数理解析研究所講究録
第 682 巻 1989 年 142-145

Sequential slippage test について

筑波大学　社会工学系　　原　恭彦

【1】Introduction.　Robbins (1970) は，信頼水準 $1-\alpha$ で，任意の標本数 n に対して真の母数 θ を同時に含む信頼領域の列 $\{R_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}_{n\geqq m}$ を考えた．すなわち，

$$P_\theta\{\theta\in R_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)\ \text{ for } \forall n\geqq m\}\geqq 1-\alpha \qquad \text{for } \forall\theta. \tag{1}$$

この $\{R_n\}_{n\geqq m}$ を θ に対する信頼水準 $1-\alpha$ の信頼列と呼ぶ．

$$P_\theta\{\exists\hat\theta_n\in R_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)\ \text{ for } \forall n\geqq m \ \text{ s.t. } \lim_{n\to\infty}\hat\theta_n=\theta\}=1 \qquad \text{for } \forall\theta, \tag{2}$$

のとき，$\{R_n\}_{n\geqq m}$ は consistent であるという．また，

$$P_\theta\{\lim_{n\to\infty}\rho(R_n(X_1,X_2,\cdots,X_n))=0\}=1 \qquad \text{for } \forall\theta, \tag{3}$$

のとき，$\{R_n\}_{n\geqq m}$ は degenerate in the limit であるという．ただし，$\rho(R)$ は R の直径とする．
$\{R_n\}_{n\geqq m}$ が consistent かつ degenerate in the limit であるならば，帰無仮説 $H:\theta=\theta_0$ に対する対立仮説 $K:\theta\neq\theta_0$ の $N=\inf\{n\geqq m\mid\theta_0\notin R_n\}$ を stopping rule とする sequential test は，size α かつ power 1 であることが，Lai (1976) に述べられている．多次元回帰モデルの回帰係数に対する信頼列の構成については，Sinha and Sarkar (1984) や Hara (1986) がある．

さて，X_{ij} は互いに独立で p次元正規分布 $N(\mu_i,\Sigma)$ $(i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\cdots,n)$ に従う確率変数であるとする．ただし，μ_i $(i=1,2,\cdots,k)$ は未知の p次元ベクトルで，Σ は既知の $p\times p$ 正定値行列である．このとき，帰無仮説 $H_0:\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_k$ に対する対立仮説 $\bigcup_{i=1}^{k}H_i$（各 H_i は，第i番目の μ_i だけが他とは異なるという仮説，すなわち，$H_i:\mu_1=\cdots=\mu_{i-1}=\mu_i-\delta=\mu_{i+1}=\cdots=\mu_k$ である.）

の検定は，slippage test と呼ばれる．この検定を Robbins (1970) や Lai (1976) のように sequential に行うのが目的である．

【２】Sequential slippage test.　$X_{(n)}=(X_{11},\cdots,X_{1n},X_{21},\cdots,X_{2n},\cdots,X_{kn})'$を kn×pの確率行列，$\mu$ は未知のp次元ベクトル，Σは既知のp×p正定値行列とする．【１】で述べた slippage test は，次のモデル

$$X_{(n)}=1_{kn}\mu'+\begin{bmatrix}1_n\delta_1'\\1_n\delta_2'\\\vdots\\1_n\delta_k'\end{bmatrix}+\varepsilon,\qquad \varepsilon\sim N_{kn\times p}(0,\ I_{kn}\otimes\Sigma), \tag{4}$$

において，k+1個の仮説，すなわち，

$$\begin{aligned}&H_0:\ \delta_j=0\quad\text{for}\ \forall j=1,2,\cdots,k,\\&H_i:\ \delta_j\neq0\quad\text{if}\ \ j=i,\quad \delta_j=0\quad\text{if}\ \ j\neq i,\qquad(i=1,2,\cdots,k)\end{aligned} \tag{5}$$

を持つ多重決定問題として定式化される．この問題は，$X_{(n)}\to X_{(n)}+1_{kn}a'$　($a\in\mathbb{R}^p$)なる変換群Gのもとで不変である(Hara (1988))．今，各δ_iに対する信頼水準$1-\alpha/k$ のG不変信頼列 $\{R_n^i(X_{(n)})\}_{n\geq m}$　(i=1,2,･･･,k)が構成でき，かつ，それらがそれぞれ consistent かつ degenerate in the limit であるとする．このとき，

$$N=\inf\{n\geq m\mid 0\notin R_n^i(X_{(n)})\quad\text{for}\ \ \exists i=1,2,\cdots,k\} \tag{6}$$

とおけば，N回目に帰無仮説H_0を棄却して k個の対立仮説の中のH_iを選ぶという sequential slippage test は size α である．すなわち，

$$P_{\mu,H_0}\{\ H_0\text{を棄却する}\ \}\leq\alpha\qquad\text{for}\ \forall\mu. \tag{7}$$

また，正しい対立仮説を選ぶ確率は一様に１である．すなわち，

(8) $$P_{\mu,\delta_i,H_i}\{\,H_i を選ぶ\,\} = 1 \quad \text{for } {}^\forall\mu,\ {}^\forall\delta_i \neq 0,\ {}^\forall i.$$

【３】Invariant confidence sequences for δ_i． 簡単のため$\Sigma = I_p$とおく．Robbins' inequality (1970) より，

(9) $$P_{\mu,\delta_i,H_i}\{\,\|\delta_i - k(\bar{X}_i - \bar{X})/(k-1)\|^2 \geq k(a+p\ell og(n/m))/((k-1)n) \quad \text{for } {}^\exists n \geq m\}$$
$$\leq 1 - F(a) + 2af(a)/p \quad \text{for } {}^\forall\mu,\ {}^\forall\delta_i \neq 0,\ {}^\forall i.$$

ただし，Ｆとｆは，それぞれ自由度 p のχ^2-分布の分布関数と密度関数である．(9)式の右辺が α/k になるように a の値を定めれば，

(10) $$R_n^i(X_{(n)}) = \{\delta \in \mathbb{R}^p \mid \|\delta - k(\bar{X}_i - \bar{X})/(k-1)\|^2 < k(a+p\ell og(n/m))/((k-1)n)\}, \quad (n \geq m)$$

が，ずれδ_iに対する信頼水準$1-\alpha/k$ のG不変信頼列である．これは consistent かつ degenerate in the limit である．

【References】[1] Hara, T. (1986). Confidence sequences for regression coefficients in a multivariate linear model, Memo. Fac. Sci. Kyushu Univ., 40, 57-64.

[2] Hara, T. (1988). Detection of multivariate outliers with location slippage or scale inflation in left orthogonally invariant or elliptically contoured distributions, Ann. Inst. Statist. Math., 40, 395-406.

[3] Lai, T.L. (1976). On confidence sequences, Ann. Statist., 4, 265-280.

[4] Robbins, H. (1970). Statistical methods related to the law of the iterated logarithm, Ann. Math. Statist., 41, 1397-1409.

[5] Sinha, B.K. and Sarkar, S.K. (1984). Invariant confidence sequences for some parameters in a multivariate linear regression model, Ann. Statist., 12, 301-310.