数理解析研究所講究録
第685巻 1989年 119-128

pfaffianの微分, Laplace展開, Jacobi等式

広大 工 広田良吾(Ryogo Hirota)
広大 工 伊藤雅明(Masaaki Ito)

ソリトン方程式は解の構造によっていくつかの系列に分けられる。2次元K-dV方程式に代表されるKP方程式系の解はWronskianで表わされることが知られている。ここではBKP方程式

$$(D_1^6-5D_1^3D_3-5D_3^2+9D_1D_5)\tau\cdot\tau=0$$

の解τがpfaffianで表わされることを, pfaffianに関する演算を行う数式処理プログラムを用いて示す。

(1) pfaffianの定義, pfaffianの展開.

$\mathbb{W}$をn次の反対称行列とする。$\mathbb{W}$のpfaffian pf $\mathbb{W}$は$\mathbb{W}$の行列式の平方根

$$\det \mathbb{W} = [\mathrm{pf}\ \mathbb{W}]^2$$

として定義され,

$$\mathrm{pf}\ \mathbb{W} = (1,2,\cdots,n)$$

と表わす。奇数次の反対称行列式の値は0であるので，奇数次のpfaffianも0である。例えば，4次の反対称行列

$$\mathbb{W}_4 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

を考えると，$\mathbb{W}_4$ の行列式は

$$\det \mathbb{W}_4 = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2$$

であるので，$\mathbb{W}_4$ のpfaffianは

$$\mathrm{pf}\ \mathbb{W}_4 = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$$

となる。又，これを

$$\mathrm{pf}\ \mathbb{W}_4 = (1, 2, 3, 4)$$

と表わす。

pfaffian $(1, 2, \cdots, 2n)$ の基本的な展開則は

$$\boxed{\begin{aligned}&(1, 2, 3, \cdots, 2n)\\ &= \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j (1, j)(2, 3, \cdots, \hat{j}, \cdots, 2n)\end{aligned}}$$

である。ここで $\hat{j}$ は j を除くという意味である。この展開則によると，pf $\mathbb{W}_4$ は

$$\mathrm{pf}\ \mathbb{W}_4 = (1, 2, 3, 4)$$

$$=(1,2)(3,4)-(1,3)(2,4)+(1,4)(2,3)$$

と展開される。(j,k) は Pf_4 の j,k 成分に対応しており，

$$(j,k)=-(k,j)$$

である。

(2) pfaffian の微分

BKP 方程式は

$$(D_1^6-5D_1^3D_3-5D_3^2+9D_1D_5)\tau\cdot\tau=0$$

で表わされるが，ここで $D_1, D_3, \cdots$ は

$$D_l^m f\cdot g=\left(\frac{\partial}{\partial x_l}-\frac{\partial}{\partial x_l'}\right)^m f(x_l)g(x_l')\Big|_{x_l'=x_l}$$

で定義される双線形微分演算子であるので，τ が pfaffian で表わされることを示すためには，pfaffian に対する微分則を調べておかなければならない。

そこで，pfaffian の要素 (j,k) として

$$\boxed{(j,k)=c_{j,k}+\int_{-\infty}^{x_1}D_{x_1'}f_j(x_1')\cdot f_k(x_1')\,dx_1'} \quad \text{—①}$$

を考える。ここで $c_{j,k}$ は定数であり，f_j は線形微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_m}f_j=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^m f_j \qquad (m:\mathrm{odd})$$

を満たすものとする。(j, k) の x_1 に関する微分は

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(j, k) = D_{x_1} f_j \cdot f_k$$

$$= \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}\right) f_k - f_j \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\right) \quad \cdots \text{②}$$

で表わされる。ここで，関数の微分を表わす pfaffian として次の記号を導入する

$$\boxed{\begin{aligned} &(d_m, j) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^m f_j \qquad m = 0, 1, 2, \cdots \\ &(d_n, d_m) \equiv 0 \qquad n = m = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned}} \quad \cdots \text{③}$$

この記号を用いると，②式は

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(j, k) = (d_1, j)(d_0, k) - (d_0, j)(d_1, k)$$

$$= (d_0, d_1, j, k) \quad \cdots \text{④}$$

となり，pfaffian の x_1 微分も pfaffian で表現される。BKP方程式は x_1 だけでなく，x_3, x_5 に関する微分も含むので，それらに関する微分則も調べておく。

①式を x_3 で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(j, k) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1'} f_k - f_j \frac{\partial f_k}{\partial x_1'}\right) dx_1'$$

$$=\left(\frac{\partial^3 f_j}{\partial x_1^3}\right)f_k - f_j\left(\frac{\partial^3 f_k}{\partial x_1^3}\right) - 2\left[\left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\right) - \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_1^2}\right)\right]$$

となる。ここで③の記号を用いると,

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(j,k) = (d_3, j)(d_0, k) - (d_0, j)(d_3, k)$$
$$-2\left[(d_2, j)(d_1, k) - (d_1, j)(d_2, k)\right]$$
$$= (d_0, d_3, j, k) - 2(d_1, d_2, j, k) \quad \cdots ⑤$$

となり, pfaffianで表現される。同様にして, x_5に関する微分

$$\frac{\partial}{\partial x_5}(j,k) = (d_0, d_5, j, k) - 2(d_1, d_4, j, k) + 2(d_2, d_3, j, k) \quad \cdots ⑥$$

を得る。

一般に $(1, 2, \cdots, 2n)$ に対する微分は,

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(1,2,\cdots,2n) &= (d_0, d_1, 1, 2, \cdots, 2n) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(1,2,\cdots,2n) &= (d_0, d_3, 1, 2, \cdots, 2n) - 2(d_1, d_2, 1, 2, \cdots, 2n) \\ \frac{\partial}{\partial x_5}(1,2,\cdots,2n) &= (d_0, d_5, 1, 2, \cdots, 2n) - 2(d_1, d_4, 1, 2, \cdots, 2n) \\ &\quad + 2(d_2, d_3, 1, 2, \cdots, 2n) \end{aligned}}$$

で与えられる。

(3) pfaffian のためのREDUCEプログラム

(1)及び(2)節で見てきたpfaffianの展開，微分を実行するREDUCEプログラムを実行例で示す。

まず記号の説明をしておく。

○ pfaffianを表わすにはPFを用いる。例えば(1, 2, 3, 4)を表わすには，PF(1, 2, 3, 4)とする。成分の数は任意である。又，③式で定義したような関数の微分を表わすpfaffian 例えば，

$(d_0, d_1, 1, 2)$ は PF(B(0), B(1), 1, 2)

と表わす。一般に d_ℓ はB(ℓ)と表わす。

○ pfaffianの微分にはDPを用いる。例えば，

$\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right)^m (1, 2, 3, 4)$ は $DP(PF(1, 2, 3, 4), x_\ell, m)$

と表わす。DFオペレータと同じ表記法である。

○ pfaffianを展開則に従って展開するには，PFF 又は EVALWP を用いる。EVALWP(F)は式Fの中に含まれるpfaffian PF(…)を全て展開する。

○ 双線形微分演算子 $D_{x_\ell}^m$ を表わすには D を用いる。

$D_{x_1}^\ell D_{x_2}^m \cdots D_{x_n}^k f \cdot g$ は $D(f, g, x_1, \ell, x_2, m, \cdots, x_n, k)$

で表わす。$g=f$ のときには $D(f, g, \cdots)$ の代りに $D1(f, \cdots)$

と表わしてもよい。例えば

$D_{x_1}^3 D_{x_3} f \cdot f$ は DI$(f, x_1, 3, x_3)$

と表わす。f, g の中に pfaffian PF(…) が含まれている場合は自動的に上記の微分規則が適用される。

次に関数の実行例を示す。

```
Q2 := PF(1,2,3,4);

Q2 := PF(1,2,3,4)

PFF(1,2,3,4);
```

(1, 2, 3, 4) の展開

```
PF(3,4)*PF(1,2) - PF(2,4)*PF(1,3) + PF(2,3)*PF(1,4)

EVALWP Q2;
```

Q2 の中の pfaffian を展開する。

```
PF(3,4)*PF(1,2) - PF(2,4)*PF(1,3) + PF(2,3)*PF(1,4)

Q1 := PF(1,2)¥

DP(Q1,X1);
```

$\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1$

```
PF(B(0),B(1),1,2)

DP(Q1,X1,2);
```

$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} Q_1$

```
PF(B(0),B(2),1,2)
```

```
DP(Q1,X3);
```

$\frac{\partial}{\partial x_3} Q_1$

```
- (2*PF(B(1),B(2),1,2) - PF(B(0),B(3),1,2))
```

```
DP(Q1,X3,X1);
```

$\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} Q_1$

```
- (PF(B(1),B(3),1,2) - PF(B(0),B(4),1,2))
```

```
DP(Q1,X5);
```

$\frac{\partial}{\partial x_5} Q_1$

```
2*PF(B(2),B(3),1,2) - 2*PF(B(1),B(4),1,2) + PF(B(0),B(5),1,2)
```

```
DP(Q1,X5,X1);
```

$\frac{\partial^2}{\partial x_5 \partial x_1} Q_1$

```
- (PF(B(1),B(5),1,2) - PF(B(0),B(6),1,2) - 2*PF(B(0),B(1),B(2
  ),B(3),1,2))
```

このようなプログラムを用いて，BKP方程式

$$(D_{x_1}^5 - 5D_{x_3}D_{x_1}^3 - 5D_{x_3}^2 + 9D_{x_1}D_{x_5})\tau\cdot\tau = 0$$

の解τがpfaffianで表わされることを確める．BKP方程式をoperatorとして定義し，1-soliton，及び2-soliton解に対応するpfaffian PF(1,2)及びPF(1,2,3,4)を代入すると，

```
OPERATOR BKP;

FOR ALL F LET
 BKP(F) = D1(F,X1,6)-5*D1(F,X1,3,X3)-5*D1(F,X3,2)+9*D1(F,X1,X5);

ON LIST;
```

```
R1 := BKP(PF(1,2));

R1 :=

      -90*(PF(B(2),B(3),1,2)*PF(B(0),B(1),1,2)

            -PF(B(1),B(3),1,2)*PF(B(0),B(2),1,2)

            +PF(B(1),B(2),1,2)*PF(B(0),B(3),1,2)

            -PF(B(0),B(1),B(2),B(3),1,2)*PF(1,2))

R2 := BKP(PF(1,2,3,4));

R2 :=

      -90*(PF(B(2),B(3),1,2,3,4)*PF(B(0),B(1),1,2,3,4)

            -PF(B(1),B(3),1,2,3,4)*PF(B(0),B(2),1,2,3,4)

            +PF(B(1),B(2),1,2,3,4)*PF(B(0),B(3),1,2,3,4)

            -PF(B(0),B(1),B(2),B(3),1,2,3,4)*PF(1,2,3,4))
```

となる。各々の式の pfaffian を展開すると,

```
EVALWP R1;

0

EVALWP R2;

0
```

となり，解であることが確められる。上の R1 及び R2 は同じ構造をしており，n-soliton 解に対応する pfaffian $(1,2,\cdots,2n)$ に対しても同じ構造の恒等式

$$\boxed{\begin{aligned}
&(d_0, d_1, d_2, d_3, 1, 2, \cdots, 2n)(1, 2, \cdots, 2n) \\
&- (d_0, d_1, 1, 2, \cdots, 2n)(d_2, d_3, 1, 2, \cdots, 2n) \\
&+ (d_0, d_2, 1, 2, \cdots, 2n)(d_1, d_3, 1, 2, \cdots, 2n) \\
&- (d_0, d_3, 1, 2, \cdots, 2n)(d_1, d_2, 1, 2, \cdots, 2n) \\
&= 0
\end{aligned}}$$

が成立する。