数理解析研究所講究録
第 684 巻 1989 年 1-17

ソリトン方程式のロンスキアン解

東大工　太田　泰広 (Yasuhiro Ohta)

§1. はじめに

KP hierarchy に属するソリトン方程式は、適当な従属変数変換によって双一次形式に書き直すことができ、それらの解はτ関数を用いて書き表すことができる。[1] それらのうち、BKP hierarchy などを別にすれば、各方程式のソリトン解は Wronskian を用いて簡単に表現できることが知られている。[2] そして、これらのソリトン方程式の双一次形式は、τ関数または Wronskian に関する Plücker 関係式に他ならない。

KP hierarchy のうち、1st modified KP hierarchy や2成分 KP hierarchy の方程式は、二種類の Wronskian 解をもつ。この二種類の解が存在することは、例えば戸田方程式では、戸田格子方程式と戸田分子方程式のちがいがあることに相当し、また非線形 Schrödinger (NLS) 方程式では、明るいソリトン (bright soliton) と暗いソリトン (dark soliton) の二種類があることに対応している。§2 では、最も簡単な例である

modified KdV（MKdV）方程式を例にとり、これらの解の相異を述べ、次にDavey-Stewartson（DS）方程式の明るいソリトンと暗いソリトンの解の構造を明らかにする。さらに、この二種類の解が存在することを利用して、coupled NLS 方程式の解を構成する。

従来、Wronskianで表現される解としては、ソリトン解か代数解[3]ぐらいしか言及されていなかった。一方、KP方程式には、代数ソリトン解またはランプソリトン解と呼ばれる二次元的に局在したN-ソリトン解が存在することが知られている。[4] この解は代数解とは異なり、N個の任意パラメタをもち、独立変数の次数がinhomogeneousであることが特徴である。§3では、このような代数ソリトン解もWronskianを用いて簡単に表現できることを示す。また、同様の方法によって、DS方程式のランプソリトン解[5]も、double Wronskianで書けることを示す。

§2．明るいソリトンと暗いソリトン

最初にWronskianの記号を導入しておく。[6] 独立変数 x_1 に関するWronskian τ_N^n を次のようにおく。

$$\tau_N^n = \begin{vmatrix} \partial_{x_1}^n \varphi_1 & \partial_{x_1}^{n+1} \varphi_1 & \cdots & \partial_{x_1}^{n+N-1} \varphi_1 \\ \partial_{x_1}^n \varphi_2 & \partial_{x_1}^{n+1} \varphi_2 & \cdots & \partial_{x_1}^{n+N-1} \varphi_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1}^n \varphi_N & \partial_{x_1}^{n+1} \varphi_N & \cdots & \partial_{x_1}^{n+N-1} \varphi_N \end{vmatrix}$$

ただし、φ_i は $\partial_{x_k}\varphi_i = \partial_{x_1}^k \varphi_i$ をみたすとする。N は行列式の大きさであり、ソリトンの個数に相当する。$n=0$ のときは単に τ_N^0 を τ_N と書く。次に double Wronskian τ_{NM}^{nm} を、

$$\tau_{NM}^{nm} = \left|\begin{array}{cccc:cccc} \partial_{x_1}^n \varphi_1 & \partial_{x_1}^{n+1} \varphi_1 & \cdots & \partial_{x_1}^{n+N-1} \varphi_1 & \partial_{y_1}^m \psi_1 & \partial_{y_1}^{m+1} \psi_1 & \cdots & \partial_{y_1}^{m+M-1} \psi_1 \\ \partial_{x_1}^n \varphi_2 & \partial_{x_1}^{n+1} \varphi_2 & \cdots & \partial_{x_1}^{n+N-1} \varphi_2 & \partial_{y_1}^m \psi_2 & \partial_{y_1}^{m+1} \psi_2 & \cdots & \partial_{y_1}^{m+M-1} \psi_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1}^n \varphi_{N+M} & \partial_{x_1}^{n+1} \varphi_{N+M} & \cdots & \partial_{x_1}^{n+N-1} \varphi_{N+M} & \partial_{y_1}^m \psi_{N+M} & \partial_{y_1}^{m+1} \psi_{N+M} & \cdots & \partial_{y_1}^{m+M-1} \psi_{N+M} \end{array}\right|$$

によって定義する。ただし、φ_i, ψ_i は $\partial_{x_k}\varphi_i = \partial_{x_1}^k \varphi_i, \partial_{y_k}\psi_i = \partial_{y_1}^k \psi_i$ をみたすとする。$n=m=0$ のときは、単に τ_{NM}^{00} を τ_{NM} と書く。

このとき、1st modified KP hierarchy

$$\begin{aligned} &(D_{x_1}^2 + D_{x_2})\, g \cdot f = 0 \\ &(D_{x_1}^3 - 4D_{x_3} - 3D_{x_1}D_{x_2})\, g \cdot f = 0 \\ &\qquad \vdots \end{aligned} \tag{1}$$

の解として、

$$\begin{cases} f = \tau_N^0 \\ g = \tau_N^{-1} \end{cases} \tag{2}$$

と

$$\begin{cases} f = \tau_N^{\circ} \\ g = \tau_{N-1}^{\circ} \end{cases} \qquad (3)$$

の二種類がある。(1)をKP hierarchyのBäcklund変換とみなしたとき、(2)は位相がずれたソリトン解同士を表し、(3)はソリトンの個数が異なる解同士を表す。二成分まで拡張して考えた場合、(1)は次のような解をもつ。

$$\begin{cases} f = \tau_{NM} \\ g = \tau_{N-1,M+1} \end{cases}$$

これは、DS方程式の場合、(3)の方に相当する。

(1) MKdV方程式

MKdV方程式には、非線形項の符号によって次の二種類がある。

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \qquad (4)$$

$$V_t - 6V^2 V_x + V_{xxx} = 0 \qquad (5)$$

(4)はsech型のソリトン解を、(5)はtanh型のソリトン解をもち、それぞれ(2)、(3)のWronskianを用いて解が書ける。(4)は変数変換 $x_1 = x$, $x_3 = -4t$, $v = i\left(\log\frac{g}{f}\right)_{x_1}$ によって双一次形式

$$\begin{cases} D_{x_1}^2 g\cdot f = 0 \\ (D_{x_1}^3 - 4D_{x_3})\, g\cdot f = 0 \end{cases}$$

に書き直すことができ、(5)は $x_1 = x - ct$, $x_3 = -4t$,
$V = \left(\log \frac{G}{F}\right)_{x_1}$ によって、

$$\begin{cases} \left(D_{x_1}^2 + \frac{c}{6}\right) G \cdot F = 0 \\ \left(D_{x_1}^3 - 4D_{x_3} - \frac{c}{2} D_{x_1}\right) G \cdot F = 0 \end{cases}$$

となる。これらのソリトン解は、

$$\begin{cases} f = \tau_N^0 \\ g = \tau_N^{-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} F = \tau_N^0 \\ G = \tau_{N-1}^0 \end{cases}$$

$$\varphi_i = e^{\eta_i} + e^{\xi_i}$$

$$\eta_i = p_i x_1 + p_i^2 x_2 + p_i^3 x_3 + \eta_i^{(0)}$$

$$\xi_i = q_i x_1 + q_i^2 x_2 + q_i^3 x_3 + \xi_i^{(0)} \qquad q_i = -p_i$$

で与えられる。ただし、$c = -6p_N^2$ である。

非線形項の符号によって解の構造が異なるのは、解に対する正則性の要請と関係がある。解 v, V が正則であるためには、すべての x_1, x_3 に対して $gf \neq 0$, $GF \neq 0$ でなければならない。ソリトン解に対してこの要請をおくことによって、非線形項の符号が決まる。

(2), (3) のそれぞれに対し、Miura 変換は、

$$v_x - iv^2 + iu = 0$$

$$V_x + V^2 + u = -\frac{c}{6}$$

で与えられる。ここで、u は KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

の解である。

次に、MKdV方程式の従属変数を複素数にまで拡張した次のような方程式を考える。

$$v_t + 6|v|^2 v_x + v_{xxx} = 0 \tag{6}$$

$$V_t - 6|V|^2 V_x + V_{xxx} = 0 \tag{7}$$

(6)は bright 型のソリトン解をもち、(7)は dark 型のソリトン解をもつ。(6)において、$v = \frac{g}{f}$ (f: real) ととると、

$$\begin{cases} (D_t + D_x^3)\, g \cdot f = 0 \\ D_x^2 f \cdot f - 2 g g^* = 0 \end{cases} \tag{8}$$

となる。(8)は、x_1 と y_1 についての double Wronskian に関する双一次形式、

$$\begin{cases} (D_t + D_x^3 - 3 D_y D_z)\, \tau_{N-1,N+1} \cdot \tau_{NN} = 0 \\ (D_x^2 - D_y^2)\, \tau_{NN} \cdot \tau_{NN} - 2\, \tau_{N-1,N+1} \tau_{N+1,N-1} = 0 \end{cases}$$

において、reduction によって $D_y = D_z = 0$ としたものになっている。ここで、$x = x_1 + y_1$, $y = x_1 - y_1$, $z = x_2 + y_2$, $t = x_3 + y_3$ である。従って、(8)の解は、

$$f \doteqdot \tau_{NN}, \quad g \doteqdot \tau_{N-1,N+1}, \quad g^* \doteqdot \tau_{N+1,N-1}$$

で与えられる。ここで、記号 $\doteqdot$ は、x, t の一次式の指数関数倍だけの不定性があることを表す。

(7)の双一次形式は、$V = \frac{G}{F}$ (F: real), $X = x + 3t$, $T = -t$ とおくことにより、

$$\begin{cases} (D_T + 3D_X - D_X^3)\, G\cdot F = 0 \\ D_X^2\, F\cdot F + 2(GG^* - F^2) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

と得られる。これは、Wronskianについての恒等式、

$$\begin{cases} (D_T + 3D_X - D_X^3 + \frac{3}{2} D_Y D_Z)\, \tau_N^{-1}\cdot \tau_N^0 = 0 \\ (D_X^2 - D_Y^2)\, \tau_N^0 \cdot \tau_N^0 + 2(\tau_N^{-1}\tau_N^1 - \tau_N^0\tau_N^0) = 0 \end{cases}$$

において、reductionによって $D_Y = D_Z = 0$ としたものである。ただし、$X = x_1 + x_{-1}$，$Y = x_1 - x_{-1}$，$Z = x_2 + x_{-2}$，$T = x_3 + x_{-3}$ である。このように、(9)の解は、x_1, x_{-1} に関して左右両方向にWronskianの構造をもつ行列式を用いて、

$$F \doteq \tau_N^0, \quad G \doteq \tau_N^{-1}, \quad G^* \doteq \tau_N^1$$

で与えられる。

以上のように、複素変数のMKdV方程式の場合には、double Wronskianがbright型の解を与え、左右両方向のWronskianがdark型の解を与える。これらの解に対して、正則性の要請 ($f \neq 0$，$F \neq 0$) が、(6)，(7)の非線形項の符号を決めている。

(2) DS方程式

DS方程式は、符号のとり方によって四種類ある。
bright型のDS方程式は、

$$\begin{cases} iA_t - \sigma A_{xx} + A_{yy} = -|A|^2 A - 2\sigma Q A \\ \sigma Q_{xx} + Q_{yy} = -(|A|^2)_{xx} \end{cases}$$

$$Q : \text{real}, \quad \sigma = \pm 1$$

と書かれる。符号 σ によって、DSI $(\sigma = -1)$ とDSII $(\sigma = +1)$ の二種類がある。双一次形式は、変数変換

$$Q = -(2\log f)_{xx}, \quad A = \sqrt{2}\frac{g}{f}e^{-i(kx+ly-\omega t)},$$

$$X = x - 2k\sigma t, \; Y = y + 2lt, \; T = t, \quad \omega = \sigma k^2 - l^2$$

によって、

$$\begin{cases} (iD_T - \sigma D_X^2 + D_Y^2)\, g \cdot f = 0 \\ (\sigma D_X^2 + D_Y^2)\, f \cdot f - 2gg^* = 0 \end{cases}$$

となる。これは、適当な変数変換の後、

$$\begin{cases} (D_{x_2} - D_{x_1}^2)\, g \cdot f = 0 \\ (D_{y_2} + D_{y_1}^2)\, g \cdot f = 0 \\ D_{x_1} D_{y_1} f \cdot f - 2gg^* = 0 \end{cases}$$

のように分解することができ、解は、

$$f \doteq \tau_{NN}, \quad g \doteq \tau_{N+1, N-1}, \quad g^* \doteq \tau_{N-1, N+1}$$

で与えられる。DSI とDSII の違いは、独立変数のとり方に起因する。$x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, $x_2, y_2 \in i\mathbb{R}$ ととった場合は、DSI が得られ、$x_1^* = y_1$, $x_2^* = y_2$ ととった場合は DSII が得られる。reduction によって y-依存性をなくせば、bright 型の NLS 方程式、

$$iA_t + A_{xx} = -|A|^2 A$$

とその解が得られる。

dark型のDS方程式は，

$$\begin{cases} iA_t - \sigma A_{xx} + A_{yy} = |A|^2 A + 2\sigma QA \\ \sigma Q_{xx} + Q_{yy} = -(|A|^2)_{xx} \end{cases}$$

$$Q : \text{real}, \quad \sigma = \pm 1$$

である。$\sigma=-1$ のとき DSⅠ，$\sigma=+1$ のとき DSⅡ である。

上式の双一次形式は，

$$\begin{cases} (iD_T - \sigma D_X^2 + D_Y^2)\, g\cdot f = 0 \\ (\sigma D_X^2 + D_Y^2)\, f\cdot f + 2(gg^* - f^2) = 0 \end{cases}$$

である。ただし，

$$Q = (2\log f)_{xx}, \quad A = \sqrt{2}\,\frac{g}{f}\,e^{-i(kx+ly-\omega t)}$$

$$X = x - 2k\sigma t, \quad Y = y + 2lt, \quad T = t, \quad \omega = \sigma k^2 - l^2 - 2$$

と変数変換した。上の双一次形式を次のように分解することができる。

$$\begin{cases} (D_{x_2} - D_{x_1}^2)\, g\cdot f = 0 \\ (D_{x_{-2}} + D_{x_{-1}}^2)\, g\cdot f = 0 \\ D_{x_1} D_{x_{-1}}\, f\cdot f + 2(gg^* - f^2) = 0 \end{cases}$$

解は，

$$f \doteqdot \tau_N^0, \quad g \doteqdot \tau_N^1, \quad g^* \doteqdot \tau_N^{-1}$$

で与えられる。独立変数を $x_1, x_{-1} \in \mathbb{R}$，$x_2, x_{-2} \in i\mathbb{R}$ と

とった場合がDSⅠに対応し、$x_1^* = x_{-1}$, $x_2^* = x_{-2}$ ととった場合がDSⅡに対応する。reduction によって、dark型のNLS方程式、

$$iA_t + A_{xx} = |A|^2 A$$

が得られる。

(3) coupled NLS 方程式

以上のように、dark型とbright型の二種類の解がともにWronskianで書けることを利用し、この両者を組合せることによって、次のような coupled NLS 方程式の解を構成する。

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + 2(|u|^2 + |v|^2)u = 0 \\ iv_t + v_{xx} + 2(|u|^2 + |v|^2)v = 0 \end{cases} \tag{10}$$

(i) Bright + Dark 型

u について bright 型、v について dark 型の解を構成する。

$$u = \frac{g}{f} e^{i2t}, \quad v = \frac{h}{f} e^{i2t}$$

とおけば、(10)は次のような双一次形式に書ける。

$$\begin{cases} (iD_t + D_x^2)\, g \cdot f = 0 \\ (iD_t + D_x^2)\, h \cdot f = 0 \\ D_x^2 f \cdot f - 2(gg^* + hh^* - f^2) = 0 \end{cases}$$

上の才三式を分解して、

$$\begin{cases} D_x D_y f\cdot f - 2gg^* = 0 \\ D_x D_z f\cdot f - 2(hh^* - f^2) = 0 \end{cases}$$

と書くことができる。ただし、reduction によって、

$$D_x(D_y + D_z) f\cdot f = D_x^2 f\cdot f$$

ととっている。この解は、

$$f \doteqdot \tau_{NN}^{00},\quad g \doteqdot \tau_{N+1,N-1}^{00},\quad g^* \doteqdot \tau_{N-1,N+1}^{00},\quad h \doteqdot \tau_{NN}^{10},\quad h^* \doteqdot \tau_{NN}^{-10}$$

で与えられる。ただし、独立変数は、

$$x = x_1,\quad t = -ix_2,\quad y = y_1,\quad z = -x_{-1}$$

ととっている。f, g については bright 型であり、f, h については dark 型であることがわかる。

(ii) Bright + Bright 型

u, v について、ともに bright 型の解を構成する。(10) において、従属変数を、

$$u = \frac{g}{f},\quad v = \frac{h}{f}$$

とおけば、双一次形式は次のようになる。

$$\begin{cases} (iD_t + D_x^2)\, g\cdot f = 0 \\ (iD_t + D_x^2)\, h\cdot f = 0 \\ D_x^2 f\cdot f - 2(gg^* + hh^*) = 0 \end{cases}$$

上の才三式を、

$$\begin{cases} D_x D_y f\cdot f - 2gg^* = 0 \\ D_x D_z f\cdot f - 2hh^* = 0 \end{cases}$$

と分解しよう。ただし、$D_y + D_z = D_x$ と reduction をしている。ここで独立変数を、

$$x_1 = x\ ,\quad x_2 = it\ ,\quad y_1 = y\ ,\quad y_{-1} = z$$

ととれば、f, g についても bright 型、f, h についても bright 型の解が次のように書ける。

$$f \doteq \tau_{NN}^{00}\ ,\quad g \doteq \tau_{N+1,N-1}^{0\ 0}\ ,\quad g^* \doteq \tau_{N-1,N+1}^{0\ 0}\ ,\quad h \doteq \tau_{N+1,N-1}^{0\ 1}\ ,\quad h^* \doteq \tau_{N-1,N+1}^{0\ -1}$$

u と v の差は、ソリトンの位相がずれたものであることを注意しておく。

上記の (i) と (ii) を組合せて、次のような三成分の coupled NLS 方程式も構成できる。

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + 2\left(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2\right) u = 0 \\ iv_t + v_{xx} + 2\left(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2\right) v = 0 \\ iw_t + w_{xx} + 2\left(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2\right) w = 0 \end{cases}$$

この解は、次のように与えられる。

$$u = \frac{g}{f} e^{i2t}\ ,\quad v = \frac{h}{f} e^{i2t}\ ,\quad w = \frac{k}{f} e^{i2t}$$

$$f \doteq \tau_{NN}^{00}\ ,\quad g \doteq \tau_{N+1,N-1}^{0\ 0}\ ,\quad g^* \doteq \tau_{N-1,N+1}^{0\ 0}$$

$$h \doteq \tau_{N+1,N-1}^{0\ 1}\ ,\quad h^* \doteq \tau_{N-1,N+1}^{0\ -1}\ ,\quad k \doteq \tau_{NN}^{10}\ ,\quad k^* \doteq \tau_{NN}^{-10}$$

$$x = x_1\ ,\quad t = -ix_2$$

ただし、reduction によって $D_{x_1} + D_{x_{-1}} - D_{y_1} - D_{y_{-1}} = 0$ ととってある。u, v については bright 型、w については

dark 型の解になっている。

§3. 代数ソリトン解

まず、最も簡単な例であるKP方程式の代数ソリトン解のWronskian表現を与える。KP方程式，

$$(-4u_{x_3}+6uu_{x_1}+u_{x_1x_1x_1})_{x_1}+3u_{x_2x_2}=0$$

は従属変数変換 $u=(2\log f)_{x_1x_1}$ によって，

$$(D_{x_1}^4-4D_{x_1}D_{x_3}+3D_{x_2}^2)f\cdot f=0$$

となり，その解は $f=\tau_N$ で与えられる。ここで，Wronskianの各要素 φ_i は，分散関係式，

$$\partial_{x_k}\varphi_i=\partial_{x_1}^k\varphi_i \qquad (k=1,2,3) \qquad (11)$$

を満足する関数ならば何でもよく，特に，

$$\varphi_i=e^{\eta_i}+e^{\xi_i}$$

$$\eta_i=p_ix_1+p_i^2x_2+p_i^3x_3+\eta_i^{(0)}$$

$$\xi_i=q_ix_1+q_i^2x_2+q_i^3x_3+\xi_i^{(0)}$$

ととった場合，$f=\tau_N$ は N ソリトン解を与える。

さて，e^{η} $(\eta=px_1+p^2x_2+p^3x_3+\eta^{(0)})$ は，分散関係(11)を満たす：

$$\partial_{x_k}e^{\eta}=\partial_{x_1}^k e^{\eta}.$$

上式の両辺をパラメタ p で微分すると，

$$\partial_{x_k}(x_1+2px_2+3p^2x_3)e^{\eta}=\partial_{x_1}^k(x_1+2px_2+3p^2x_3)e^{\eta}$$

を得る。すなわち、$(x_1+2px_2+3p^2x_3)e^{\eta}$ も (11) を満足する。$\varphi_i = \theta_i e^{\eta_i}$ $(\theta_i = x_1+2p_ix_2+3p_i^2x_3+\theta_{i0})$ ととれば、

$$f = \tau_N = \begin{vmatrix} \theta_1 e^{\eta_1} & (p_1\theta_1+1)e^{\eta_1} & \cdots \\ \theta_2 e^{\eta_2} & (p_2\theta_2+1)e^{\eta_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ \theta_N e^{\eta_N} & (p_N\theta_N+1)e^{\eta_N} & \cdots \end{vmatrix}$$

となる。f には指数関数倍の不定性があるので、

$$f \doteqdot \begin{vmatrix} \theta_1 & p_1\theta_1+1 & \cdots \\ \theta_2 & p_2\theta_2+1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ \theta_N & p_N\theta_N+1 & \cdots \end{vmatrix}$$

となり、これがKP方程式の代数ソリトン解を与える。波数 p_i で微分したことにより、x_1, x_2, x_3 に関するweightが inhomogeneous であることがわかる。また、この解はN個の任意パラメタ p_i $(i=1,\cdots,N)$ を含んでいる。

φ_i のとり方としては、上記以外にも

$$\varphi_i = \partial_{p_i}^2 e^{\eta_i} = (\theta_i^2 + 2x_2 + 6p_ix_3)e^{\eta_i}$$

$$\varphi_i = \partial_{p_i}^3 e^{\eta_i} = \{\theta_i^3 + (6x_2+18p_ix_3)\theta_i + 6x_3\}e^{\eta_i}$$

$$\vdots$$

などがあり、高次の代数ソリトン解を得ることができる。

次に、DS方程式

$$
\begin{cases}
iA_t - A_{xx} + A_{yy} = -|A|^2 A - 2QA \\
Q_{xx} + Q_{yy} = -(|A|^2)_{xx}
\end{cases}
$$

のランプソリトン解の double Wronskian 構造を考える。

上式の double Wronskian 解

$$
Q = -(2\log \tau_{11})_{xx}, \qquad A = \sqrt{2}\,\frac{\tau_{20}}{\tau_{11}}
$$

$$
\tau_{11} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix}, \qquad \tau_{20} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \partial_{x_1}\varphi_1 \\ \varphi_2 & \partial_{x_1}\varphi_2 \end{vmatrix}
$$

において，

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= e^{p x_1 + p^2 x_2 + \eta^{(0)}} \\
\varphi_2 &= (x_1 + 2q^* x_2)\, e^{q^* x_1 + q^{*2} x_2 + \xi^{(0)*}} \\
\psi_1 &= -(y_1 + 2q y_2)\, e^{q y_1 + q^2 y_2 + \xi^{(0)}} \\
\psi_2 &= e^{p^* y_1 + p^{*2} y_2 + \eta^{(0)*}}
\end{aligned}
$$

ととれば，

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{(X^2 - Y^2)e^{-2\theta} - 2(aX-1)^2 - 2(aY)^2 + 1}{\{e^{\theta} + (X^2+Y^2)e^{-\theta}\}^2} \\
A &= \sqrt{2}\, e^{i\phi}\, \frac{(-aX + bY + 1) - i(bX + aY)}{e^{\theta} + (X^2+Y^2)e^{-\theta}}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

となる。ただし，

$$
\begin{aligned}
\theta &= aX - bY + abt + \theta_0 \\
\phi &= cX + dY + \left\{ \frac{d^2 - c^2}{2} - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \right\} t + \phi_0
\end{aligned}
$$

$$
X = \frac{x}{2} - \frac{b-c}{2}t, \qquad Y = \frac{y}{2} - \frac{d-a}{2}t
$$

である。このように、指数関数型と代数型の混合した解も容易に得ることができる。(12)はDS方程式のランプソリトン解[5]になっている。

§4. まとめ

ソリトン方程式の解のWronskian表現に注目することによって、brightとdarkの二種類のソリトン解の構造を明らかにすることができる。これらの二種類の解があることを利用して、coupled NLS方程式のWronskian解を構成した。また、通常のソリトン解以外の解として、代数ソリトン解もWronskianを用いて、簡単に表現できることを示した。

Ref.

1) M. Sato, RIMS Kokyuroku 439 (1981) 30.
M. Jimbo and T. Miwa, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 19 (1983) 94

2) J. Satsuma, J. Phys. Soc. Jpn. 46 (1979) 359.
N. C. Freeman and J. J. C. Nimmo, Phys. Lett. 95A (1983) 1.
J. J. C. Nimmo and N. C. Freeman, Phys. Lett. 95A (1983) 4.
N. C. Freeman, IMA J. Appl. Math. 32 (1984) 125.

3) J. J. C. Nimmo and N. C. Freeman, Phys. Lett. 96A (1983) 443

4) J. Satsuma and M. J. Ablowitz, J. Math. Phys. 20 (1979) 1496.

5) A. Nakamura, J. Math. Phys. 23 (1982) 1422.

6) R. Hirota, Y. Ohta and J. Satsuma, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 94 (1988) 59.