

演算子による差分化

東大・工 高橋 大輔 (Daisuke Takahashi)
東大・工 薩摩 順吉 (Junkichi Satsuma)

はじめに

今、連続系の微分演算子 $\frac{d}{dx}$ に対応して離散系の差分演算子 $\Delta_x\{ \}$ を次式のように 2 点前進差分演算子で定義したとする。

$$\Delta_x\{f(x)\} = \frac{1}{h}\{f(x+h) - f(x)\}$$

ここで $f(x)$ は任意の x の関数、 h は差分格子間隔である。次に連続系のべき x^n に対応して離散系の階乗関数 $x^{(n)}$ を

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= 1, \\ x^{(n)} &= x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-1)h), \\ x^{((-n)} &= \frac{1}{(x+h)(x+2h)\cdots(x+nh)}, \end{aligned}$$

と定義すると、

$$\Delta_x\{x^{(n)}\} = nx^{((n-1))},$$

が成立し、べきの微分規則と対応したものが離散系で得られる。ところが、階乗関数の積は

$$x^{(n)}x^{(m)} \neq x^{((n+m))},$$

であり、指数法則が成立しない。また、関数の積の差分も

$$\Delta_x\{f(x)g(x)\} \neq \Delta_x\{f(x)\}g(x) + f(x)\Delta_x\{g(x)\},$$

となり、連続系の微分規則と一致しない。このように連続系と離散系とで演算規則が一致しないと両者の代数的構造に対応をつけることが難しくなり、例えば、微分方程式を差分化するための一般的な手続きというものが考えにくくなる。そこで我々は連続系の演算規則と一致するような離散系の演算子や関数を導入し、それらを用いて微分方程式の差分化を行い、

微分方程式及びその解と、差分方程式及びその解との対応をつけることを試みた。その際、微分演算子 $\frac{d}{dx}$ に対応する差分演算子を変えると（例えば2点中心差分，3点後退差分など），連続系に対応する離散系の構造が変わるので，簡単のため，まず $\frac{d}{dx}$ に対応する差分演算子を2点前進差分で定義して議論を進め，後で他の種類の差分についても触れることにする。

差分演算子の定義

まず，記号の煩雑化を避けるため，ずらし演算子を

$$E_h \stackrel{\text{op}}{=} e^{hd/dx},$$

と定義する。ここで $\stackrel{\text{op}}{=}$ は演算子の等式を示す。この演算子は x の関数に作用すると

$$E_h f(x) \stackrel{\text{op}}{=} f(x+h)E_h,$$

というふうに引数を h だけずらすものである。さらに

$$E_h^n \stackrel{\text{op}}{=} E_{nh} \stackrel{\text{op}}{=} e^{nhd/dx}, \quad E_h^- \stackrel{\text{op}}{=} E_h^{-1},$$

等の記号を定義しておく。次に差分演算子 $\delta_x\{\}$ を

$$\begin{aligned} \delta_x\{f(x)\} &\stackrel{\text{op}}{=} [E_h, f(x)] \stackrel{\text{op}}{=} \frac{1}{h}\{E_h f(x) - f(x)E_h\} \\ &\stackrel{\text{op}}{=} \frac{1}{h}\{f(x+h) - f(x)\}E_h \stackrel{\text{op}}{=} \Delta_x\{f(x)\}E_h, \end{aligned}$$

と定義する。また連続系の変数 x に対応するものとして， \hat{x} を

$$\hat{x} \stackrel{\text{op}}{=} xE_h^-,$$

と定義し，べき x^n に対応して $\widehat{x^n}$ を

$$\widehat{x^n} \stackrel{\text{op}}{=} \hat{x}^n \stackrel{\text{op}}{=} x^{((n))}E_h^{-n} \quad (n: \text{整数}),$$

と定義すると，差分則

$$\begin{aligned} \delta_x\{\widehat{x^n}\} &\stackrel{\text{op}}{=} \Delta_x\{x^{((n))}E_h^{-n}\}E_h \stackrel{\text{op}}{=} nx^{((n-1))}E_h^{-n+1} \\ &\stackrel{\text{op}}{=} nx\widehat{x^{n-1}} \end{aligned}$$

や、指数法則

$$\widehat{x^n} \widehat{x^m} \stackrel{\text{op}}{=} \widehat{x^m} \widehat{x^n} \stackrel{\text{op}}{=} \widehat{x^{n+m}}, \quad (\widehat{x^n})^m \stackrel{\text{op}}{=} \widehat{x^{nm}},$$

等が成立し、連続系での x^n , $\frac{d}{dx}$ の演算規則と一致する。

演算子関数

級数で定義された関数

$$f(x) = \sum_n a_n x^n,$$

の x を \hat{x} で置き換えた演算子関数

$$\hat{f}(\hat{x}) \stackrel{\text{op}}{=} \sum_n a_n \hat{x}^n,$$

を考える。連続系における関数と上の手続きで対応する離散演算子系の関数には前述の $\widehat{x^n}$ のように $\widehat{\quad}$ をつけることにする。 \hat{x} の演算規則より、

$$\delta_x \{ \hat{f}(\hat{x}) \} \stackrel{\text{op}}{=} \sum_n n a_n \hat{x}^{n-1} \stackrel{\text{op}}{=} \hat{f}'(\hat{x}),$$

であり、積の差分は

$$\delta_x \{ \hat{f}(\hat{x}) \hat{g}(\hat{x}) \} \stackrel{\text{op}}{=} \delta_x \{ \hat{f}(\hat{x}) \} \hat{g}(\hat{x}) + \hat{f}(\hat{x}) \delta_x \{ \hat{g}(\hat{x}) \},$$

となる。共に連続系の演算規則と一致する。

次に演算子が関数に作用することを考える。1 に演算子関数 $\hat{f}(\hat{x})$ が作用すると、ずらし演算子が消去されて実数値関数に戻り、

$$\tilde{f}(x) \equiv \hat{f}(\hat{x}) \cdot 1 = \sum_n a_n x^{((n))},$$

となる。離散演算子系の演算子関数と上の手続きで対応する離散系の関数には \sim をつけることにする。例えば $\widehat{x^n}$ が 1 に作用すると

$$\widetilde{x^n} = \widehat{x^n} \cdot 1 = x^{((n))} E_h^{-n} \cdot 1 = x^{((n))},$$

となる。また、 $\delta_x \{ \hat{f}(\hat{x}) \}$ は 1 に作用すると

$$\delta_x \{ \hat{f}(\hat{x}) \} \cdot 1 = \sum_n n a_n x^{((n-1))} = \Delta_x \{ \tilde{f}(x) \},$$

というふうに、離散系の差分の表式に戻る。もう少し複雑な例、

$$\{\hat{x}^2 \delta_x \{ \hat{f}(\hat{x}) \} + \hat{x}^{-3} \hat{g}(\hat{x})\} \cdot 1 = x^{((2))} \Delta_x \{ \tilde{f}(x-2h) \} + x^{((-3))} \Delta_x \{ \tilde{g}(x+3h) \},$$

等が成立することは明らかであろう。

常差分方程式

これまでに述べた連続系から離散演算子系、さらに離散系への変換手続きを用いて、常微分方程式を常差分演算子方程式に書き換え、さらに常差分方程式に書き換える方法を具体例に沿って説明する。例として Legendre 方程式

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0,$$

を考える。上式の変数 x を \hat{x} に、微分演算子 $\frac{d}{dx}$ を差分演算子 $\delta_x \{ \}$ に置き換えて次式の常差分演算子方程式を得る。

$$(1-\hat{x}^2) \delta_x^2 \{ \hat{y} \} - 2\hat{x} \delta_x \{ \hat{y} \} + n(n+1) \hat{y} \stackrel{\text{op}}{=} 0.$$

さらに上式の両辺を 1 に作用させて常差分方程式

$$\Delta_x^2 \{ \tilde{y}(x) \} - x^{((2))} \Delta_x^2 \{ \tilde{y}(x-2h) \} - 2x^{((1))} \Delta_x \{ \tilde{y}(x-h) \} + n(n+1) \tilde{y}(x) = 0,$$

を得る。解も同様の手続きで変換できることは明らかであろう。つまり、微分方程式の解 (Rodrigues の公式)、

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{ (x^2-1)^n \} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \end{aligned}$$

の変数 x を \hat{x} に、微分演算子 $\frac{d}{dx}$ を差分演算子 $\delta_x \{ \}$ に置き換えると差分演算子方程式の解

$$\begin{aligned} \widehat{P}_n(\hat{x}) &= \frac{1}{2^n n!} \delta_x^n \{ (\hat{x}^2-1)^n \} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} \hat{x}^{n-2k}, \end{aligned}$$

が得られ、その解を 1 に作用させると差分方程式の解

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \Delta_x^n \{ (\hat{x}^2 - 1)^n \cdot 1 \} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{((n-2k))},\end{aligned}$$

が得られる。

実数べき

今までは x の整数べきに対応する離散演算子 \widehat{x}^n を定義したが、これを実数べきまで拡張することを考える。まず Γ 関数から作られる関数 $\Gamma_h(x)$ を

$$\Gamma_h(x) \equiv h^{x/h-1} \Gamma(x/h) = \int_0^\infty e^{-t} (ht)^{x/h-1} dt,$$

と定義する。この関数は

$$\Gamma_h(x+h) = x \Gamma_h(x), \quad \Gamma_1(x) = \Gamma(x),$$

などの性質を持っている。すると x^a (a : 実数) に対応する演算子は

$$\widehat{x}^a \stackrel{\text{op}}{\equiv} \frac{\Gamma_h(x+h)}{\Gamma_h(x-(a-1)h)} E_h^{-a},$$

と定義すればよいことがわかる。なぜならば

$$\widehat{x}^n \stackrel{\text{op}}{\equiv} \frac{\Gamma_h(x+h)}{\Gamma_h(x-(n-1)h)} E_h^{-n} \stackrel{\text{op}}{\equiv} x^{((n))} E_h^{-n} \stackrel{\text{op}}{\equiv} \widehat{x}^n, \quad (n: \text{整数})$$

であり、

$$\begin{aligned}\delta_x \{ \widehat{x}^a \} &\stackrel{\text{op}}{\equiv} a \widehat{x}^{a-1}, \\ \widehat{x}^a \widehat{x}^b &\stackrel{\text{op}}{\equiv} \widehat{x}^{a+b},\end{aligned}$$

等、連続系における実数べきの演算規則と一致するものが離散演算子系で得られるからである。

線形偏差分方程式

今までは線形常差分方程式について述べてきたが、独立な変数と演算子を導入することで線形偏差分方程式も同様に構成することができる。例として拡散方程式に沿って説明する。まず、拡散方程式

$$u_t = u_{xx},$$

とその特解

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{j! 4^j t^{j+1/2}}, \end{aligned}$$

を考える。これを差分化するには、まず x, t に対するずらし演算子 $E_{x,h}, E_{t,k}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} E_{x,h} f(x, t) &\stackrel{\text{op}}{=} f(x+h, t) E_{x,h}, \\ E_{t,k} f(x, t) &\stackrel{\text{op}}{=} f(x, t+k) E_{t,k}, \end{aligned}$$

と定義し、連続系の変数 x, t に対応する演算子 \hat{x}, \hat{t} を

$$\hat{x} \stackrel{\text{op}}{=} x E_{x,h}^-, \quad \hat{t} \stackrel{\text{op}}{=} t E_{t,k}^-,$$

と定義する。また、偏微分 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}$ に対応して偏差分

$$\begin{aligned} \delta_x \{ f(x, t) \} &\stackrel{\text{op}}{=} [E_{x,h}, f(x, t)] \stackrel{\text{op}}{=} \Delta_x \{ f(x, t) \} E_{x,h} \\ \delta_t \{ f(x, t) \} &\stackrel{\text{op}}{=} [E_{t,k}, f(x, t)] \stackrel{\text{op}}{=} \Delta_t \{ f(x, t) \} E_{t,k} \end{aligned}$$

を定義する。微分方程式とその解を離散演算子化するには、偏微分 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}$ の代わりに偏差分 $\delta_x \{ \}, \delta_t \{ \}$ を、変数 x, t の代わりに演算子 \hat{x}, \hat{t} を代入すればよく、差分演算子方程式とその解は

$$\begin{aligned} \delta_t \{ \hat{u} \} &\stackrel{\text{op}}{=} \delta_x^2 \{ \hat{u} \}, \\ \hat{u} &\stackrel{\text{op}}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma_h(x+h) \Gamma_k(t+k)}{j! 4^j \Gamma_h(x-(2j-1)h) \Gamma_k(t+(j+3/2)k)} E_{x,h}^{2j} E_{t,k}^{-j-1/2}, \end{aligned}$$

となる。また、上式をそれぞれ 1 に作用させれば差分方程式とその解が得られ、

$$\Delta_t \{ \tilde{u} \} = \Delta_x^2 \{ \tilde{u} \},$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-)^j \Gamma_h(x+h) \Gamma_k(t+k)}{j! 4^j \Gamma_h(x-(2j-1)h) \Gamma_k(t+(j+3/2)k)},$$

となる。しかしながら、例えば微分方程式の解は

$$u(x, t)|_{t \rightarrow 0} = \delta(x),$$

であるが、差分方程式の解は

$$\tilde{u}(x, 0) = \frac{1}{\pi(x+h)} \left(1 + \frac{h^2}{k}\right)^{(x+h)/2h} \sin\left(\frac{x+h}{h} \tan^{-1} \frac{h}{\sqrt{k}}\right),$$

となり、両者の解の振舞い自体はかなり異なっている。

他の差分化

今までは微分演算子 $\frac{d}{dx}$ に対応する差分演算子を2点前進差分であるとして議論をすすめてきたが、これを変えることによって連続系に対応する離散系の構造が変わる。このことを具体的な例に沿って考えてみる。

・2点後退差分

この場合は、 $\hat{x} \stackrel{\text{op}}{=} xE_h$ と定義し、 $\frac{d}{dx}$ に対応する差分演算子を2点後退差分演算子、

$$\delta_x\{f(x)\} \stackrel{\text{op}}{=} \frac{1}{h}[f(x), E_h^-] \stackrel{\text{op}}{=} \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h))E_h^-,$$

であるとすれば、2点前進差分の場合と同様に、2点後退差分の離散系の演算規則が連続系の演算規則と対応することは対称性から明らかである。

・2点中心差分

この場合は、まず次のようなずらし左、右演算子を定義する。

$$\begin{aligned} f(x)L_{h/2} &\stackrel{\text{op}}{=} L_{h/2}f\left(x + \frac{h}{2}\right), \\ R_{h/2}f(x) &\stackrel{\text{op}}{=} f\left(x - \frac{h}{2}\right)R_{h/2}. \end{aligned}$$

このずらし演算子を用いて $\frac{d}{dx}$ に対応する差分演算子 $\delta_x\{\}$ を

$$\begin{aligned} \delta_x\{f(x)\} &\stackrel{\text{op}}{=} \frac{1}{h}[L_{h/2}^- R_{h/2}, f(x)] \stackrel{\text{op}}{=} L_{h/2}^- \frac{1}{h}\left\{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)\right\}R_{h/2} \\ &\stackrel{\text{op}}{=} L_{h/2}^- \Delta_x\{f(x)\}R_{h/2}, \end{aligned}$$

と定義する。さらに x に対応して \hat{x} を

$$\hat{x} \stackrel{\text{op}}{=} L_{h/2} x R_{h/2}^{-1},$$

とすると, $\widehat{x^n} \stackrel{\text{op}}{=} \hat{x}^n$ の四則演算や差分演算等は連続系のものと対応がつく。関数 $f(x)$ に対する離散演算子関数 $\hat{f}(\hat{x})$ は前と同じように x に \hat{x} を代入すれば得られる。 $\hat{f}(\hat{x})$ から離散関数 $\tilde{f}(x)$ を作るには,

$$\tilde{f}(x) = 1 \cdot \hat{f}(x) \cdot 1,$$

というふうに $\hat{f}(\hat{x})$ の両側から 1 を作用させればよい。ところが $1 \cdot \widehat{x^n} \hat{f}(\hat{x}) \cdot 1$ ($n > 0$) は 2 点前進差分の時のように x と $\tilde{f}(x)$ で陽に表わすことができない。しかしながら, 平均演算子 $\Pi_x \{ \}$ を

$$\Pi_x \{ \tilde{f}(x) \} = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{f}\left(x + \frac{h}{2}\right) + \tilde{f}\left(x - \frac{h}{2}\right) \right\},$$

と定義すると,

$$1 \cdot \widehat{x^{-n}} \hat{f}(\hat{x}) \cdot 1 = \left\{ \frac{1}{x} \Pi_x \right\}^n \tilde{f}(x), \quad (n > 0)$$

となり陽に表現できる。この事実により, 変係数の微分方程式, 例えば Legendre の微分方程式を 2 点中心差分を用いても陽に差分化することができる。まず, 微分方程式の両辺を x^2 で割ると

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{n(n+1)}{x^2} y = 0,$$

となる。 $\frac{d}{dx}$, x を上で定義した $\delta_x \{ \}$, \hat{x} で置き換えると差分演算子方程式が得られ, その式の両辺に 1 を作用させると, 差分方程式

$$\left(\frac{1}{x} \Pi_x \frac{1}{x} \Pi_x - 1 \right) \Delta_x^2 \{ \tilde{y} \} - 2 \frac{1}{x} \Pi_x \tilde{y} + n(n+1) \frac{1}{x} \Pi_x \frac{1}{x} \Pi_x \tilde{y} = 0,$$

が得られる。この差分方程式の解も同様の手続きで

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \Delta_x^n \{ 1 \cdot (\hat{x}^2 - 1)^2 \cdot 1 \} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} \frac{\Gamma_h(x + (1+n-2k)h/2)}{\Gamma_h(x + (1-n+2k)h/2)}, \end{aligned}$$

となる。

・ 3 点前進差分

3点前進差分の場合は $\frac{d}{dx}$ に対応して $\delta_x\{\}$ を

$$\begin{aligned}\delta_x\{f(x)\} &\stackrel{\text{OP}}{=} \frac{1}{2h}[-E_h^2 + 4E_h, f(x)] \\ &\stackrel{\text{OP}}{=} \frac{1}{2h}\{-f(x+2h)E_h^2 + 4f(x+h)E_h + f(x)E_h^2 - 4f(x)E_h\},\end{aligned}$$

と定義する. このとき $\Delta_x\{\}$ は3点前進差分演算子

$$\Delta_x\{f(x)\} = \delta_x\{f(x)\} \cdot 1 = \frac{1}{2h}\{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)\},$$

となる. また, x に対応して \hat{x} を

$$\hat{x} \stackrel{\text{OP}}{=} x(-E_h^2 + 2E_h)^{-1} \stackrel{\text{OP}}{=} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_h^{n-1}}{2^{n-1}},$$

と定義すると, \hat{x} のべきの四則演算や差分演算は連続系の演算と対応がつく. 微分方程式とその解の差分化も, 2点前進差分の場合に述べた手続きと同様の手続きで差分演算子方程式とその解, さらに差分方程式とその解に自動的に変換できる.

$\frac{d}{dx}$ に対応する差分演算子はまだ他にいろいろ考えられるが, そのすべてに対して, 連続系に対応する差分系が存在するか否かはまだ明らかでない.

Burgers 方程式の差分化

今まで線形微分方程式の差分化について議論を進めてきた. これを非線形微分方程式まで拡張することを考えると問題が生じる. 例えば KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

を例にとる. $\frac{d}{dx}$ に対応する差分演算子を2点前進差分で定義すると, 前に述べた手続きで差分演算子方程式

$$\delta_t\{\hat{u}\} + 6\hat{u}\delta_x\{\hat{u}\} + \delta_x^3\{\hat{u}\} \stackrel{\text{OP}}{=} 0,$$

が得られ, 解 \hat{u} は連続系での解 u の引き数 x を \hat{x} に置き換えたものとなる. この差分演算子方程式を差分方程式に変換するには, 両辺を 1 に作用させればよく,

$$\tilde{u} + 6\hat{u}\delta_x\{\hat{u}\} \cdot 1 + \Delta_x\{\tilde{u}\} = 0,$$

が得られ, 解は $\tilde{u} = \hat{u} \cdot 1$ となる. ところが, 上式の第2項 $\hat{u}\delta_x\{\hat{u}\} \cdot 1$ は \tilde{u} で陽に表わすことができない. 一般の非線形方程式の差分化でもこれと同様の問題点が生じる. そこで,

もう少し差分化の手続きをゆるめて、従属変数が陽な形で式に含まれるような差分化が行えないかということを考える。ここでは、この拡張が成功した例として Burgers 方程式を提出する。まず、連続系での Burgers 方程式は

$$u_t = 2uu_x + u_{xx},$$

である。この方程式はよく知られた Cole-Hopf 変換

$$u = \frac{f_x}{f},$$

により、拡散方程式

$$f_t = f_{xx},$$

に帰着する。今、微分演算子 $\frac{d}{dx}$ に対応する差分演算子は 2 点前進差分であるとし、 \hat{u} を

$$\hat{u} \stackrel{\text{op}}{=} \delta_x \{ f(x, t) \} \frac{1}{f(x, t)} \stackrel{\text{op}}{=} \frac{\Delta_x \{ f(x, t) \}}{f(x+h, t)} E_h,$$

と定義する。差分 Burgers 方程式は

$$[\delta_t \{ \hat{u} \} - 2\delta_x \{ \hat{u} \} \hat{u} - \delta_x^2 \{ \hat{u} \}] f \cdot 1 = 0,$$

であるとする（必然性はない）。すると \hat{u} の定義より、

$$[\delta_x \{ \delta_t \{ f \} - \delta_x^2 \{ f \} \} - \delta_x \{ f \} \frac{1}{f} (\delta_t \{ f \} - \delta_x^2 \{ f \})] \cdot 1 = 0,$$

となり、これから

$$\Delta_t \{ f \} = \Delta_x^2 \{ f \}, \quad (\text{a})$$

が導かれる。上の Burgers 方程式は

$$\tilde{u}(x, t) = \hat{u} \cdot 1 = \frac{\Delta_x \{ f(x, t) \}}{f(x+h, t)}, \quad (\text{b})$$

を用いて

$$\begin{aligned} & \{ 1 - h(\tilde{u}(x+2h, t) + \tilde{u}(x+h, t)) + \frac{k}{h}(\tilde{u}(x+2h, t) - \tilde{u}(x+h, t)) \\ & + (h^2 + k)\tilde{u}(x+2h, t)\tilde{u}(x+h, t) \} \Delta_t \{ \tilde{u}(x, t) \} \\ & = 2\tilde{u}(x+2h, t) \Delta_x \{ \tilde{u}(x, t) \} + \Delta_x^2 \{ \tilde{u}(x, t) \}, \end{aligned} \quad (\text{c})$$

と書き替えることができる。以上のことより差分 Burgers 方程式 (c) が差分 Cole-Hopf 変換 (b) により、差分拡散方程式 (a) に変換されることがわかる。同様のことは高次 Burgers 方程式についても成立し、例えば差分 3 次 Burgers 方程式

$$\begin{aligned} & \{ \varphi(x+3h, t) \varphi(x+2h, t) \varphi(x+h, t) \\ & + \frac{k}{h^3} (1 - 3\varphi(x+3h, t) + 3\varphi(x+3h, t) \varphi(x+2h, t) \\ & - \varphi(x+3h, t) \varphi(x+2h, t) \varphi(x+h, t)) \} \Delta_t \{ \tilde{u}(x, t) \} \\ & = \Delta_x^3 \{ \tilde{u}(x, t) \} + 3\tilde{u}(x+3h, t) \Delta_x^2 \{ \tilde{u}(x, t) \} + 3\Delta_x \{ \tilde{u}(x, t) \} \Delta_x \{ \tilde{u}(x+2h, t) \} \\ & + 3\tilde{u}(x+2h, t) \tilde{u}(x+3h, t) \Delta_x \{ \tilde{u}(x, t) \}, \end{aligned}$$

は差分 Cole-Hopf 変換

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{\Delta_x \{ f(x, t) \}}{f(x+h, t)},$$

により、線形偏差分方程式

$$\Delta_t \{ f(x, t) \} = \Delta_x^3 \{ f(x, t) \},$$

に帰着する。ただし、 $\varphi(x, t)$ を

$$\varphi(x, t) = 1 - h u(x, t),$$

と定義する。

おわりに

以上のように、離散演算子系を介在させることによって、離散系の演算規則や差分方程式を連続系の演算規則や微分方程式と対応をつけることが可能になった。しかしながら、非線形方程式のところでも述べたように、離散系の変数が陽な形で式に含まれるような差分方程式は、線形微分方程式など限られた範囲でしか得られていない。また、ある差分方程式が与えられたときに、それがどのように連続系と対応がつくかという問題もまだ未解決である。これらの点を考慮しつつ、上述の差分化の拡張を今後の課題として考えていきたい。