

BKP 方程式系の解の pfaffian による表示と積分方程式

広 工 広田良吾 (Ryogo Hirota)

結論 I. BKP 方程式系は Bilinear form で表示すると

$$(D_1^6 - 5D_1^3 D_3 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5) \tau \cdot \tau = 0,$$

となるが, 解 τ を pfaffian で表示すると, Bilinear form は pfaffian の identity に等しくなる。この identity は Sato の Maya diagram にあうて

$$\begin{aligned} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \circ & \circ & \circ & \circ \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \\ = & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \circ & \circ & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \circ & \circ \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \circ & \circ & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \circ & & \circ \\ \hline \end{array} \\ + & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \circ & & & \circ \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \circ & \circ & \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

と表示される。

結論 II. BKP 方程式系の積分方程式は

$$K(x, z) + F(x, z) - \int_{-\infty}^x D_y K(x, y) \cdot F(y, z) dy = 0,$$

∴ ∴ τ

$$F(x, z) = -F(z, x),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} K(x, z) \Big|_{z=x} = \frac{\partial}{\partial x} \log \tau.$$

である。この積分方程式は KP 方程式系における Gel'fand-Levitan integral equation

$$K(x, z) + F(x, z) + \int_{-\infty}^x K(x, y) F(y, z) dy = 0,$$

∴ ∴ τ

$$K(x, z) \Big|_{z=x} = \frac{\partial}{\partial x} \log \tau,$$

に相当する。

§ I.1 BKP 方程式の pfaffian による解 τ の表示。

BKP 方程式系は Bilinear form τ

$$[(D_3 - D_1^3)D_1 + 3D_1^2] \tau \cdot \tau = 0,$$

$$[D_1^6 - 5D_1^3 D_3 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5] \tau \cdot \tau = 0,$$

と表される。BKP 方程式系を reduction すると、次のような非線形波動方程式

(1) Sawada-Kotera equation ($D_3 = 0$)

$$U_t + U_{5x} + 15(UU_{3x} + U_x U_{xx}) + 45U^2 U_x = 0.$$

(2) Ramani's equation ($D_5 = 0$)

(3) KdV + Sawada-Kotera equation ($D_3 = D_1$)

$$U_t + a(3U^2 + U_{xxx})_x + b(15U^3 + 15UU_{xx} + U_{4x})_x = 0,$$

(この式は空間一次元における重力の共鳴現象を記述している)。

(4) Model equation for shallow water wave ($D_3 = D_1$)

$$Y_t - Y_{xxt} - 3YY_t + 3Y_x \int_x^\infty Y_t dx + Y_x = 0.$$

が生成されることが知られている。

KP方程式系の解では M. Sato により Wronskian で表示され、この表示を便うと Bilinear form は行列式に対する identity (Plücker relation) に等しいことが知られている。これに対応して BKP方程式系の解では pfaffian で表示され、この表示を便うと BKP方程式系の Bilinear form は、pfaffian に対する identity (行列式における Jacobi の等式の一般化) に等しいことを以下に示す。

§ I. 2 Pfaffianの数学

(i) Pfaffianの定義

Pfaffianについてはあまり知られていないので、ここで Pfaffianの諸性質について説明する。

n 次の反対称行列 A を考えよ。 A の Pfaffian, $\text{pf } A$ は $\det A$ の平方根として定義される:

$$\det A = [\text{pf } A]^2.$$

例]

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{vmatrix} = [a_{12}]^2, \quad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = [a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}]^2.$$

$\text{pf } A \pm (1, 2, \dots, n)$ と表記する。奇数次の $\text{pf } A$ は 0 である。

例]

$$(1, 2, 3, 4) = (1, 2)(3, 4) - (1, 3)(2, 4) + (1, 4)(2, 3).$$

Pfaffianの最も基本的な展開則は

$$(1, 2, \dots, 2n)$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j (1, j) (2, \dots, \hat{j}, \dots, 2n)$$

である。ここで \hat{j} は j は除外されることを示す。また

$$(j, k) = -(k, j)$$

である。逆に pfaffian はこの展開則によつて定義される。

例 1.

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$= (1, 2)(3, 4, 5, 6) - (1, 3)(2, 4, 5, 6) + (1, 4)(2, 3, 5, 6) \\ - (1, 5)(2, 3, 4, 6) + (1, 6)(2, 3, 4, 5).$$

例 2.

$$(1, 2, 2^*, 1^*) = (1, 2)(2^*, 1^*) - (1, 2^*)(2, 1^*) + (1, 1^*)(2, 2^*),$$

ここで

$$(i, j) = (i^*, j^*) = 0 \quad \text{と定めると}$$

$$(1, 2, 2^*, 1^*) = \det \begin{vmatrix} (1, 1^*) & (1, 2^*) \\ (2, 1^*) & (2, 2^*) \end{vmatrix}$$

である。

一般に

$$(1, 2, \dots, n, n^*, \dots, 2^*, 1^*) = \det |(j, k^*)|_{1 \leq j, k \leq n}$$

である。

関数の微分を表わす pfaffian として，次の記号を導入する

$$(d_n, j) \equiv \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_j(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(d_n, d_m) \equiv 0, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots.$$

例. Wronskian

$$\begin{aligned} (d_0, d_1, 2, 1) &= -(d_0, 2)(d_1, 1) + (d_0, 1)(d_1, 2) \\ &= -f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ &= W_r(f_1, f_2). \end{aligned}$$

一般に

$$(d_0, d_1, \dots, d_{n-1}, n, \dots, 2, 1) = W_r(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

である。

(ii) Pfaffian の展開定理.

$$\begin{aligned} &(a_1, a_2, 1, 2, \dots, 2n) \\ &= \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j [(a_1, a_2, 1, j)(2, 3, \dots, \hat{j}, \dots, 2n) \\ &\quad + (1, j)(a_1, a_2, 2, 3, \dots, \hat{j}, \dots, 2n)] \\ &\quad + (a_1, a_2)(1, 2, \dots, 2n). \end{aligned}$$

証明,

$$(a_1, a_2, 1, 2, \dots, 2n) \\ = (1, a_1, a_2, 2, \dots, 2n).$$

これを展開して

$$= (1, a_1)(a_2, 2, \dots, 2n) - (1, a_2)(a_1, 2, \dots, 2n) \\ + \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j (1, j)(a_1, a_2, 2, 3, \dots, \hat{j}, \dots, 2n). \quad (*)$$

$$- \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j (a_1, a_2, 1, j)(2, 3, \dots, \hat{j}, \dots, 2n) \\ = \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j [(a_1, a_2)(1, j) - (a_1, 1)(a_2, j) + (a_1, j)(a_2, 1)] (2, 3, \dots, \hat{j}, \dots, 2n)$$

展開定理を逆に用いて、右辺の3つを

$$= (a_1, a_2)(1, 2, \dots, 2n) - (a_1, 1)(a_2, 2, 3, \dots, 2n) \\ - (1, a_2)(a_1, 2, 3, \dots, 2n) \quad (**)$$

(*)式から(**)式を引くと

$$(a_1, a_2, 1, 2, \dots, 2n) \\ = \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j [(a_1, a_2, 1, j)(2, 3, \dots, \hat{j}, \dots, 2n) + (1, j)(a_1, a_2, 2, 3, \dots, \hat{j}, \dots, 2n)] \\ - (a_1, a_2)(1, 2, \dots, 2n)$$

と得る (証明終)

この展開定理は pfaffian の微分則の計算に使う。

ここで pfaffian の minor (行列式の小行列式に対応するもの) を導入する。

n 次の pfaffian $(1, 2, \dots, n)$ から任意の l ($l < n$) 個の数字 $\{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ を除くこと作, l ($n-l$) 次の pfaffian \in pfaffian $(1, 2, \dots, n)$ の minor と呼ぶ, $M(j_1, j_2, \dots, j_l)$ と略記する。

この記号を便ると次の展開定理が成り立つ (証明略)

$$(a_1, a_2, \dots, a_l, 1, 2, \dots, n)$$

$$= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq n} \dots \sum (-1)^{P_l} (a_1, a_2, \dots, a_l, j_1, j_2, \dots, j_l) M(j_1, j_2, \dots, j_l)$$

$$\text{ここで } P_l = j_1 + j_2 + \dots + j_l - \frac{l}{2}(l+1),$$

$$(a_j, a_k) = 0, \quad j, k = 1, 2, \dots, l,$$

$M(j_1, j_2, \dots, j_l)$ は pfaffian $(1, 2, \dots, n)$ の minor.

例. $(d_0, d_1) = 0$ のとき,

$$(d_0, d_1, 1, 2, 3, 4)$$

$$= (d_0, d_1, 1, 2)(3, 4) - (d_0, d_1, 1, 3)(2, 4) + (d_0, d_1, 1, 4)(2, 3) \\ + (d_0, d_1, 2, 3)(1, 4) - (d_0, d_1, 2, 4)(1, 3) + (d_0, d_1, 3, 4)(1, 2).$$

この展開定理は pfaffian の高次微分の計算で使う。

(iii) Pfaffian の恒等式

Pfaffian には色々な恒等式があるが、その中で最も重要なものは次式である (証明略)

任意の自然数 m, n に対して

$$(a_1, a_2, \dots, a_m, 1, 2, \dots, n)(1, 2, \dots, n) \\ = \sum_{j=2}^n (-1)^j (a_1, a_j, 1, 2, \dots, n)(a_2, a_3, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_m, 1, 2, \dots, n)$$

が成立する。

例. $m=4$ のとき

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, 1, 2, \dots, n)(1, 2, \dots, n) \\ = (a_1, a_2, 1, 2, \dots, n)(a_3, a_4, 1, 2, \dots, n) - (a_1, a_3, 1, 2, \dots, n)(a_2, a_4, 1, \dots, n) \\ + (a_1, a_4, 1, 2, \dots, n)(a_2, a_3, 1, 2, \dots, n).$$

この恒等式は M. Sato の Maya diagram に存らって、次の図のように表示する:

$$\begin{array}{l}
 a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \quad a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \circ & \circ & \circ & \circ \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \\
 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \circ & \circ & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \circ & \circ \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \circ & \circ & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \circ & \circ \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \circ & & & \circ \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \circ & \circ & \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

§I.3 BKP方程式の解

BKP方程式

$$(D_1^6 - 5D_1^3 D_3 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5) \tau \cdot \tau = 0$$

を考える。

この方程式の 2-soliton 解 τ_2 は Date, Jimbo, Kashiwara,

Miwa によつて

$$\tau_2 = 1 + e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2} + \beta_{12} e^{\zeta_1 + \zeta_2},$$

ここで

$$\zeta_i = (p_i + q_i)x_1 + (p_i^3 + q_i^3)x_3 + (p_i^5 + q_i^5)x_5 + \dots, \quad i=1,2,$$

$$\beta_{12} = \frac{(p_1 - q_1)(p_1 - q_2)(p_2 - q_1)(p_2 - q_2)}{(p_1 + q_1)(p_1 + q_2)(p_2 + q_1)(p_2 + q_2)},$$

と定るとが知られてゐる。

この解はもうすこし一般化できて

$$\begin{aligned} \tau_2 = & \left(a_{11} + \frac{p_1 - q_1}{p_1 + q_1} e^{\xi_1 + \hat{\xi}_1} \right) \left(a_{22} + \frac{p_2 - q_2}{p_2 + q_2} e^{\xi_2 + \hat{\xi}_2} \right) \\ & - \left(a_{12} + \frac{p_1 - q_2}{p_1 + q_2} e^{\xi_1 + \hat{\xi}_2} \right) \left(a_{21} + \frac{p_2 - q_1}{p_2 + q_1} e^{\xi_2 + \hat{\xi}_1} \right) \\ & - \left(b_{12} + \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} e^{\xi_1 + \xi_2} \right) \left(b_{21} + \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} e^{\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2} \right), \end{aligned}$$

ここで

a_{ij}, b_{ij} は const,

$$\xi_i = p_i x_i + p_i^3 x_3 + p_i^5 x_5 + \dots,$$

$$\hat{\xi}_i = q_i x_i + q_i^3 x_3 + q_i^5 x_5 + \dots,$$

と拡張される。この種の計算には数式処理が非常に役に立つ。この τ_2 は pfaffian の形

$$\begin{aligned} \tau_2 = & (1, 2, 3, 4) \\ = & (1, 2)(3, 4) - (1, 3)(2, 4) + (1, 4)(2, 3) \end{aligned}$$

と表せる。

一般に n -soliton 解 τ_n は $2n$ 次の pfaffian で表現出来る:

$$\tau_n = (1, 2, \dots, 2n)$$

ここで

$$(j, k) = C_{jk} + \int_{-\infty}^x D_{x'} f_j(x') \cdot f_k(x') dx',$$

ただし

$c_{jk} = -c_{kj}$ は const であり, f_j は次の線形偏微分方程式
をみたす ($x_i = x$),

$$\frac{\partial}{\partial x_m} f_j(x) = \frac{\partial^m}{\partial x^m} f_j(x), \quad m \text{ は 奇数.}$$

例. $f_j = e^{\xi_j}$, とすると

$$(j, k) = c_{jk} + \frac{p_j - p_k}{p_j + p_k} e^{\xi_j + \xi_k}$$

である。

$\tau_n = (1, 2, \dots, 2n)$ を証明するには, pfaffian に対する微分則の表現法が必要になる。

§I.4 Pfaffian の微分則

Bilinear form の BKP 方程式は

$$(D_1^6 - 5D_1^3 D_3^2 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5) \tau \cdot \tau = 0$$

であるが, これを通常の微分で書き表わすと

$$\left[\left(\frac{\partial^6}{\partial x_1^6} - 5 \frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_3} - 5 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 9 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_5} \right) \tau \right] \tau \\ + 3 \left[\left(-2 \frac{\partial^5}{\partial x_1^5} + 5 \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_3} - 3 \frac{\partial}{\partial x_5} \right) \tau \right] \left[\frac{\partial \tau}{\partial x_1} \right]$$

$$-15 \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} \right) \tau \right] \left[\frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} \right]$$

$$- 5 \left[\left(2 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \tau \right] \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \tau \right] = 0$$

に於て。 pfaffian の微分則を調べる。

Pfaffian の要素 (j, k) が

$$(j, k) = c_{jk} + \int_{-\infty}^x D_{x'} f_j(x') \cdot f_k(x') dx'$$

で与えられるとき、まず要素 (j, k) の微分則を調べる。

∴

$$\frac{\partial}{\partial x^n} f_j(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_j(x) \quad \text{for odd } n.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (j, k) &= D_x f_j(x) \cdot f_k(x) \\ &= \frac{\partial f_j}{\partial x} f_k - f_j \frac{\partial f_k}{\partial x}, \end{aligned}$$

§ I. 2 で導入した記号

$$(d_n, j) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_j(x),$$

$$(d_n, d_m) = 0,$$

∴ と、 (j, k) の x -微分は pfaffian で表現され

$$\frac{\partial}{\partial x} (j, k) = (d_0, d_1, j, k)$$

とある。2n次の pfaffian の x-微分は、展開定理と便し
と

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (1, 2, \dots, 2n) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j (1, j) (2, 3, \dots, \hat{j}, \dots, 2n) \\ &= \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j [(d_0, d_1, 1, j) (2, 3, \dots, \hat{j}, \dots, 2n) \\ & \quad + (1, j) (d_0, d_1, 2, 3, \dots, \hat{j}, \dots, 2n)] \end{aligned}$$

(ここで、数学的帰納法と便し)

$$= (d_0, d_1, 1, 2, \dots, 2n)$$

とある。同じように計算を続けて、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (1, 2, \dots, 2n) = (d_0, d_2, 1, 2, \dots, 2n),$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} (1, 2, \dots, 2n) = (d_1, d_2, 1, 2, \dots, 2n) + (d_0, d_3, 1, 2, \dots, 2n),$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} (1, 2, \dots, 2n) = 2(d_1, d_3, 1, 2, \dots, 2n) + (d_0, d_4, 1, 2, \dots, 2n),$$

$$\frac{\partial^5}{\partial x^5} (1, 2, \dots, 2n) = 2(d_2, d_3, 1, 2, \dots, 2n)$$

$$+ 3(d_1, d_4, 1, 2, \dots, 2n) + (d_0, d_5, 1, 2, \dots, 2n),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6}{\partial x^6}(1, 2, \dots, 2n) &= 5(d_2, d_4, 1, 2, \dots, 2n) + 4(d_1, d_5, 1, 2, \dots, 2n) \\ &\quad + (d_0, d_6, 1, 2, \dots, 2n) + 2(d_0, d_1, d_2, d_3, 1, 2, \dots, 2n), \end{aligned}$$

を得る。

次に (j, k) 要素の x_3 -微分を計算する。

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(j, k) = \int_{-\infty}^x D_x \left(\frac{\partial^3 f_j}{\partial x^3} \cdot f_k + f_j \cdot \frac{\partial^3 f_k}{\partial x^3} \right) dx.$$

右辺は部分積分をくり返すと

$$= \left(\frac{\partial^3 f_j}{\partial x^3} \right) f_k - f_j \left(\frac{\partial^3 f_k}{\partial x^3} \right) - 2 \left[\left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial f_k}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial f_j}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} \right) \right]$$

となるが、この式を pfaffian で表現される：

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(j, k) = (d_0, d_3, j, k) - 2(d_1, d_2, j, k).$$

これより $2n$ 次の pfaffian の x_3 -微分は

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(1, \dots, 2n) = (d_0, d_3, 1, \dots, 2n) - 2(d_1, d_2, 1, \dots, 2n)$$

となる。同様にして

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x_3}(1, \dots, 2n) = -(d_1, d_3, 1, \dots, 2n) + (d_0, d_4, 1, \dots, 2n),$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3 \partial x_3}(1, \dots, 2n) = -(d_2, d_4, 1, \dots, 2n) + (d_0, d_5, 1, \dots, 2n),$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial x_3} (1, \dots, 2n) = -(d_2, d_4, 1, \dots, 2n) + (d_1, d_5, 1, \dots, 2n) \\ + (d_0, d_6, 1, \dots, 2n) - (d_0, d_1, d_2, d_3, 1, \dots, 2n),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (1, \dots, 2n) = 2(d_2, d_4, 1, \dots, 2n) - 2(d_1, d_5, 1, \dots, 2n) \\ + (d_0, d_6, 1, \dots, 2n) - 4(d_0, d_1, d_2, d_3, 1, \dots, 2n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_5} (1, \dots, 2n) = (d_0, d_5, 1, \dots, 2n) - 2(d_1, d_4, 1, \dots, 2n) \\ + 2(d_2, d_3, 1, \dots, 2n),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_5} (1, \dots, 2n) = -(d_1, d_5, 1, \dots, 2n) + (d_0, d_6, 1, \dots, 2n) \\ + 2(d_0, d_1, d_2, d_3, 1, \dots, 2n),$$

を得る。

これらの結果を BKP 方程式に代入すると

$$(d_0, d_1, d_2, d_3, 1, \dots, 2n)(1, \dots, 2n) \\ - (d_0, d_1, 1, \dots, 2n)(d_2, d_3, 1, \dots, 2n) \\ + (d_0, d_2, 1, \dots, 2n)(d_1, d_3, 1, \dots, 2n) \\ - (d_0, d_3, 1, \dots, 2n)(d_1, d_2, 1, \dots, 2n) = 0$$

となる。この式は pfaffian の identity である。

結論として BKP 方程式の解は pfaffian で表現され、その時 Bilinear form は pfaffian の identity に等しい。

§II.1 Dressing method による KP 方程式系の構成

Zakharov and Shabat による "dressing method" は Soliton 方程式を研究する有力な一方法である。はじめにこの方法の復習をする。

線形の積分演算子 \hat{F} を定義する:

$$\hat{F} \circ \psi = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) \psi(y) dy.$$

この演算子 \hat{F} の "Volterra decomposition"

$$1 + \hat{F} = (1 + K)^{-1} (1 + \tilde{K})$$

を考える。ここで

$$K(x, z) = 0, \quad \text{for } z > x,$$

$$\tilde{K}(x, z) = 0, \quad \text{for } z < x$$

である。この式に $1 + K$ を左から作用させると次の Gelfand-Levitan equation が得られる。

$$K(x, z) + F(x, z) + \int_{-\infty}^x K(x, y) F(y, z) dy = 0, \quad z < x.$$

次に "bare" operator M_n と "bare" wave function f を定義する。 M_n は線形偏微分演算子 例之は

$$M_n = \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n},$$

であり, f はその解である:

$$M_n f = 0.$$

"dressed" operator \tilde{A}_n と "dressed" wave function ψ は Volterra operator $1+K$ を使って "bare" の M_n と f から構成される:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n &= (1+K) M_n (1+K)^{-1} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n} - \sum_{j=1}^{n-1} u_j \frac{\partial^{n-1-j}}{\partial x^{n-1-j}}, \end{aligned}$$

$$\psi = (1+K) \circ f.$$

この構成法によつて $\tilde{A}_n \psi = 0$ である。この \tilde{A}_n が Lax-pair を与える。

$\tilde{A}_n(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ は上の定義から得られる次の積分方程式

$$\tilde{A}_n (1+K) \circ f - (1+K) \circ M_n f = 0$$

によつて決定される。

交換関係

$$[\tilde{A}_n, \tilde{A}_m] = 0 \quad \text{for } n, m \geq 1$$

は KP 方程式系 ε と ε_3 。

§ II.2 BKP 方程式の Lax-pair

BKP 方程式

$$(D_1^6 - 5D_1^3 D_3 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5) \tau \cdot \tau = 0$$

この Lax-pair は上式の Bäcklund transformation

$$\begin{cases} (D_1^3 - D_3) \tau' \cdot \tau = 0 \\ (D_1^5 + 5D_3 D_1^2 - 6D_5) \tau' \cdot \tau = 0 \end{cases}$$

から求められる:

$$\tau' = \psi \tau, \quad w = \frac{\partial}{\partial x} \log \tau$$

とおくと, Bäcklund transformation は次の Lax-pair になる。

$$\begin{cases} \tilde{B}_3 \psi = 0, \\ \tilde{B}_5 \psi = 0. \end{cases}$$

ここで

$$\tilde{B}_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6w_x \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\tilde{B}_5 = \frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{\partial^5}{\partial x^5} - 10w_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 10w_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{10}{3} (2w_{xxx} + 6w_x^2 + \frac{\partial w}{\partial x_3}) \frac{\partial}{\partial x}.$$

この Lax-pair \tilde{B}_3, \tilde{B}_5 は当然のことだが, KP 方程式系の Lax-pair \tilde{A}_3, \tilde{A}_5 とは異なる。微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ を含まない項が 0 になっている。しかし \tilde{B}_3, \tilde{B}_5 の "bare" operator は \tilde{A}_3, \tilde{A}_5 と与えるものと同じく M_3, M_5 であると推定される。

同じ "bare" operator から出発して, 異, T : "dressing" operator \bar{B}_3, \bar{B}_5 を構成するためには, "dressing method" の修正が必要である。ここでは積分演算子

$$\hat{F} \circ \psi = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) \psi(y) dy$$

を修正する。

§ II.3 Dressing method による BKP 方程式系の構成
次のように新しい線形積分演算子 \tilde{F} を導入する。

$$\tilde{F} \circ \psi = - \int_{-\infty}^{\infty} D_y F(x, y) \cdot \psi(y) dy$$

$$\equiv - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \psi(y) - F(x, y) \frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \right] dy.$$

この積分演算子に対する存在条件等については現在のところ何も分らない。以下では形式的議論を展開し、計算は具体例についてのみ行う。

この演算子の形式的な "Volterra decomposition" により、次の新しい積分方程式を得る:

$$K(x, z) + F(x, z) - \int_{-\infty}^x D_y K(x, y) \cdot F(y, z) dy = 0, \quad \text{for } z < x.$$

ここで、 $F(x, z)$ に対して新しい条件

$$F(x, z) = -F(z, x),$$

$$F(x, -\infty) = 0$$

を課す。このとき $K(x, z) \in F$ で表わした形式解は

$$K(x, x) = 0$$

を満足する。(証明略)。

BKP方程式系を構成するために、次の "bare" operator M_n と "bare" wave function f_p から出発する。

$$M_n = \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n},$$

$$M_n f_p = 0, \quad \text{for odd } n.$$

"dressed" operator \tilde{B}_n

$$\tilde{B}_n = \frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n} - \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{u}_j \frac{\partial^{n-1-j}}{\partial x^{n-1-j}}$$

ε新し…積分方程式

$$\tilde{B}_n (1+K) \circ f_p - (1+K) \circ M_n f_p = 0$$

or

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n} - \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{u}_j \frac{\partial^{n-1-j}}{\partial x^{n-1-j}} \right) \left[f_p - \int_{-\infty}^x D_y K(x, y) \cdot f_p(y) dy \right]$$

$$- \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n} \right) f_p - \int_{-\infty}^x D_y K(x, y) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial^n}{\partial y^n} \right) f_p(y) dy \right\} = 0$$

によって決定する。

この積分方程式より, $n=3$ の場合, 次の関係式が得られる。

$$\tilde{u}_1 = 0, \quad \tilde{u}_2 = 6 \frac{d}{dx} K_y(x, x),$$

$$\tilde{u}_3 = \tilde{u}_2 K_y(x, x) + 3 \frac{d}{dx} K_{xy}(x, x),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \tilde{u}_2 \frac{\partial}{\partial x} - \tilde{u}_3 \right] K(x, y) = 0,$$

ただし

$$K_{\underbrace{xx \cdots x}_m \underbrace{yy \cdots y}_n}(x, x) \equiv \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} K(x, y) \Big|_{y=x}$$

である。

ここで \tilde{B}_3 が BKP 方程式の Lax-pair であるための条件

$$\tilde{u}_3 = 0$$

を便うと, $K_{xy}(x, x)$ と $K_y(x, x)$ は次の関係式

$$\frac{d}{dx} K_y(x, x)^2 + K_{xy}(x, x) = 0$$

で結ばれていることが分る。(ただし積分定数は 0 にとり, F.)

ここで従属変数 w を

$$w = K_y(x, x)$$

を導入すると,

$$\tilde{B}_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6w_x \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^3}{\partial y^3} - 6w_x \frac{\partial}{\partial x} \right] K(x, y) = 0,$$

となり, この \tilde{B}_3 は前章で得られた結果と一致している。

次に, $n=5$ の場合, $\tilde{B}_5 \varepsilon$

$$\tilde{B}_5 = \frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{\partial^5}{\partial x^5} + u_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + u_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x} + u_4$$

とおき, 積分方程式

$$\tilde{B}_5(1+K) \cdot f_p - (1+K) \cdot M_5 f_p = 0$$

u 代入すると, (面倒な計算の結果)

$$u_1 = -10 \frac{d}{dx} K_y,$$

$$u_2 = 2u_1 K_y - 10(2K_{xxy} + 3K_{xyy} + K_{yyy}),$$

$$u_3 = u_1(6K_{xy} + 4K_{yy}) + 2u_2 K_y \\ - 10(2K_{xxxxy} + 4K_{xxxyy} + 3K_{xyyyy} + K_{yyyyy}),$$

$$u_4 = u_1(3K_{xxy} + 3K_{xyy} + K_{yyy}) + u_2(2K_{xy} + K_{yy}) + u_3 K_y \\ - 5(K_{xxxxxy} + 2K_{xxxxyy} + 2K_{xxxyyy} + K_{xyyyyy}),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{\partial^5}{\partial x^5} - \frac{\partial^5}{\partial y^5} + u_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + u_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x} + u_4 \right] K(x,y) = 0,$$

が得られる。

$$\therefore \tau'' K_y(x,x) = w, \quad \frac{d^n}{dx^n} K(x,x) = 0, \quad n=0,1,2,\dots \quad \varepsilon \text{ 用いずと,}$$

$$u_1 = -10w_x, \quad u_2 = -10w_{xx},$$

$$u_3 = -\frac{10}{3} \left(2w_{xxx} + 6w_x^2 + \frac{\partial w}{\partial x_3} \right), \quad u_4 = 0,$$

となる。結局

$$\begin{aligned} \tilde{B}_5 = & \frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{\partial^5}{\partial x^5} - 10w_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 10w_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ & - \frac{10}{3} \left(2w_{xxx} + 6w_x^2 + \frac{\partial w}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned}$$

となり、前章の結果が得られる。

結論として Zakharov & Shabat の "dressing method" により、 BKP 方程式系は構成出来る。ただし Gelfand-Levitan integral equation の代りに、次の積分方程式

$$K(x, z) + F(x, z) - \int_{-\infty}^x D_y K(x, y) \cdot F(y, z) dy = 0,$$

にて

$$F(x, z) = -F(z, x), \quad F(x, -\infty) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} K(x, z) \Big|_{z=x} = \frac{\partial}{\partial x} \log \tau$$

に便が必要である。

§II.4 積分方程式の特解

前章で導入した積分方程式

$$K(x, z) + F(x, z) - \int_{-\infty}^x D_y K(x, y) \cdot F(y, z) dy = 0$$

$$F(x, y) = -F(y, x)$$

の特解は Gelfand-Levitan 方程式と全く同じようにして求められる。

前章で $K(x, y)$ は次の微分方程式

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^3}{\partial y^3} - 6w_x \frac{\partial}{\partial x} \right] K(x, y) = 0, \quad w = K_y(x, x).$$

を満たすことを示したが、以下で $F(x, y)$ は上式で $w_x = 0$ とした式

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right] F(x, y) = 0$$

の解であると仮定する。この方程式の解で条件 $F(x, y) = -F(y, x)$ を満たすものとして以下の形を考へる

$$F(x, y) = - \sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} f_j(x) (C^{-1})_{jk} f_k(y)$$

ここで、 C は $2n$ 次の反対称行列で C の j, k 成分は C_{jk} である。 $f_j(x)$ ($j=1, 2, \dots, 2n$) は "bare" wave function:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_m} - \frac{\partial^n}{\partial x^n}\right) f_j(x) = 0, \text{ for odd } n,$$

境界条件: $f_j(-\infty) = 0$, とする.

$K(x, y)$ として

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{2n} \xi_j(x) f_j(y)$$

の形の解を仮定する. 次に $2n \times 2n$ の行列 E と A を導入する:

$$(E)_{jk} = \delta_{jk} \quad : \text{単位行列}$$

$$(A)_{jk} = \int_{-\infty}^x D_y f_j(y) \cdot f_k(y) dy; \quad \text{反対称行列.}$$

更に $2n$ 次の列ベクトル $\underline{f}(x)$ と $\underline{\xi}(x)$ を導入する:

$$\underline{f}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_{2n}(x) \end{bmatrix}, \quad \underline{\xi}(x) = \begin{bmatrix} \xi_1(x) \\ \xi_2(x) \\ \vdots \\ \xi_{2n}(x) \end{bmatrix}.$$

これらの記号によつて (T は転置行列を示す)

$$F(x, y) = - \underline{f}^T(x) C^{-1} \underline{f}(y),$$

$$K(x, y) = \underline{\underline{\xi}}^T(x) E \underline{\underline{f}}(y),$$

$$-\int_{-\infty}^x D_x K(x, x') \cdot F(x', y) dx = \underline{\underline{\xi}}^T(x) A C^{-1} \underline{\underline{f}}(y),$$

と表現され、積分方程式は

$$\underline{\underline{\xi}}^T(x) E \underline{\underline{f}}(y) - \underline{\underline{f}}^T(x) C^{-1} \underline{\underline{f}}(y) + \underline{\underline{\xi}}^T(x) A C^{-1} \underline{\underline{f}}(y) = 0$$

または

$$\{ \underline{\underline{\xi}}^T(x) [C + A] - \underline{\underline{f}}^T(x) \} C^{-1} \underline{\underline{f}}(y) = 0$$

と表わされる。これを代数的に解いて

$$\underline{\underline{\xi}}^T(x) = \underline{\underline{f}}^T(x) [C + A]^{-1}$$

を得る。したがって

$$K(x, y) = \underline{\underline{f}}^T(x) [C + A]^{-1} \underline{\underline{f}}(y)$$

である。

反対称行列の逆行列は pfaffian で表現される：

$$([C + A]^{-1})_{j,k} = (-1)^{k+j-1} M(k,j) / \tau_n.$$

ここで $M(k,j)$ は pfaffian $\tau_n = (1, 2, \dots, 2n)$ の minor である。 τ_n は $\mathcal{I} \frac{2}{x}$ で求めた BKP 方程式の n -soliton 解を表わす pfaffian で、その (j,k) 要素は

$$(j,k) = c_{j,k} + \int_{-\infty}^x D_y f_j(y) \cdot f_k(y) dy$$

で与えられる。

$K(x,y)$ を pfaffian で表現するために、次の記号

$$(c_0, j) = f_j(y), \quad (d_0, j) = f_j(x),$$

を導入する。この記号を便うと

$$K(x,y) = \frac{(d_0, c_0, 1, 2, \dots, 2n)}{(1, 2, \dots, 2n)}$$

である。この式より、前に求めた関係式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} K(x,y) \Big|_{y=x} &= \frac{(d_0, d_1, 1, 2, \dots, 2n)}{(1, 2, \dots, 2n)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \log \tau_n \end{aligned}$$

が確かめられる。

結論として, BKP 方程式系に対する積分方程式は

$$K(x, y) + F(x, y) - \int_{-\infty}^x D_x K(x, x') \cdot F(x', y) dx' = 0,$$

∴

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n} - \frac{\partial^n}{\partial y^n} \right) F(x, y) = 0,$$

$$F(x, y) = -F(y, x), \quad F(x, -\infty) = 0,$$

であり. BKP 方程式系の解 τ は積分方程式の解

$K(x, y)$ より

$$\frac{\partial}{\partial y} K(x, y) \Big|_{y=x} = \frac{\partial}{\partial x} \log \tau$$

により, τ が求められる.