

広田の方法によるMKdV方程式の

Multiple-Pole解とその複素平面上での振舞

日大理工 高橋 誠 ( Makoto Takahasi )

日大理工 紺野 公明 ( Kimiaki Konno )

§ 1 はじめに

この報告ではMKdV方程式の広田の方法によるN-Double-Pole解の導出と、独立変数の一つを複素化したとき、その複素平面上での特異点の振舞いについて議論をする。可積分な方程式を解く方法の一つに逆散乱法がある。ソリトン解は散乱データの反射係数が一位の極を持つとして与えられる。MKdV方程式、Sine-Gordon方程式などは反射係数が一位以外の極を持つことが出来る。そこで純虚数の一位の極を取るとして得られた解を、本報告ではSimple-Pole解 (SPS) と呼び、二位の極を仮定して得られる解をDouble-Pole解 (DPS) と呼ぶ。和達達は、逆散乱法を用いてMKdV方程式のDPSを求めている<sup>1)</sup>。1又は2-DPS以上になると、解を陽に書き表すことは容易ではない。そこで我々は、広田の方法<sup>2)</sup>を用いてN-DPSを陽に書き表す試みをした。

DPSは振幅が正と負のSPSが同じ波数を持つ極限として与えられるとの指摘がある<sup>1)</sup>。そこで2-SPSとDPSの性質の違いを見るために、得られた解を用いて、その独立変数を複素化し、

その複素平面上での特異点の振舞いを調べる。

§ 2 では  $2N - SPS$  から  $N - DPS$  を求め、§ 3 では 1 と  $2 - SPS$ 、及び  $1 - DPS$  の複素平面上での特異点の振舞いを調べ、 $DPS$  の特徴について考察する。最後の章でまとめを行う。

## § 2 $N$ Double-Pole 解

MKdV 方程式を次のように与える：

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 . \quad (2.1)$$

補助関数  $\phi, g, f$  を用いて解を

$$u = -2 \phi_x , \quad (2.2)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{g}{f} ,$$

と書き表すと、 $f$  と  $g$  は次の双線形方程式を満たす：

$$(D_t + D_x^3) g \cdot f = 0 , \quad (2.3)$$

$$D_x^2 (f \cdot f + g \cdot g) = 0 .$$

$2N - SPS$  は次のように与えられる<sup>2)</sup>：

$$f = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2N} \sum_{C_{2n}} a(i_1, i_2, \dots, i_{2n}) \times \exp(\xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \dots + \xi_{i_{2n}}) \quad (2.4)$$

$$g = \sum_{n=0}^{[2N-1/2]} \frac{1}{2N} \sum_{C_{2n+1}} a(i_1, i_2, \dots, i_{2n+1}) \times \exp(\xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \dots + \xi_{i_{2n+1}})$$

ただし、

$$a(i_1, i_2, \dots, i_n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n=0, \\ c_i & \text{for } n=1, \\ c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n} \prod_{k < l}^{(n)} a(i_k, i_l) & \text{for } n \geq 2, \end{cases}$$

$$a(i_k, i_l) = - \frac{(p_{i_k} - p_{i_l})^2}{(p_{i_k} + p_{i_l})^2}, \quad (2.5)$$

$$\xi_i = p_i x - p_i^3 t.$$

この  $2N$ -SPS を用いて  $N$ -DPS を求めるため次の極限

操作を行う：

$$c_{2i} = \hat{d}_i - \frac{d_i}{\delta_i}, \quad (2.6)$$

$$c_{2i+1} = \hat{d}_i + \frac{d_i}{\delta_i},$$

と各  $c_i$  を置き、また波数を

$$p_{2i} = q_i, \quad (2.7)$$

$$p_{2i+1} = q_i + \delta_i,$$

と置く。そして (2.6) と (2.7) を (2.4) に代入し各  $\delta_i$  を零にもって行く。その結果  $N-DPS$  は次のように書かれる：

$$f = 1 + \sum_{\substack{m+n=1 \\ (m=0,2,4\dots)}}^N \sum^{(i)} b(i_1, i_2, \dots, i_m, \hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_n) \\ \times R(i_1, i_2, \dots, i_m, \hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_n) \\ \times \exp(\xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \dots + \xi_{i_m} + 2\xi_{\hat{j}_1} + 2\xi_{\hat{j}_2} + \dots + 2\xi_{\hat{j}_n}) \quad (2.8)$$

$$g = \sum_{\substack{m+n=1 \\ (m=1,3,5\dots)}}^N \sum^{(i)} b(i_1, i_2, \dots, i_m, \hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_n) \\ \times R(i_1, i_2, \dots, i_m, \hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_n) \\ \times \exp(\xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \dots + \xi_{i_m} + 2\xi_{\hat{j}_1} + 2\xi_{\hat{j}_2} + \dots + 2\xi_{\hat{j}_n})$$

ただし、

$$\xi_i = q_i x - q_i^3 t. \quad (2.9)$$

ここで和 (i) は  $m+n$  を一定とし、 $m=0,2,4,\dots$  ( $1,3,5,\dots$ ) を満たす条件の下で、 $m$  個の  $i_k$  と  $n$  個の  $\hat{j}_l$  から全ての可能な組み合わせを取ることの意味する。b を

$$\begin{aligned}
b(i_1, i_2, \dots, i_m, \hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_n) &= \\
&= \prod_{p=1}^n C(\hat{j}_p) \prod_{p < q}^{(m)} C(i_p, i_q) \prod_{\substack{r=1 \\ s=1}}^{\substack{r=m \\ s=n}} C(i_r, \hat{j}_s) \prod_{t < u}^{(n)} C(\hat{j}_t, \hat{j}_u), \quad (2.10)
\end{aligned}$$

と表す。ここで

$$\begin{aligned}
\Pi C(\hat{j}_p) &= 1 && \text{for } n = 0, \\
\Pi C(i_p, i_q) &= 1 && \text{for } m = 0 \text{ or } 1, \\
\Pi C(i_r, \hat{j}_s) &= 1 && \text{for } m = 0 \text{ or } n = 0, \\
\Pi C(\hat{j}_t, \hat{j}_u) &= 1 && \text{for } n = 0 \text{ or } 1.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

そして

$$\begin{aligned}
C(\hat{j}_p) &= \frac{d^2}{4q^2} \frac{j_p}{j_p}, \\
C(i_p, i_q) &= - \left( \frac{q_{i_p} - q_{i_q}}{q_{i_p} + q_{i_q}} \right)^2, \\
C(i_r, \hat{j}_s) &= \left( \frac{q_{i_r} - q_{j_s}}{q_{i_r} + q_{j_s}} \right)^4,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$C(\hat{j}_t, \hat{j}_u) = \left( \frac{q_{\hat{j}_t} - q_{\hat{j}_u}}{q_{\hat{j}_t} + q_{\hat{j}_u}} \right)^8,$$

ここで  $\prod_{p < q}^{(m)}$  は  $i_1, i_2, \dots, i_m$  の全ての可能な組み合わせの積を表す。  
また  $\prod_{t < u}^{(n)}$  は  $\hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_n$  の全ての可能な組み合わせの積を表す。

$$R(i_1, i_2, \dots, i_m, \hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_n) \equiv R(I, J)$$

$$= 1 \quad \text{for } m = 0, \quad (2.13)$$

$$= \sum_{h=0}^{[m/2]} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{2h}} \gamma(i_1, i_2, \dots, i_{2h}) \left( \prod_s^{(iii)} T(I, J; i_s) \right) \quad \text{for } m \geq 1.$$

ここで和 (ii) は  $i_1, i_2, \dots, i_m$  の中から任意の  $2h$  個を選ぶ選び方の全てについての和をとることを意味する。ただし  $h = 0$  のときは  $\gamma = 0$  とする。積 (iii) は (ii) で  $2h$  個選んだ残り  $s = m - 2h$  個の積を意味する。ただし残り  $s = 0$  のときは  $T = 0$  とする。(2.13) における  $\gamma$  は

$$\gamma(i_1, i_2, \dots, i_{2h}) = \sum^{(iv)} \gamma(i_1, i_2) \gamma(i_3, i_4) \dots \gamma(i_{2h-1}, i_{2h}) \quad (2.14)$$

で与えられる。ここで和 (iv) は  $i_1, i_2, \dots, i_{2h}$  の  $2h$  個を2個ずつの組に分けたとき全ての可能な組み合わせについて和をとることを意味する。各  $\gamma(i_r, i_s)$  は

$$\gamma(i_r, i_s) = 4 \frac{q_{i_r}^2 + q_{i_s}^2}{(q_{i_r}^2 - q_{i_s}^2)^2} d_{i_r} d_{i_s} \quad (2.15)$$

で与えられる。また (2.13) の  $T$  は

$$T(I, J; i_s) = 2 d_{i_s} + (x - 3q^2 t) d_{i_s} + \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq s)}}^m \beta(i_s, i_r) + \sum_{r=1}^n \beta(i_s, j_r) \quad (2.16)$$

で与えられる。ここで

$$\beta(i_r, i_s) = \frac{4q_{i_s}}{q_{i_r}^2 - q_{i_s}^2} d_{i_r}, \quad (2.17)$$

$$\beta(i_r, j_s) = \frac{8q_{i_s}}{q_{i_r}^2 - q_{j_s}^2} d_{i_r}.$$

ただし  $m = 0$  のときは  $\beta = 0$  で  $n = 0$  のときも  $\beta = 0$  である。

つぎに 1-DPS、2-DPS と 3-DPS の具体的な表示を与える。まず 1-DPS を与える  $f$  と  $g$  は

$$f = 1 + b(1)R(1) e^{2\xi} \quad (2.18)$$

$$g = b(1)R(1) e^{\xi}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 b(\hat{1}) &= C(\hat{1}) \quad , \\
 b(1) &= 1 \quad , \\
 & \hspace{15em} (2.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R(\hat{1}) &= 1 \quad , \\
 R(1) &= T(1;1) \quad ,
 \end{aligned}$$

ここで

$$T(1;1) = 2d_1 + (x-3q_1^2 t) d_1 \equiv S_1 \quad . \quad (2.20)$$

2-D P Sを与える  $f$  と  $g$  は

$$\begin{aligned}
 f &= 1 + b(\hat{1})R(\hat{1}) e^{2\xi_1} + b(\hat{2})R(\hat{2}) e^{2\xi_2} \\
 & \quad + b(1,2)R(1,2) e^{\xi_1 + \xi_2} \quad , \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g &= b(1)R(1) e^{\xi_1} + b(2)R(2) e^{\xi_2} \\
 & \quad + b(1,2)R(1,2) e^{\xi_1 + 2\xi_2} + b(2,1)R(2,1) e^{2\xi_1 + \xi_2} \quad .
 \end{aligned}$$

で与えられる。ここで

$$b(1,2) = C(1,2) \quad ,$$

$$b(1,2) = C(\hat{2})C(\hat{1},2) \quad ,$$



(2.22)

$$R(1,2) = T(1,2;1)T(1,2;2) + \gamma(1,2),$$

$$R(1,\hat{2}) = T(1,\hat{2};1).$$

ただし

$$T(1,2;1) = S_1 + \beta(1,2),$$

(2.23)

$$T(1,\hat{2};1) = S_1 + \beta(1,\hat{2}).$$

3-DPSを与える  $f$  と  $g$  は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} f = & 1 + b(\hat{1})R(\hat{1}) e^{2\xi_1} + b(\hat{2})R(\hat{2}) e^{2\xi_2} + b(\hat{3})R(\hat{3}) e^{2\xi_3} \\ & + b(1,2)R(1,2) e^{\xi_1 + \xi_2} + b(1,3)R(1,3) e^{\xi_1 + \xi_3} \\ & + b(2,3)R(2,3) e^{\xi_2 + \xi_3} + b(\hat{1},\hat{2})R(\hat{1},\hat{2}) e^{2\xi_1 + 2\xi_2} \\ & + b(\hat{1},\hat{3})R(\hat{1},\hat{3}) e^{2\xi_1 + 2\xi_3} + b(\hat{2},\hat{3})R(\hat{2},\hat{3}) e^{2\xi_2 + 2\xi_3} \\ & + b(1,2,\hat{3})R(1,2,\hat{3}) e^{\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3} + b(1,3,\hat{2})R(1,3,\hat{2}) e^{\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3} \\ & + b(2,3,\hat{1})R(2,3,\hat{1}) e^{2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3} \\ & + b(\hat{1},\hat{2},\hat{3})R(\hat{1},\hat{2},\hat{3}) e^{2\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
g &= b(1)R(1) e^{\xi_1} + b(2)R(2) e^{\xi_2} + b(3)R(3) e^{\xi_3} \\
&+ b(1, \hat{2})R(1, \hat{2}) e^{\xi_1 + 2\xi_2} + b(1, \hat{3})R(1, \hat{3}) e^{\xi_1 + 2\xi_3} \\
&+ b(2, \hat{1})R(2, \hat{1}) e^{2\xi_1 + \xi_2} + b(2, \hat{3})R(2, \hat{3}) e^{\xi_2 + 2\xi_3} \\
&+ b(3, \hat{1})R(3, \hat{1}) e^{2\xi_1 + \xi_3} + b(3, \hat{2})R(3, \hat{2}) e^{2\xi_2 + \xi_3} \\
&+ b(1, 2, 3)R(1, 2, 3) e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3} \\
&+ b(1, \hat{2}, \hat{3})R(1, \hat{2}, \hat{3}) e^{\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3} \\
&+ b(2, \hat{1}, \hat{3})R(2, \hat{1}, \hat{3}) e^{2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3} \\
&+ b(3, \hat{1}, \hat{2})R(3, \hat{1}, \hat{2}) e^{2\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3} .
\end{aligned}$$

ここで

$$b(\hat{1}, \hat{2}) = C(\hat{1})C(\hat{2})C(\hat{1}, \hat{2}) ,$$

$$b(1, 2, 3) = C(1, 2)C(1, 3)C(2, 3) ,$$

$$b(1, 2, \hat{3}) = C(\hat{3})C(1, 2)C(1, \hat{3})C(2, \hat{3}) ,$$

$$b(1, \hat{2}, \hat{3}) = C(\hat{2})C(\hat{3})C(1, \hat{2})C(1, \hat{3})C(\hat{2}, \hat{3}) ,$$

$$b(\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}) = C(\hat{1})C(\hat{2})C(\hat{3})C(\hat{1}, \hat{2})C(\hat{1}, \hat{3})C(\hat{2}, \hat{3}) , \quad (2.25)$$

$$R(\hat{1}, \hat{2}) = 1 ,$$

$$R(1,2,3) = T(1,2,3;1)T(1,2,3;2)T(1,2,3;3) \\ + \gamma(1,2)T(1,2,3;3) + \gamma(1,3)T(1,2,3;2) + \gamma(2,3)T(1,2,3;1),$$

$$R(1,2,\hat{3}) = T(1,2,\hat{3};1)T(1,2,\hat{3};2) + \gamma(1,2),$$

$$R(1,\hat{2},\hat{3}) = T(1,\hat{2},\hat{3};1),$$

$$R(\hat{1},\hat{2},\hat{3}) = 1.$$

ここで各  $T$  は次のように与えられる:

$$T(1,2,3;1) = S_1 + \beta(1,2) + \beta(1,3),$$

$$T(1,2,\hat{3};1) = S_1 + \beta(1,2) + \beta(1,\hat{3}), \quad (2.26)$$

$$T(1,\hat{2},\hat{3};1) = S_1 + \beta(1,\hat{2}) + \beta(1,\hat{3}).$$

### § 3 1 - D P S の複素平面上の特異点の振舞

#### (1) 1 - S P S の特異点の振舞

1 - S P S を与える  $f$  と  $g$  は

$$f = 1,$$

(3.1)

$$g = a(1) e^{\xi},$$

で与えられる。ここで

$$\xi = px - p^3 t \quad . \quad (3.2)$$

我々は変数  $t$  を複素化し、解  $u$  の極を補助関数  $\phi$  を用いて考える。(2.2) の  $\phi$  は

$$\phi = \frac{1}{2} \log \frac{f - ig}{f + ig} \quad (3.3)$$

と書きかえられることに注意すると、 $u$  の極は  $f - ig = 0$  と  $f + ig = 0$  のゼロ点の和として与えられることが分かる。まず  $f - ig = 0$  のゼロ点から考える。複素  $t$  平面上での  $m$  番目のゼロ点の位置を

$$t_m(x, p) = t_{Rm}(x, p) + i t_{Im}(x, p) \quad , \quad (3.4)$$

と書くと、 $t_{Rm}$ 、 $t_{Im}$  は

$$t_{Rm} = \frac{px + \log c}{p^3} \quad , \quad (c > 0) \quad (m = \pm 1, \pm 3, \dots) \quad (3.5)$$

$$t_{Im} = \frac{(2m+1)\pi}{2p^3} \quad ,$$

で与えられる。また  $f + ig = 0$  の  $n$  番目のゼロ点を

$$t_n(x, p) = t_{Rn}(x, p) + i t_{In}(x, p) \quad , \quad (3.6)$$

と置くと、 $t_{Rn}$ 、 $t_{In}$  は

$$t_{Rn} = \frac{px + \log c}{p^3} \quad (c > 0),$$

$$(n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots) \quad (3.7)$$

$$t_{In} = \frac{(2n+1)\pi}{2p^3},$$

で与えられる。解  $u$  に寄与する極は、(3.3) の対数の性質と (2.2) の  $u$  と  $\phi$  との関係式から (3.4) のゼロ点からの寄与と (3.6) のゼロ点からの寄与の和として与えられることに注意したい。

1 - S P S を与えるゼロ点は、(3.4) と (3.6) のもののが交互に虚軸に沿って等間隔に列状に無限遠方まで分布し、実軸に沿っては  $x$  に比例して変わってゆく。実  $t$  と  $x$  との関係は、孤立波の軌道を与えている。そのとき振幅には、実  $t$  軸に近いゼロ点が大きな寄与を与える。これらの性質は前に調べた K d V 方程式、B o u s s i n e s q 方程式などと共通した性質を持っている<sup>3), 4), 5)</sup>。

## (2) 2 - S P S の特異点の振舞

2 - S P S を与える  $f$  と  $g$  は

$$f = 1 - c_1 c_2 \left( \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 e^{\xi_1 + \xi_2} \quad (3.8)$$

$$g = c_1 e^{\xi_1} + c_2 e^{\xi_2}$$

で与えられる。ただし

$$\xi_i = p_i x - p_i^3 t \quad (i = 1, 2) \quad (3.9)$$

$p_1 = 3, p_2 = 2, c_1 = 1, c_2 = 1$  として  $f + i g = 0$  のゼロ点を図 1 に示す。図 1 a に 2 つの孤立波の衝突の様子を示す。図 1 b、c に、虚  $t$  (Im  $t$ ) と  $x$ 、及び実  $t$  (Re  $t$ ) と  $x$  に対するゼロ点の振舞いをそれぞれ示す。これらの図より大きな振幅の孤立波に属するゼロ点には、 $x$  を大きくしてゆくと、小さな振幅を新しく形成するものと、中間状態を経て、始めから存在していた小さな振幅の孤立波に属するゼロ点と一緒にになり、元の大きな振幅の孤立波を形成するものの二種類あることが分かる。これは文献 3)、4) で見た場合と同じである。しかし、ゼロ点が  $f + i g = 0$  と  $f - i g = 0$  のものの二種類に分離できる点は MKdV 方程式固有のことである。

次に、和達達の DPS が正の振幅を持つ SPS と負の振幅を持つ SPS の波数が同じである極限で与えられる指摘を参考に、次の  $1 - DPS$  と比較するため、 $p_1 = 3, p_2 = 2.8, c_1 = 1, c_2 = -1$  として  $f + i g = 0$  のゼロ点を図 2 に示す。図 2 a は 2 つの孤立波の衝突の様子を示す。図 2 b、c に、虚  $t$  (Im  $t$ ) と  $x$ 、及び実  $t$  (Re  $t$ ) と  $x$  に対するゼロ点の振舞いをそれぞれ示す。この図で注意してほしいのは、ゼロ点の中にそれが属する孤立波を変

えないものが存在するということである。

### (3) 1-DPSの特異点の振舞

1-DPSを与える  $f$  と  $g$  の具体的表示は (2.18), (2.19) で与えられている。これらをもとに  $f + ig = 0$  のゼロ点を  $q_1 = 1$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_1 = 6$  について数値的に計算し、図3に示す。図3 a に1-DPSの波形を示す。この波形は一見図2 a と区別できない。図3 b、cでは、虚  $t$  ( $Im t$ ) と  $x$ 、及び実  $t$  ( $Re t$ ) と  $x$  に対するゼロ点の振舞いをそれぞれ示す。これらの図より、その属する孤立波を変えないゼロ点がないという特徴をもっていることが分かる。即ち、正の振幅を与えていた全てのゼロ点は、その複素平面上での虚数部分の位置を変え、負の振幅を与えるようになり、逆に、負の振幅を与えていた全てのゼロ点は、正の振幅を与えるゼロ点にその虚数部分の位置を変える。これはSPSの衝突では見られないことである。

このように  $t$  を複素化してそこでのゼロ点の振舞いから、波形からは分からない、DPSの詳しい機構が見え、振幅が大きく変わる領域での振舞いが十分に理解できることが分かった。

## §4 まとめ

広田の方法を用いて  $N$ -DPS を求めた。現在まだこれが双線形方程式を満たすことを証明できない。しかし、REDUCEを

用いて3-DPSまで満たしていることが示されている。

得られたDPSを用いて独立変数の一つ、 $t$ を複素化して、その複素平面上の特異点の振舞いより解の性質を調べた。その結果、DPSは正の振幅を与えた全てのゼロ点、そのゼロ点の虚数部分の位置を変え負の振幅を与えるようになり、逆に、負の振幅を与えていた全てのゼロ点、正の振幅を与えるゼロ点にその虚数部分を変えるように振舞うことが分かった。DPSのゼロ点には、その属する孤立波を変えないゼロ点は存在しないことが特徴であることが分かった。

#### 文献

- 1) M. Wadati and K. Ohkuma: Multiple-Pole Solutions of the Modified Korteweg-de Vries Equation. J. Phys. Soc. Japan 51 (1982) 2029.
- 2) R. Hirota: Exact Solution of the Modified Korteweg-de Vries Equation for Multiple Collisions of Solutions. J. Phys. Soc. Japan 33 (1972) 1456.
- 3) K. Konno and H. Ito: Nonlinear Interactions between Solitons in Complex  $t$ -Plane. I, J. Phys. Soc. Japan 56 (1987) 897.



- 4) K. Konno: Nonlinear Interactions between Solitons in Complex  $t$ -Plane. II, J. Phys. Soc. Japan 56 (1987) 1334.
- 5) K. Konno: Soliton Solutions in Complex  $t$ -Plane for Hirota-Ito Equation. Nihon Univ. Preprint NUP-A-88-3.

### 図の説明

図 1 a は、 $-1.5 \leq t \leq 1.5$  での 2 つの S P S (  $p_1 = 3, p_2 = 2, c_1 = 1, c_2 = 1$  ) の衝突の様子を示す。図 1 b、c では、虚  $t$  (  $Im t$  ) と  $x$  に対する、また実  $t$  (  $Re t$  ) と  $x$  に対する  $f + i g = 0$  のゼロ点の振舞いをそれぞれ示す。

図 2 a は、 $-1.5 \leq t \leq 1.5$  での 2 つの S P S (  $p_1 = 3, p_2 = 2.8, c_1 = 1, c_2 = -1$  ) の衝突の様子を示す。図 2 b、c では、虚  $t$  (  $Im t$  ) と  $x$  に対する、また実  $t$  (  $Re t$  ) と  $x$  に対する  $f + i g = 0$  のゼロ点の振舞いをそれぞれ示す。

図 3 a は、 $-1.5 \leq t \leq 1.5$  での 1 - D P S (  $q_1 = 3, \hat{d}_1 = 1, d_1 = 6$  ) の波形を示す。図 3 b、c では、虚  $t$  (  $Im t$  ) と  $x$  に対する、また実  $t$  (  $Re t$  ) と  $x$  に対する  $f + i g = 0$  のゼロ点の振舞いをそれぞれ示す。

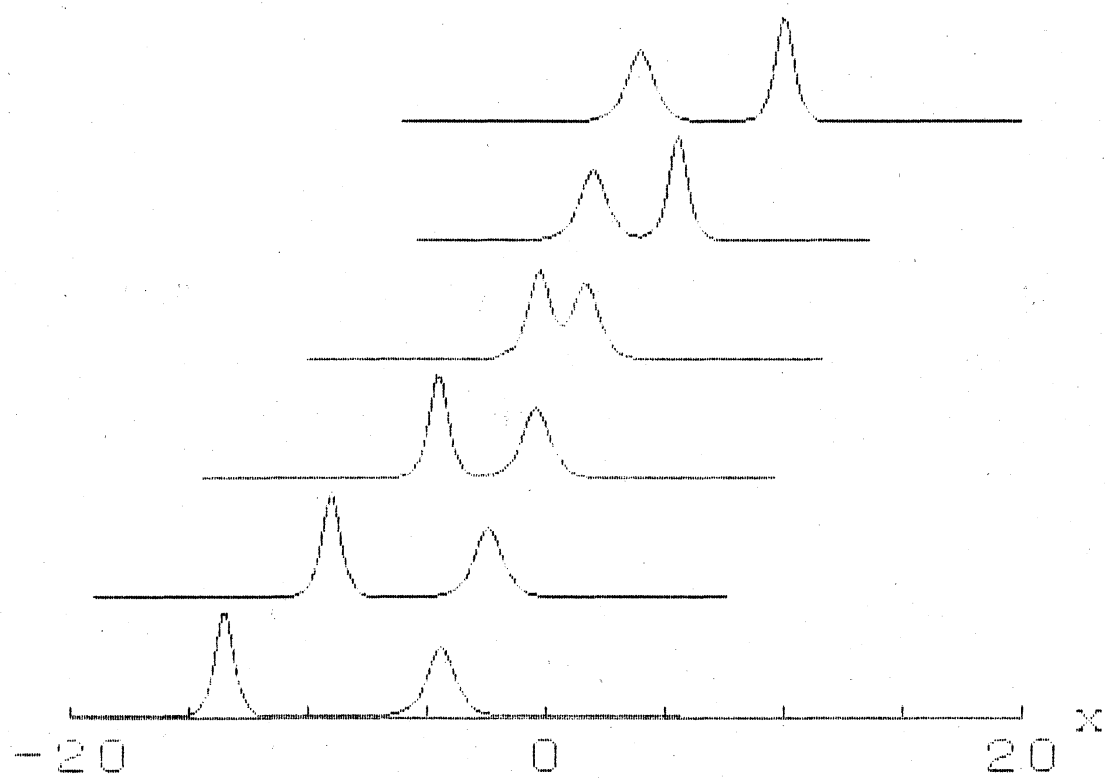
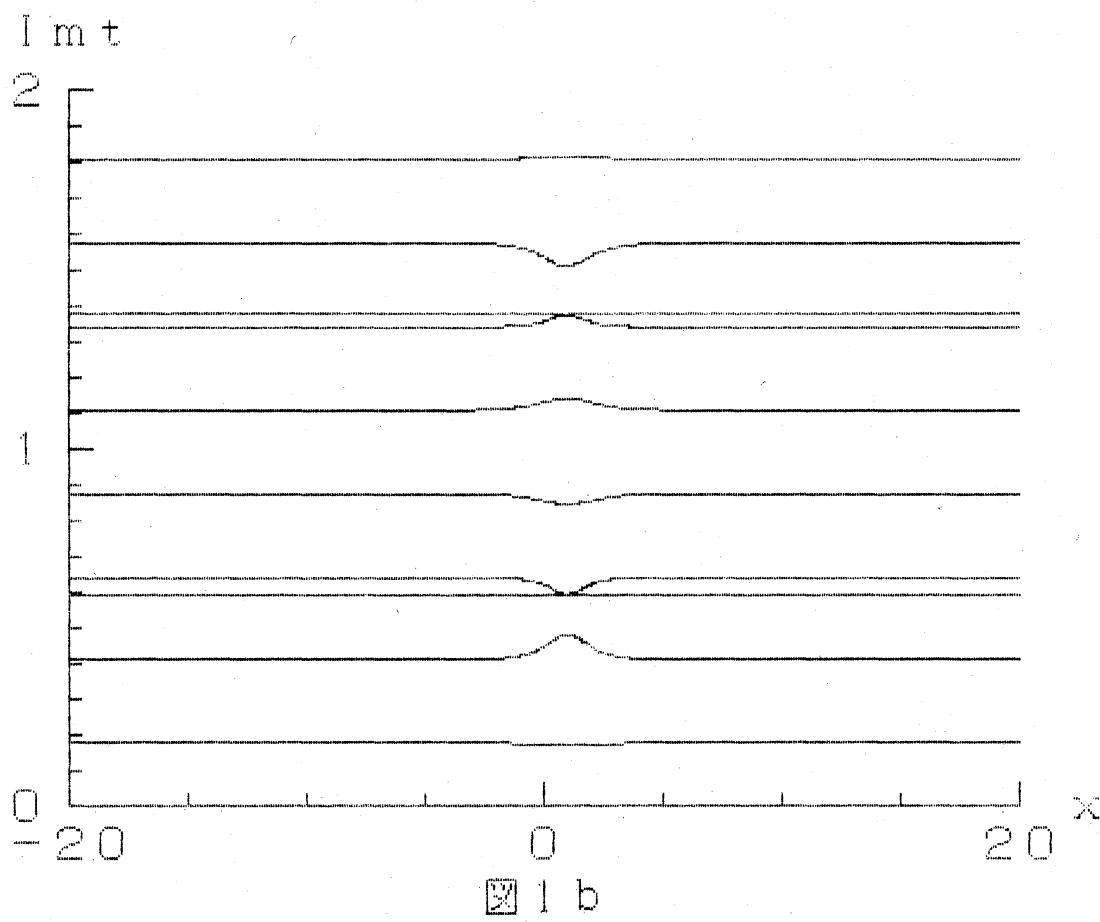
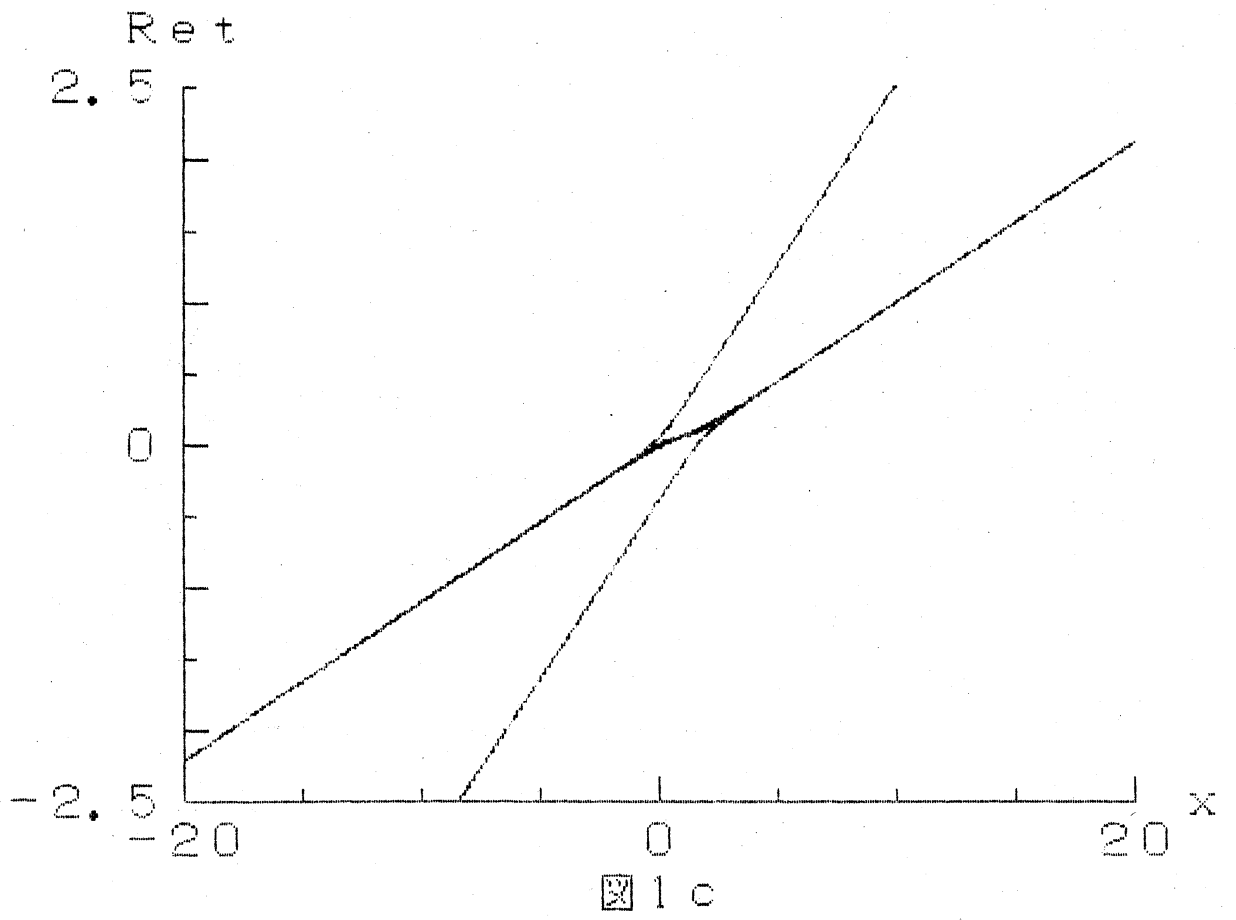


图 1 a





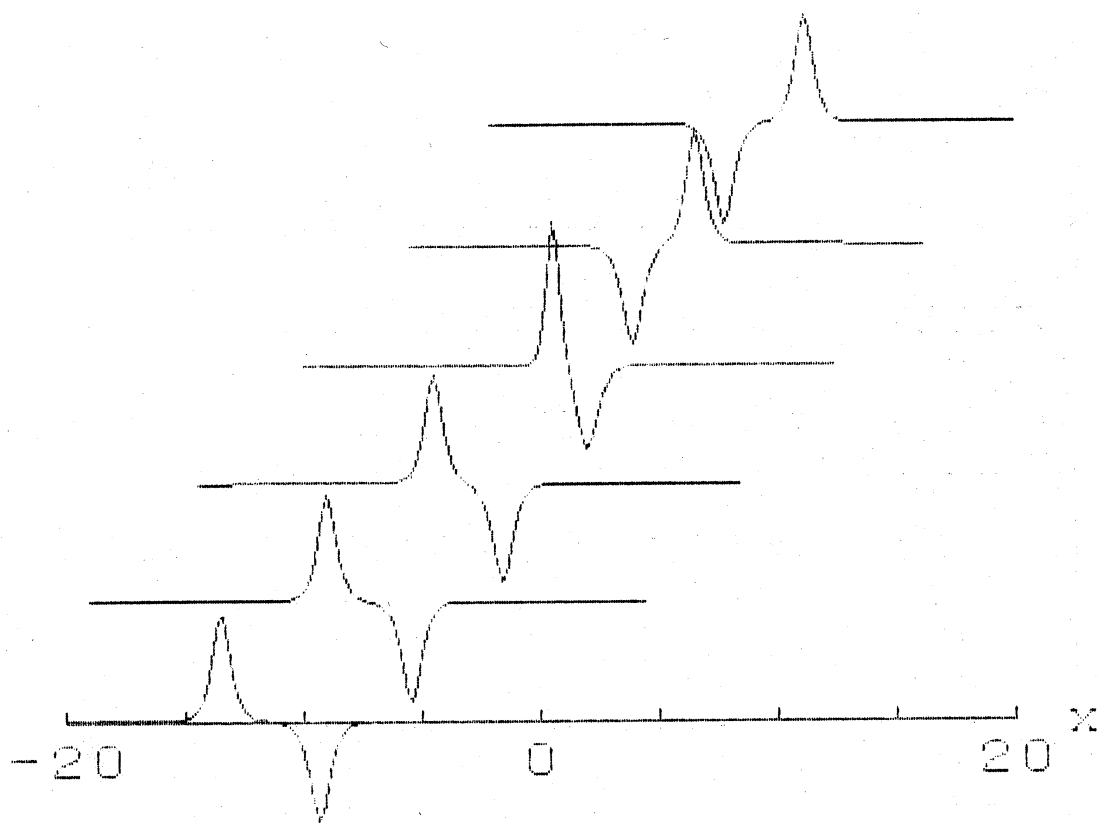
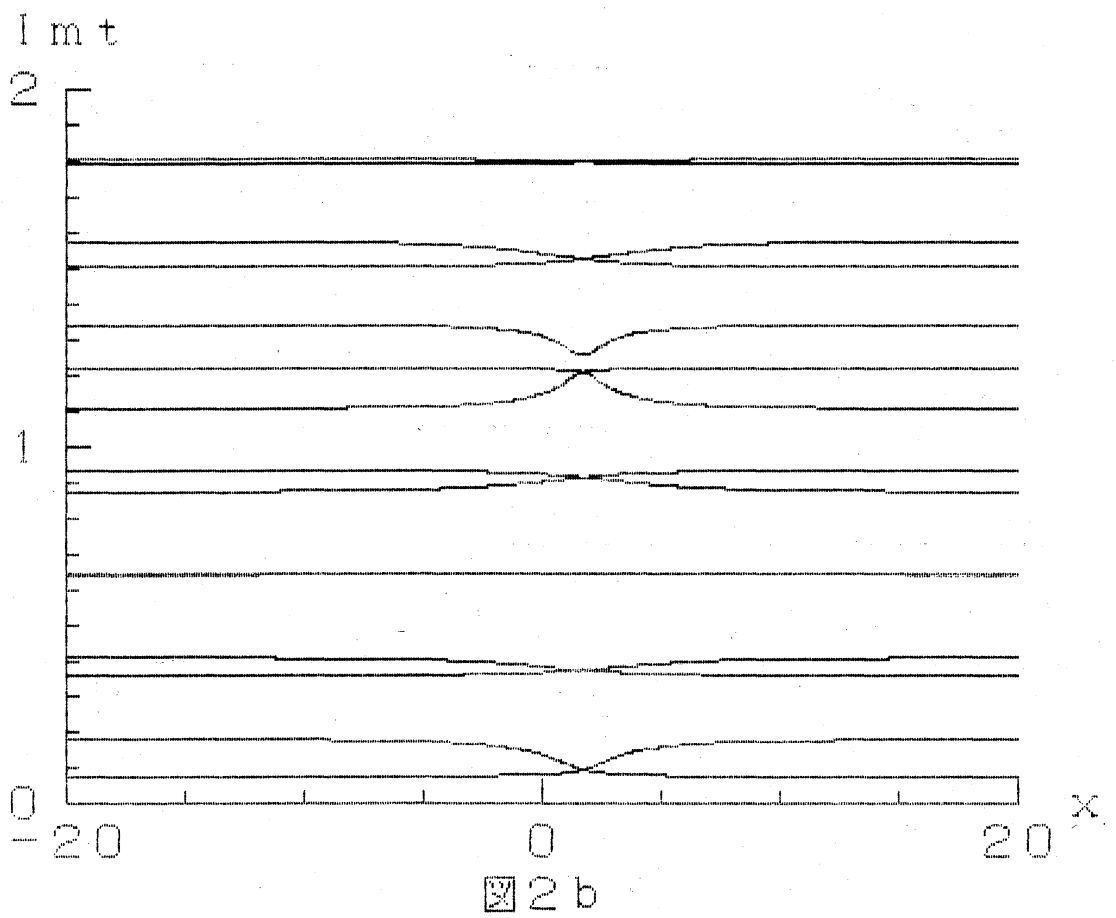
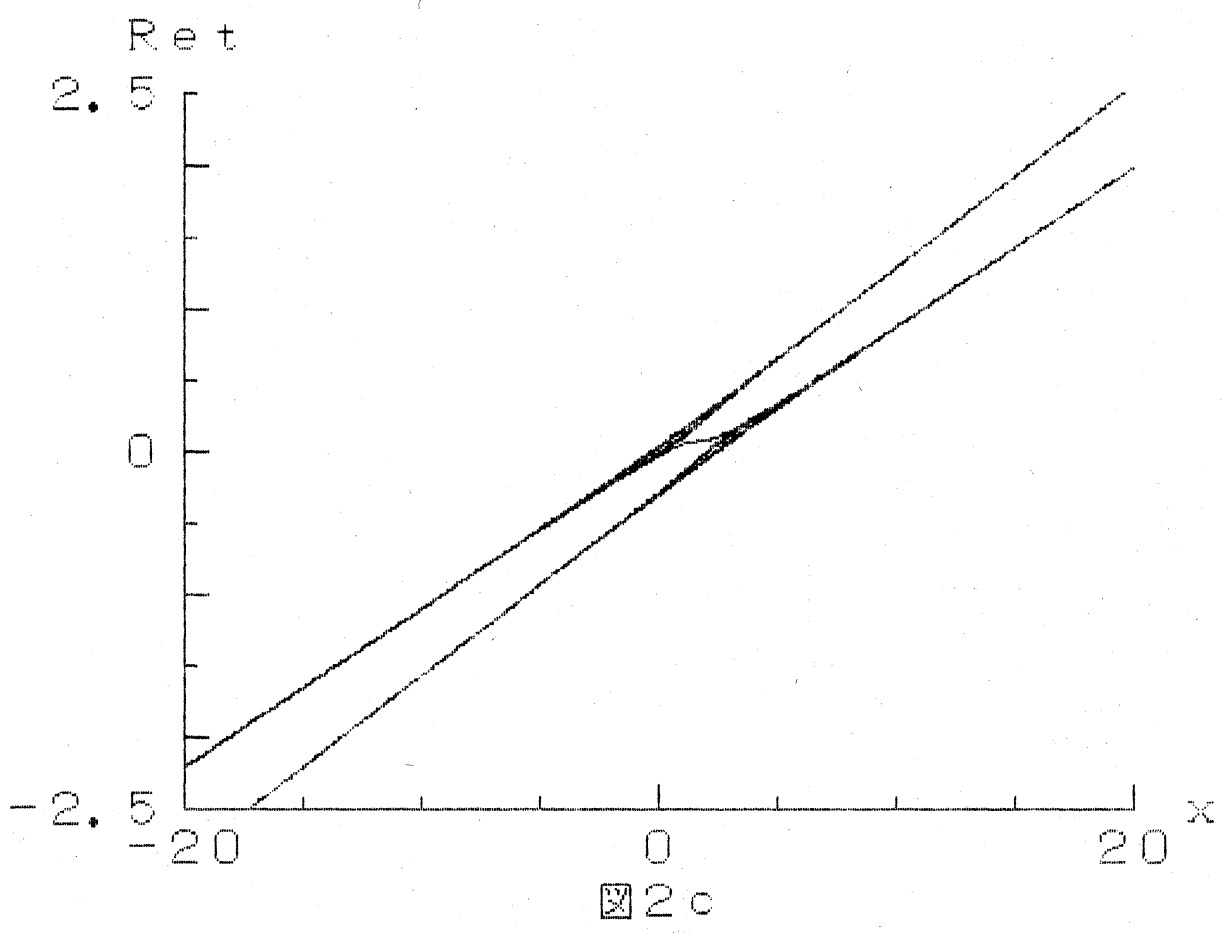


图 2a





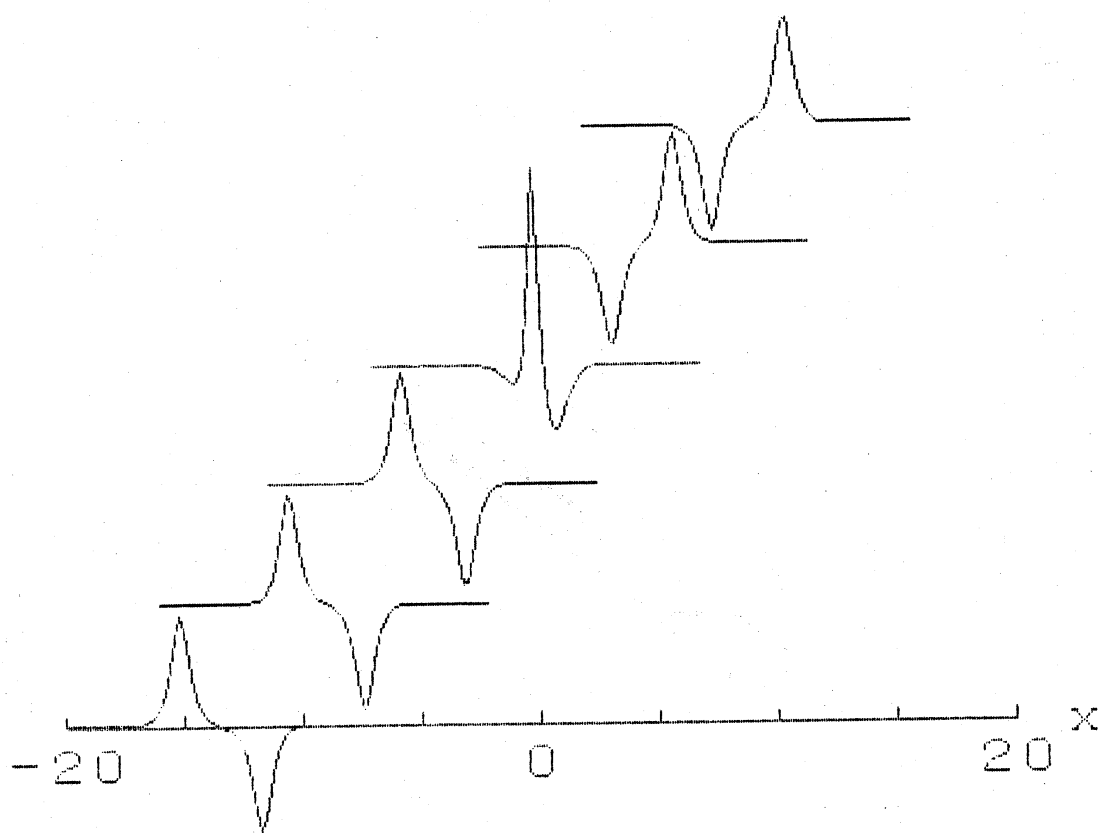


图 3 a



