項分布にしたがう。この分布は指数型分布族(2.5)において、

$$y = P, \quad \eta_i = \log(nw_i) + c, \quad \psi(\eta) = \log(\sum \exp \eta_i / n) \quad (2.8)$$

とした場合である。いま  $x_1, \dots, x_n$  が観察されたことすれば、 $P = P^0 = (1/n, \dots, 1/n)$  が観測されたことにな

り、 $W$ の推定値は  $\hat{W} = P^0$  となる。これから  $\hat{\eta} + \lambda \hat{\mu} = \lambda U$  が得られ、(2.6), (2.8)から  $a$ の推定ができる。以上により  $\hat{G}(s)$ ,  $a$ が求められるから、 $\theta$ の  $(1-2\alpha)$ 信頼区間(2.3)が計算できる。BCa法の詳細については、Efron [2]を参照のこと。

### 3. 母平均, 母分散の信頼区間

ここで、母平均, 母分散を推定する場合の、各方法による信頼区間をまとめておく。

#### (1) 母平均 $\mu$ に対する信頼区間

$F$ を未知の分布、 $x_1, \dots, x_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} F$ とする。推定すべきパラメータは、 $\theta = E_F(X)$ である。この場合、パーセントイル (PER法), BC法, BCa法により信頼区間を構成するには、次のようにすればよい。

まず1組の標本  $(x_1, \dots, x_n)$ を抽出して固定し、これから  $\hat{\theta} = \bar{x}$ を計算する。 $(x_1, \dots, x_n)$ から復元抽出により大きさ  $n$ の bootstrap 標本  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ をとり、 $\hat{\theta}^* = \bar{x}^* = \sum x_i^* / n$ を計算する。これを  $B$ 回繰り返せば、 $B$ 個の  $\bar{x}^*$ の値が得られるが、これから

$$\hat{G}(s) \sim \# \{ \bar{x}^* \leq s \} / B$$

が求まる。

$$z_0 = \Phi^{-1}(\hat{G}(\bar{x})), \quad \Phi(z(\alpha)) = \alpha$$



$$a = \hat{\beta}_1 / 6\sqrt{n} \quad [ \hat{\beta}_1 = \hat{\mu}_3 / (\hat{\mu}_2)^{3/2}, \quad \hat{\mu}_k = \Sigma (x_i - \bar{x})^k / n ]$$

とすれば、 $\mu$  に対する  $(1-2\alpha)$  信頼区間は、次のように構成すればよい。ここで  $a$  の推定法としては、(2.7)を用いた。

(a) PER法  $[ \hat{G}^{-1}(\alpha), \hat{G}^{-1}(1-\alpha) ]$

(b) BC法  $[ \hat{G}^{-1}(\Phi(2z_0+z(\alpha))), \hat{G}^{-1}(\Phi(2z_0-z(\alpha))) ]$

(c) BCa法  $[ \hat{G}^{-1}(\Phi(z[\alpha])), \hat{G}^{-1}(\Phi(z[1-\alpha])) ]$

$$z[\alpha] = z_0 + \{z_0 + z(\alpha)\} / \{1 - a(z_0 + z(\alpha))\}$$

(d) BST法  $[ \bar{x} - \{ \widehat{CDF}^{-1}(1-\alpha) \} s, \bar{x} - \{ \widehat{CDF}^{-1}(\alpha) \} s ]$

$$s^2 = \Sigma (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)$$

$$t^* = \sqrt{n} (\bar{x}^* - \bar{x}) / s^*$$

$$\widehat{CDF}(t) = \# \{ t^* \leq t \} / B$$

## (2) 母分散 $\sigma^2$ に対する信頼区間

$F$  を未知の分布、 $x_1, \dots, x_n$   $\overset{i.i.d.}{\sim} F$  とする。推定すべきパラメータは  $\theta = E_F [ (X - E_F(X))^2 ]$  である。この場合には、パーセントイル法 (PER法), BC法, BCa法により信頼区間を構成するには、次のようにすればよい。

まず1組の標本  $(x_1, \dots, x_n)$  を抽出して固定し、これから  $\hat{\theta} = \hat{\sigma}^2 = \Sigma (x_i - \bar{x})^2 / n$  を計算する。 $(x_1, \dots, x_n)$  から復元抽出により大きさ  $n$  の bootstrap 標本  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$  をとり、 $\hat{\theta}^* = \hat{\sigma}^{2*} = \Sigma (x_i^* - \bar{x}^*)^2 / n$  を計算する。これを  $B$  回繰り返せば、 $B$  個の  $\hat{\sigma}^{2*}$  の値が得られる

が、これから

$$\hat{G}(s) \sim \# \{ \hat{\sigma}^{2*} \leq s \} / B$$

が求まる。

$$z_0 = \Phi^{-1}(\hat{G}(\hat{\sigma}^2)), \quad \Phi(z(\alpha)) = \alpha$$

$$a = [\sum U_i^3 / (\sum U_i^2)^{3/2}] / 6 \quad [U_i = (x_i - \bar{x})^2 - \sum (x_j - \bar{x})^2 / n]$$

とすれば、 $\sigma^2$ に対する $(1-2\alpha)$ 信頼区間は、次のように構成すればよい。ここで $a$ の推定法としては、(2.7)を用いた。

(a) PER法  $[\hat{G}^{-1}(\alpha), \hat{G}^{-1}(1-\alpha)]$

(b) BC法  $[\hat{G}^{-1}(\Phi(2z_0+z(\alpha))), \hat{G}^{-1}(\Phi(2z_0-z(\alpha)))]$

(c) BCa法  $[\hat{G}^{-1}(\Phi(z[\alpha])), \hat{G}^{-1}(\Phi(z[1-\alpha]))]$

$$z[\alpha] = z_0 + \{z_0 + z(\alpha)\} / \{1 - a(z_0 + z(\alpha))\},$$

(d) BST法  $[\hat{\sigma}^2 - \{\widehat{CDF}^{-1}(1-\alpha)\} s, \hat{\sigma}^2 - \{\widehat{CDF}^{-1}(\alpha)\} s]$

$$s^2 = \sum (n-1)^2 \hat{\mu}_4 / n^3 - (n-1)(n-3) \hat{\mu}_2^2 / n^3$$

$$t^* = (\hat{\sigma}^{2*} - \hat{\sigma}^2) / s^*$$

$$\widehat{CDF}(t) = \# \{ t^* \leq t \} / B$$

ここで $\hat{\sigma}^{2*}$ ,  $s^*$ は、bootstrap標本を使って計算しなおした $\hat{\sigma}^2$ ,  $s$ の値である。

#### 4. 母平均 $\mu$ の信頼区間の端点に対する検討

本節では、次の第5節で行なう数値実験の準備として、母平均 $\mu$ に対する4種類の信頼区間の端点の漸近展開を求めて

おく。これは、各端点の定義にしたがって、通常の Cornish-Fisher 展開を行なえばよい。

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\mu}_3 / (\hat{\mu}_2)^{3/2}, \quad \hat{\beta}_2 = \hat{\mu}_4 / (\hat{\mu}_2)^2 - 3,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\mu}_2 / n, \quad z(\alpha) \equiv k$$

とおけば、4種類の信頼区間の端点  $\theta \cdot [\alpha]$  の漸近展開は、一般的に次の形に表わせる。

$$\theta \cdot [\alpha] = \bar{x} + \hat{\sigma} \left\{ k + \hat{\beta}_1 / 6\sqrt{n} \cdot T_1 + \hat{\beta}_2 / 24n \cdot T_2 \right. \\ \left. + \hat{\beta}_1^2 / 72n \cdot T_3 + 1/4n \cdot T_4 + O(n^{-3/2}) \right\} \quad (4.1)$$

ここで、 $T_1, T_2, T_3, T_4$  は次の通りである。

	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
$\theta_{PER}[\alpha]$	$k^2 - 1$	$k^3 - 3k$	$-4k^3 + 10k$	0
$\theta_{BC}[\alpha]$	$k^2 + 1$	$k^3 - 3k$	$-4k^3 + 18k$	0
$\theta_{BCa}[\alpha]$	$2k^2 + 1$	$k^3 - 3k$	$2k^3 + 22k$	0
$\theta_{BST}[\alpha]$	$2k^2 + 1$	$-2k^3 + 6k$	$20k^3 - 5k$	$k^3 + 3k$

参考のために、 $\alpha = 0.95, \alpha = 0.05$  の場合の  $T_1 \sim T_4$  の値を、表1に与えておく。

表1. 各項の係数の値 [ $\alpha = 0.95, \alpha = 0.05$  の場合]

	$\alpha = 0.95$				$\alpha = 0.05$			
	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
PER	0.28	-0.02	-0.019	0	0.28	0.02	0.019	0
BC	0.62	-0.02	0.41	0	0.62	0.02	-0.16	0
BCa	1.07	-0.02	0.63	0	1.07	0.02	0.63	0
BST	1.07	0.04	1.12	2.35	1.07	-0.04	-1.12	-2.35

またBST法による信頼区間(2.1)において、 $\widehat{CDF}(t)$ をTの真の分布関数に置き換えてできる信頼区間の端点を $\theta_{EX}[\alpha]$ とおくと、 $\Pr\{\theta \leq \theta_{EX}[\alpha]\} = \alpha$ であり、 $\theta_{EX}[\alpha]$ の漸近展開は、上の $\theta_{BST}[\alpha]$ の式において $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2$ を $\beta_1, \beta_2$ で置き換えたものになる。そこで $\widehat{\beta}_1 = \beta_1 + O(n^{-1/2})$ に注意すると、

$$|\theta_{BCa}[\alpha] - \theta_{EX}[\alpha]| = O(n^{-3/2}) \quad (4.2)$$

$$|\theta_{BST}[\alpha] - \theta_{EX}[\alpha]| = O(n^{-3/2})$$

が言える。これは他の2つの方法では成り立たない。したがってこの観点からは、nonparametricな $\mu$ の推定の場合には、BST法、BCa法がPER法、BC法よりも良さそうである。なお、これよりも一般的な場合の漸近展開が、Hall [3]によって与えられている。[3]では、母数が分散の場合も含めて(4.2)の成立することが示されている。

## 5. 数値実験による検討

各方法による信頼区間の比較、検討を数値的に行なうために、第3節で述べた母平均、母分散の推定における、次のようなケースについて数値実験を行なった。

$$\alpha = 0.05, \quad 0.01 \quad (\text{信頼度})$$

$$n = 20, \quad 40 \quad (\text{標本数})$$

B = 200 (Bootstrap の回数)

実験では、 $\alpha$  と  $n$  との 4 つの各組合せに対し、500 回の繰り返しを行なった。また (4.1) と表 1 の値を参考にして、母集団分布を次のように想定した。

i) 正規分布  $N(0, 1)$

ii) 自由度 2 の t 分布 [平均  $\mu$  の推定の場合]

ii') 自由度 5 の t 分布 [分散  $\sigma^2$  の推定の場合]

iii) Weibull 分布  $f(x) = 0.5 \cdot x^{-0.5} \exp[-x^{0.5}]$

参考のために、上の各分布の平均  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$ 、歪度  $\beta_1$ 、尖度  $\beta_2$  の値を、表 2 に与えておく。

表 2. 各分布の母数の値

	$\mu$	$\sigma^2$	$\beta_1$	$\beta_2$
N(0,1)	0	1	0	0
t(2)	0	-	-	-
t(5)	0	1.67	0	6
Weibull	2	20	6.62	84.72

以上の設定の下で行なった数値実験の結果は、図1～図10にまとめられている。

まず図1～図4は、各方法により作られた信頼区間の中に、母数 $\theta$ の値が含まれた割合 (Coverage Probability) を表わしている。例えば信頼区間の構成を500回行なったとき、その内母数の値が400回だけ信頼区間に含まれたとすれば、この割合は  $400/500=0.80$  となる。また図中の○、△、□の印は、母集団の分布がそれぞれ規準正規分布、t分布、Weibull分布の場合であることを意味している (各分布の母数の値については表2を参照のこと)。

次に図5～図10は、各方法の下での平均的な信頼区間と、母数 $\theta$ の値が含まれなかった割合 (%) を表わしている。2つの区間が上下に並べて図示されているが、上が  $n=20$ 、下が  $n=40$  の場合である。この区間の端点は500回の繰り返しに亘る平均の値である。したがって示されている区間の長さは、500回に亘る信頼区間の長さの平均値になる。また区間の左側、右側に表示された数値は、それぞれ母数が信頼区間の左側、右側にはずれた回数の割合 (%) を表わしている。

図1. 各方法による信頼区間に、母数 $\theta$ の値が含まれる割合

◇  $\mu$ の推定 :  $\alpha = 0.05$  (Coverage Probability = 0.90)

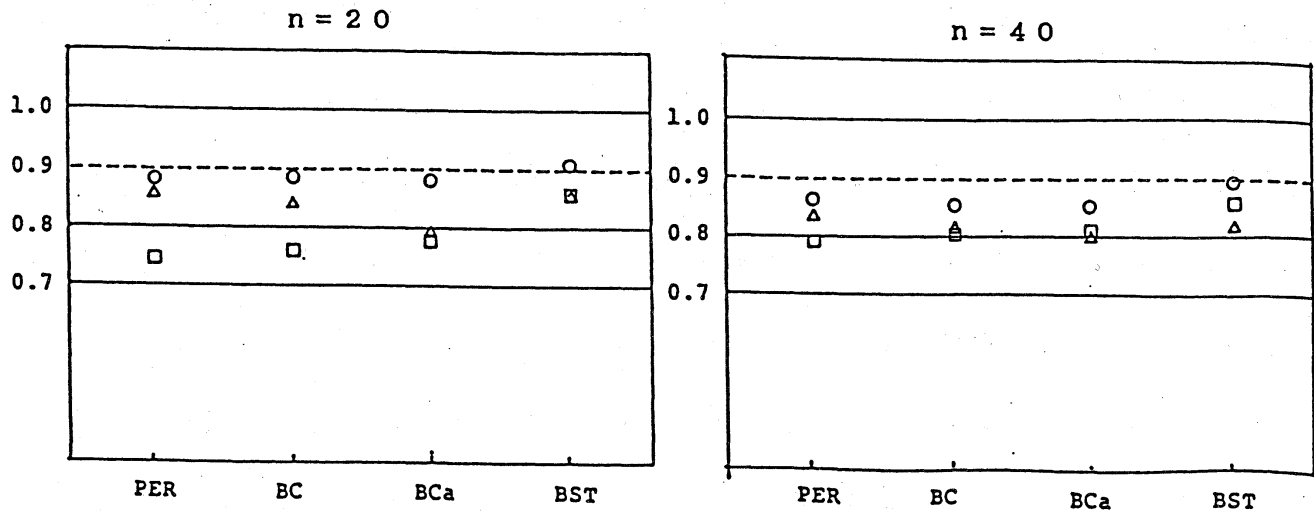


図2. 各方法による信頼区間に、母数 $\theta$ の値が含まれる割合

◇  $\mu$ の推定 :  $\alpha = 0.01$  (Coverage Probability = 0.98)

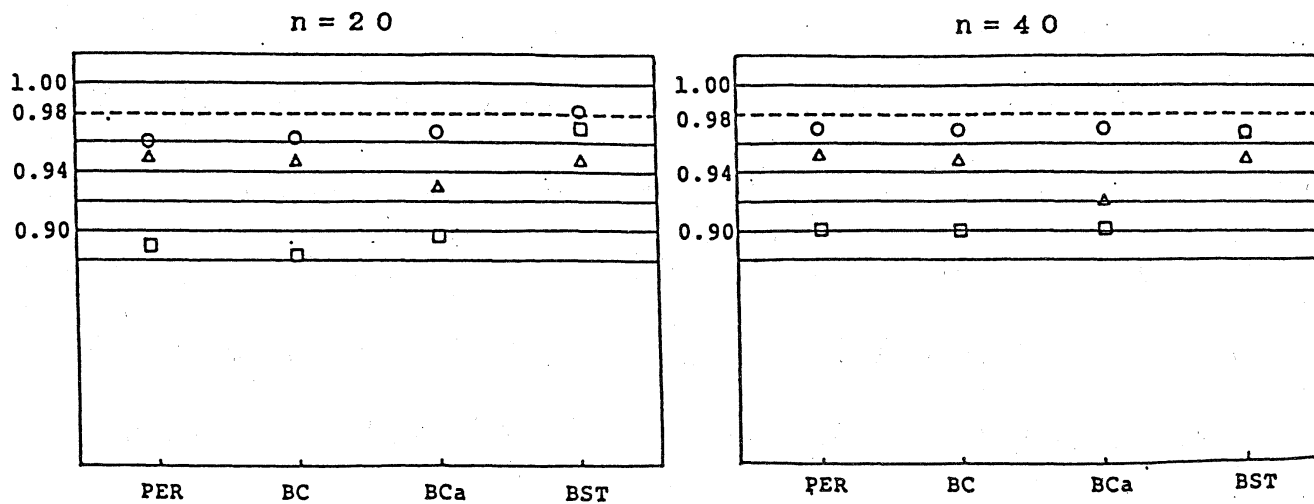


図3. 各方法による信頼区間に、母数 $\theta$ の値が含まれる割合

◇  $\sigma^2$ の推定 :  $\alpha = 0.05$  (Coverage Probability = 0.90)

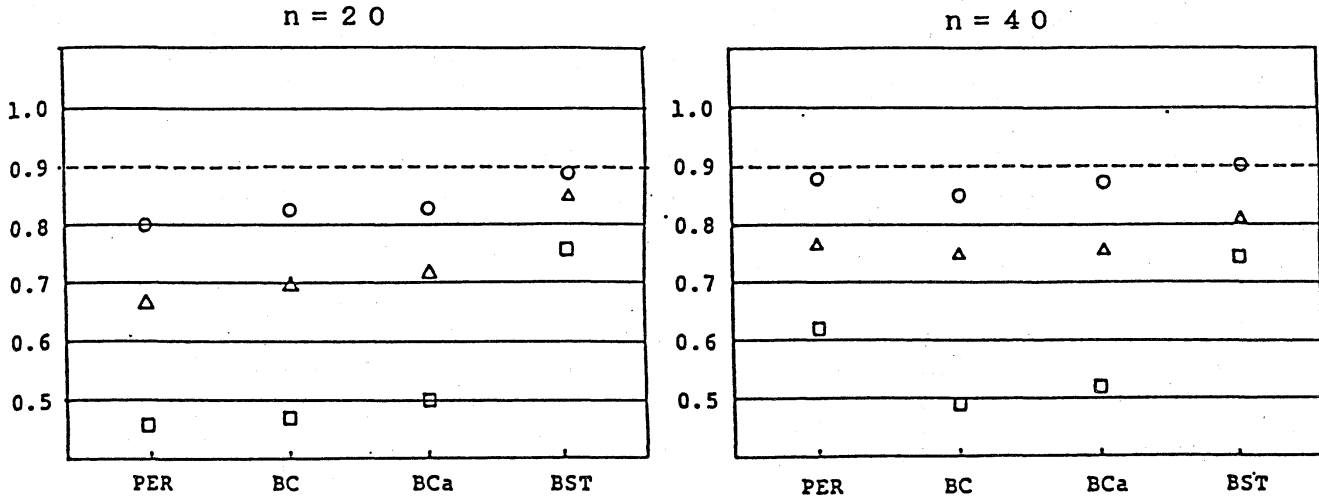


図4. 各方法による信頼区間に、母数 $\theta$ の値が含まれる割合

◇  $\sigma^2$ の推定 :  $\alpha = 0.01$  (Coverage Probability = 0.98)

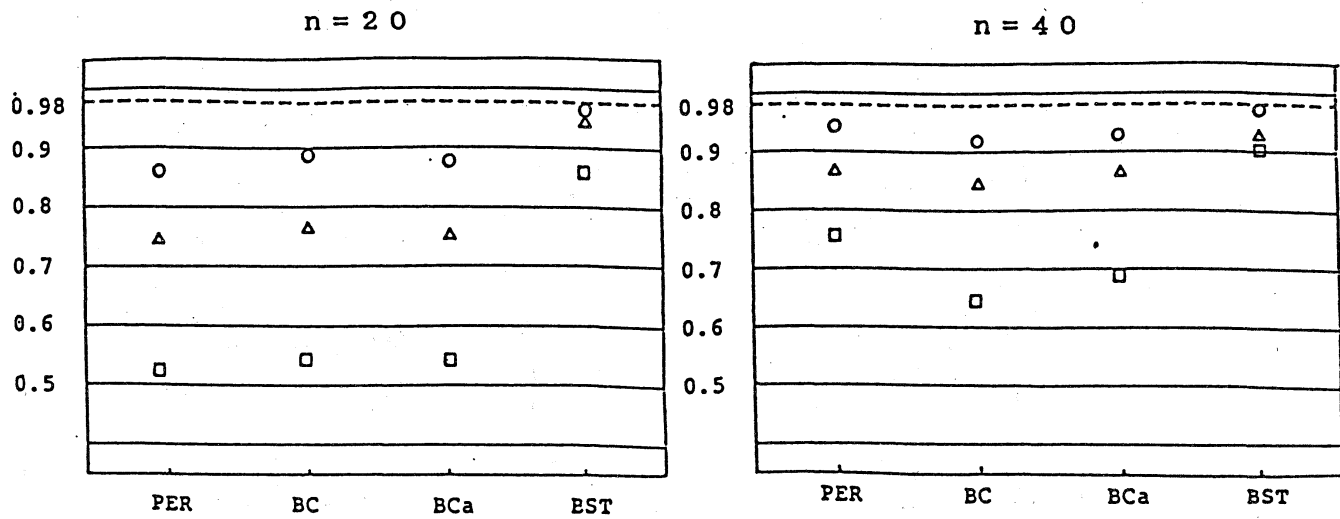




図5. 各方法による平均的な信頼区間と、母数 $\theta$ の値が含まれなかった割合(%)

◇  $\mu$ の推定 : 正規分布  $N(0, 1)$  の場合

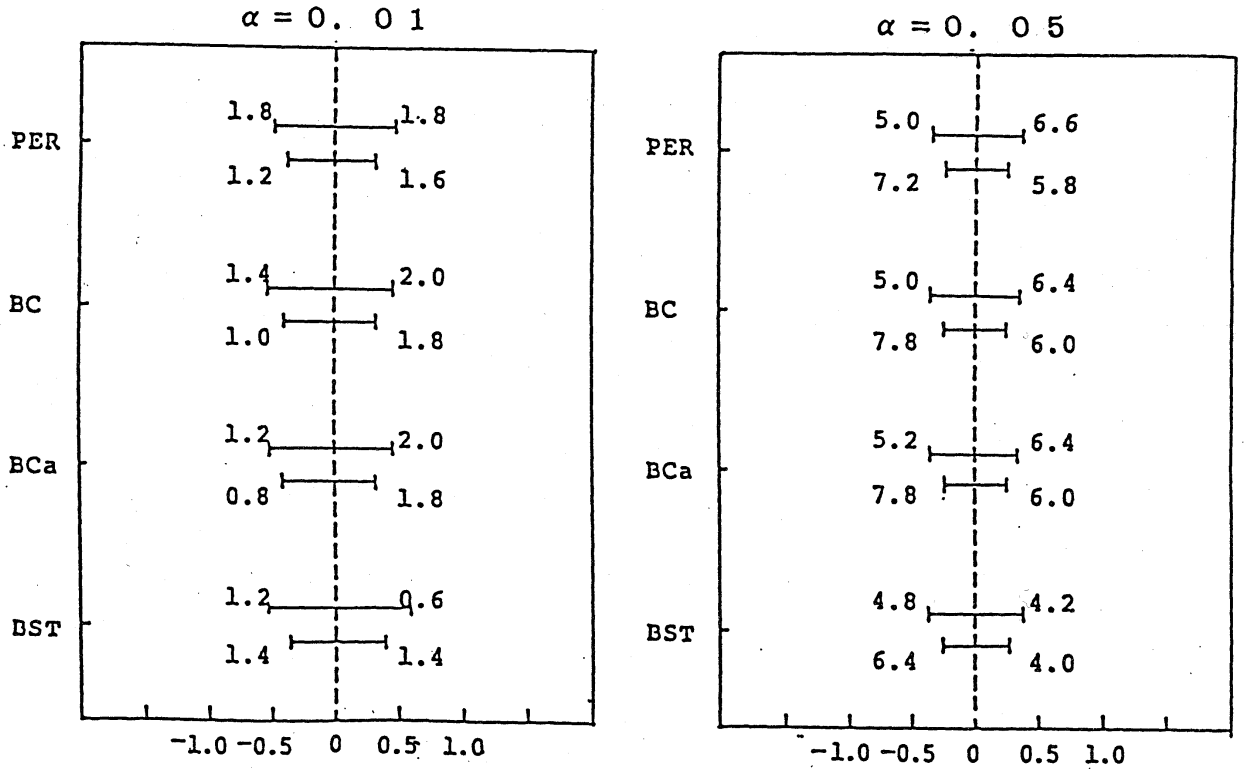


図6. 各方法による平均的な信頼区間と、母数 $\theta$ の値が含まれなかった割合(%)

◇  $\mu$ の推定 : 自由度2のt分布の場合

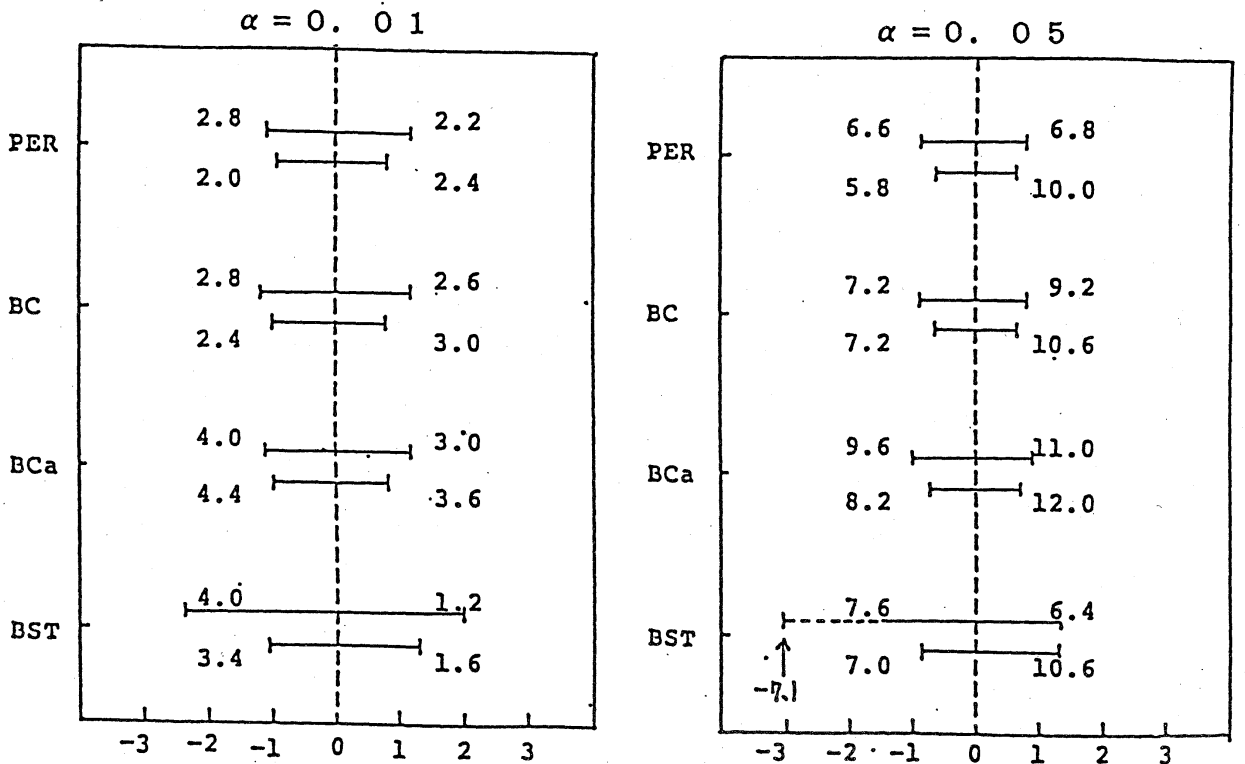


図7. 各方法による平均的な信頼区間と、母数 $\theta$ の値が含まれなかった割合(%)

◇  $\mu$ の推定 : Weibull分布  $f(x) = 0.5 \cdot x^{-0.5} \exp[-x^{0.5}]$  の場合

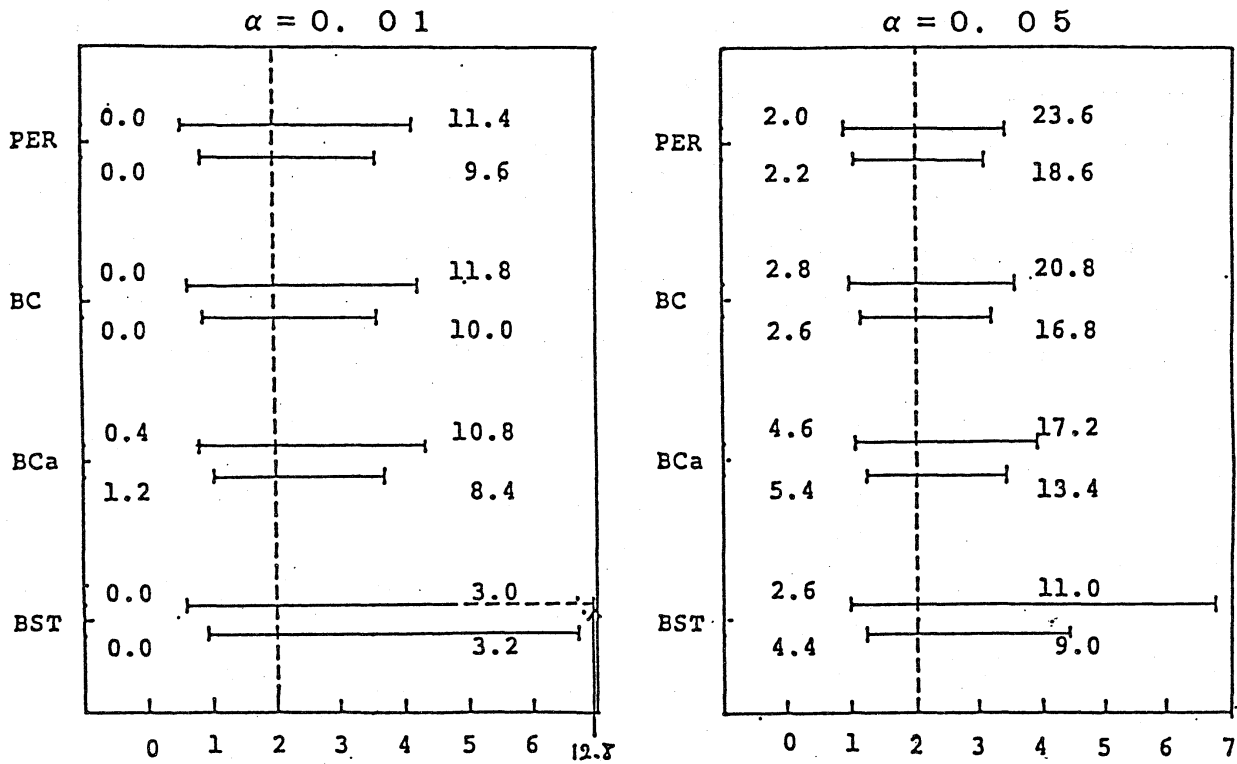


図8. 各方法による平均的な信頼区間と、母数 $\theta$ の値が含まれなかった割合(%)

◇  $\sigma^2$ の推定 : 正規分布  $N(0, 1)$  の場合

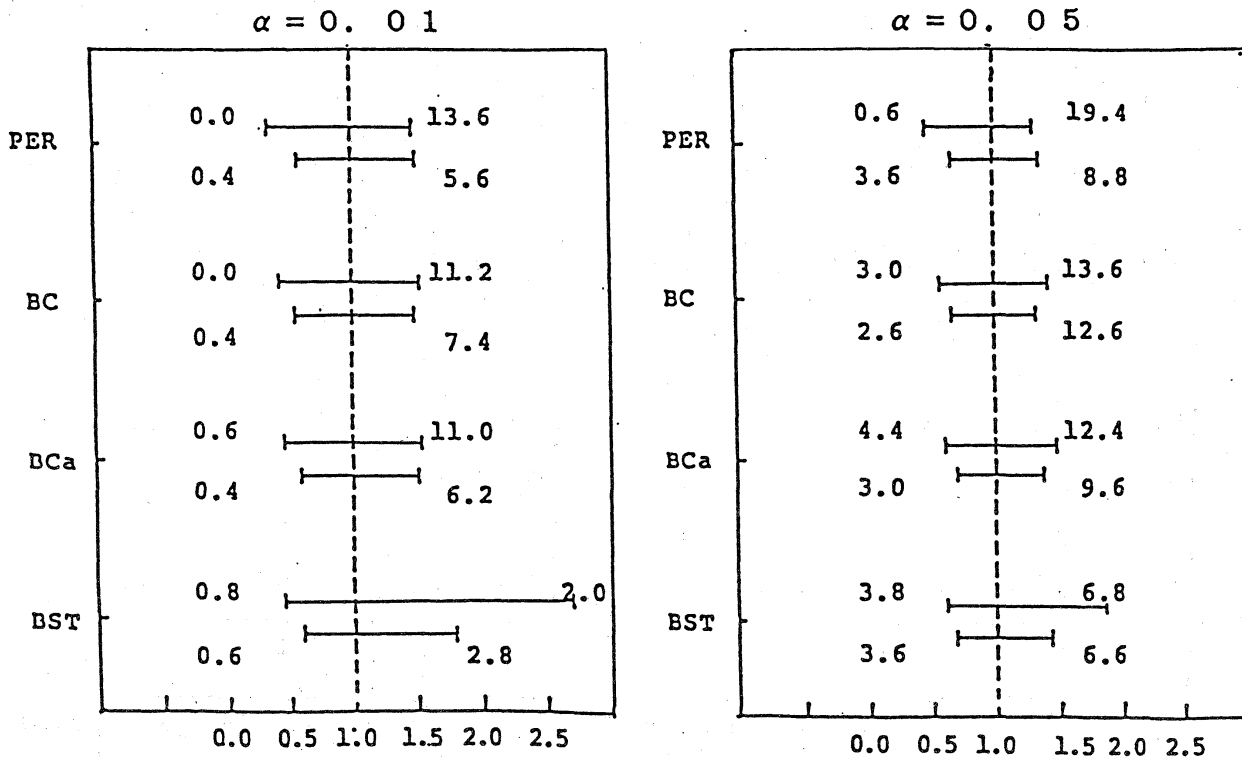


図9. 各方法による平均的な信頼区間と, 母数 $\theta$ の値が含まれなかった割合(%)

◇  $\sigma^2$ の推定 : 自由度5のt分布の場合

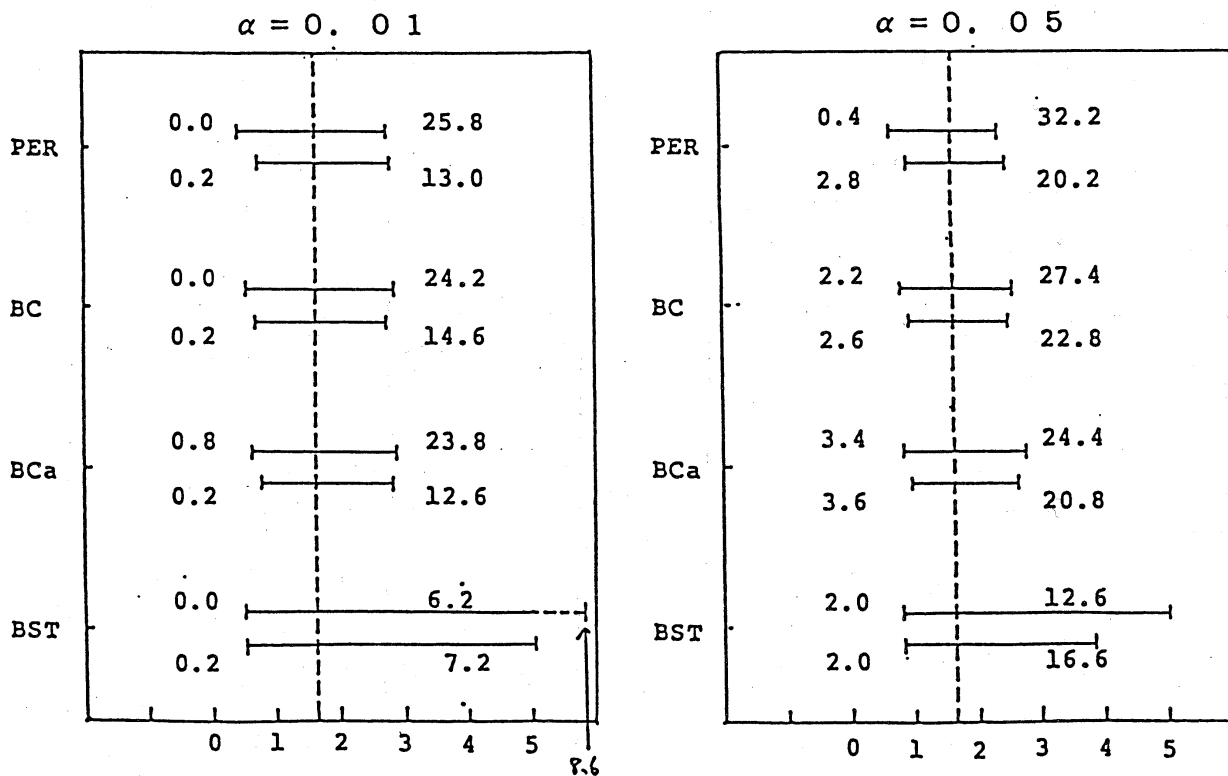
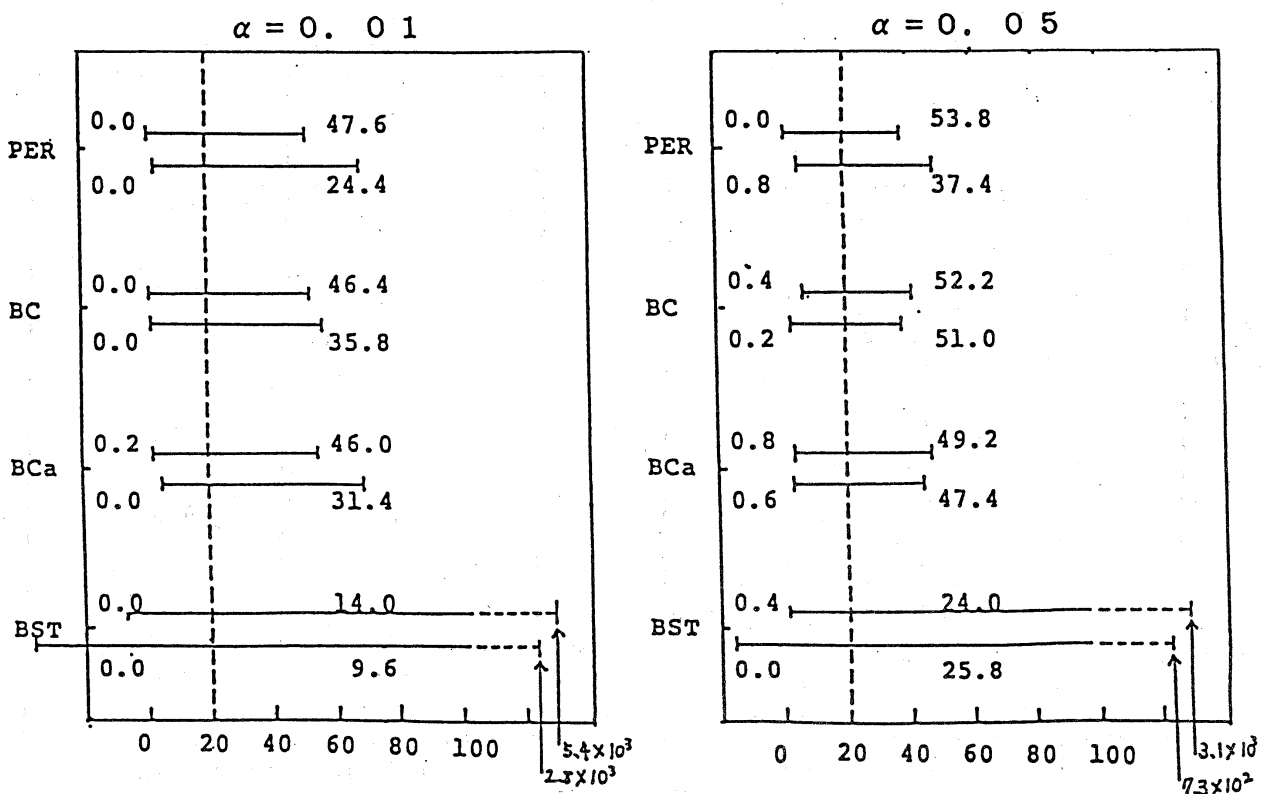


図10. 各方法による平均的な信頼区間と, 母数 $\theta$ の値が含まれなかった割合(%)

◇  $\sigma^2$ の推定 : Weibull分布  $f(x) = 0.5 \cdot x^{-0.5} \exp[-x^{0.5}]$  の場合



## 6. まとめと今後の検討課題

ここでは、前節で与えた実験結果から読み取れる事柄をまとめとめておく。

### (1) 各方法の比較

(i) Coverage Probability については、平均  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$  の推定の場合とも、信頼区間に含まれる名目上の割合と実際の割合が最も近い方法は、BST法である。漸近展開の式からは、BST法とBCa法のどちらが良いかは判らないが((4.2)参照)、この実験では差が認められる。また漸近展開の式では、BCa法はBC法の改良になっているが(第4節参照)、この実験に関する限りでは、BCa法とBC法の間には大きな差は認められなかった。これは、second order の correctness が Coverage Probability の正確度に与える影響があまり大きくないためであろう(Hall [3], 4.5節参照)。

(ii) 信頼区間の長さに関しては、母集団が正規分布から離れると、BST法は他の方法よりも長くなる。特にWeibull分布の場合は、 $\mu$ 、 $\sigma^2$  の推定の場合とも極端に長い。

### (2) $n = 20$ と $n = 40$ の場合の比較

(i) Coverage Probability については、 $n$  が20から40に大きくなると、改善が見られる。特に  $\sigma^2$  の推定の場合は、各分布とも改善度が大きい。

(ii) 信頼区間の長さに関しては、 $n$ が20から40に大きくなると、 $\sigma^2$ の推定における Weibull 分布と自由度 5 の  $t$  分布の場合を除けば、信頼区間の長さは短くなっている。

(3) 全体として、母集団が正規分布から離れているほど、得られる結果が悪い。特に、PER法、BC法、BCa法では Coverage Probability が悪く、BST法では信頼区間が長い。

最後に、今後の課題についてまとめておこう。

(a) この数値実験では、Coverage Probability が最も良かったのはBST法であったが、この方法を適用する際には、推定量  $\theta$  の分散の推定量をうまく選ばなければならない。母数が平均のような簡単な場合はよいとしても、一般の場合の分散の推定は難しいことが多い (Efron [2], p.199 の例を参照)。例えば、相関係数の推定にBST法を適用する場合、 $\theta_{BST}[\alpha]$ の構成には問題がある。これに対する解決法の1例は、Hall [3], Rejoinder に与えられている。

(b) 平均、分散に対する信頼区間を構成する際にBST法を適用する場合、Coverage Error (名目上の Coverage Probability と実際の Coverage Probability との差) がどの程度になるかは、一般には評価できない。母数が平均の場合で、標本数が大きな場合の評価式は Hall [3], p.949 に与えられている。しかし実際の場合では、標本数がこの実験の

ように小さい、もしくは中程度の場合も多く現われる。このような状況の下では、上の評価式をそのまま適用することには問題がある。少なくとも、実際の Coverage Probability が  $(1-2\alpha)$  より大きくなるか否かについての見当をつけることが望まれる。

#### 参 考 文 献

- [1] Efron, B. (1982) : The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans, SIAM, Philadelphia.
- [2] Efron, B. (1987) : Better bootstrap confidence intervals (with discussion), JASA, Vol.82, pp.171-200.
- [3] Hall, P. (1988) : Theoretical comparisons of bootstrap confidence intervals (with discussion), Ann. Statist., Vol.16, pp.927-985.