

# Constituent Knots and Links of Spatial Graphs

早大教育 鈴木晋一 (Shin'ichi Suzuki)

## §0 序

本稿で扱うグラフ (graphs) はすべて有限グラフである。  
グラフ  $G$  を自然にコンパクト距離空間と考え、 $G$  の 3 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  の中への polygonal な埋蔵  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  について、 $f(G) = G_f$  を  $G$  の 空間内の実現 (spatial representative) または 空間グラフ (spatial graph) と呼ぶ。

グラフ  $G$  の空間内の実現を、次の同値関係によって分類する。

定義 1.  $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  を、グラフ  $G$  の埋蔵とする。空間グラフ  $G_f$  と  $G_g$  が 全同位 (ambient isotopic) である (これを  $G_f \approx G_g$  で示す) とは、同相写像  $H: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times I$  が存在し、次を満たすときをいう：

(i)  $H(x, t) = (h_t(x), t)$  ( $x \in \mathbb{R}^3, t \in I$ ) (レベル保存),

$h_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  は同相写像 ( $\forall t \in I$ ).

(ii)  $h_0 = \text{id}$  (恒等写像),  $h_1(G_f) = G_g$ .

空間  $\mathbb{R}^3$  の向きを保存する同相写像はすべて恒等写像と同位 (isotopic) であるから、次の成り立つ。

命題 1 空間グラフ  $G_f$  と  $G_g$  が全同位であるための必要十分条件は、向きを保存する同相写像  $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  が存在し、 $\psi(G_f) = G_g$  となることである。□

いずかにしても、空間グラフが全同位であるという関係は、グラフ  $G$  の空間内の実現  $\{G_{f_\lambda} \mid f_\lambda: G \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ は埋蔵}\}$  において同値関係であり、 $G_f$  の  $\approx$  に属する同値類を  $[G_f]$  と示し、 $G_f$  の 結び目型 (knot type) という。

グラフ  $G$  の 3次元空間  $\mathbb{R}^3$  における位置の問題 (knotting problem) を考察する方法としては、次の2つの流れがある。

(イ) 結び目 (knots), 絡み目 (links) の理論で考えられていた不変量や概念を、空間グラフにまで一般化する。

Kinoshita [8], [9], [10], [11], Suzuki [19], [20], [21], [22], Yamada [28] など、この流れがこの道の主流であった。

(ロ) 空間グラフ上の部分グラフとしてサイクル (cycles) が作る結び目や絡み目の集合を調べることによって、その特徴付けをする。

これは、Sachs [17], Conway-Gordon [3], Kinoshita [12] など

によって開花した分野で、グラフの構造と結びついた組合せ論的な定理が生れてきた。

今回の研究会では、上記の [17], [3], [12] および Shimabara [18], Yamamoto [29] を中心に、(D) に関する話題を整理して紹介した。しかし、その概要は、筆者の報告 [23], [24] で既に述べてあるので、この報告では [24] の流れに沿って、その欠落部分を補いながら、その後に分明した結果や問題点を中心にまとめてみたい。

空間グラフの位置の問題の出發は、次の2つの定理である。

定理 1. グラフ  $G$  が非輪状 (acyclic) ならば、その任意の埋蔵  $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  について、 $G_f \approx G_g$  である。すなわち、非輪状グラフの  $\mathbb{R}^3$  における位置の問題は自明である。□

これは単純弧の  $\mathbb{R}^3$  における位置の問題が自明であることから導かれ、前述の (D) の背景ともなっている。

定理 2.  $G$  を planar グラフとし、 $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  を平面への埋蔵とする。  $\mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^3$  の部分空間と考えて、 $f$  と  $g$  を自然に  $\mathbb{R}^3$  への埋蔵と考えると、 $G_f \approx G_g$  である。□

この定理の最も一般的を証明が [13] にある。グラフ理論の立場からは、Whitney [26], [27] の結果を利用するとよい。

この定理2から、次の定義が導びかれる。

定義2.  $G$  を planar グラフとする。  $G$  の空間内の実現  $G_f$  が 平凡 (trivial, unknotted) であるとは、平面への埋蔵  $f_0: G \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  について、  $G_f \approx G_{f_0}$  となることである。またその結び目型  $[G_f] = [G_{f_0}]$  を 平凡型 (trivial type) と呼ぶ。

問題1. グラフ  $G$  の種数 (genus) を  $\gamma(G)$  で表す ([1], [4]). planar グラフの種数は0である。種数  $\gamma(G) > 0$  のグラフ  $G$  に対して、その空間内の実現が“平凡”であることの定義は可能か？

$\gamma(G) = 1$  のグラフの代表として、5頂点完全グラフ  $K_5$  と完全2組グラフ  $K_{3,3}$  について考察してみる。次の図は、 $\mathbb{R}^3$  内に標準的に埋蔵されたトーラス (種数1の向き付け可能な閉曲面) 上に埋蔵した  $K_5$  と  $K_{3,3}$  の例である。

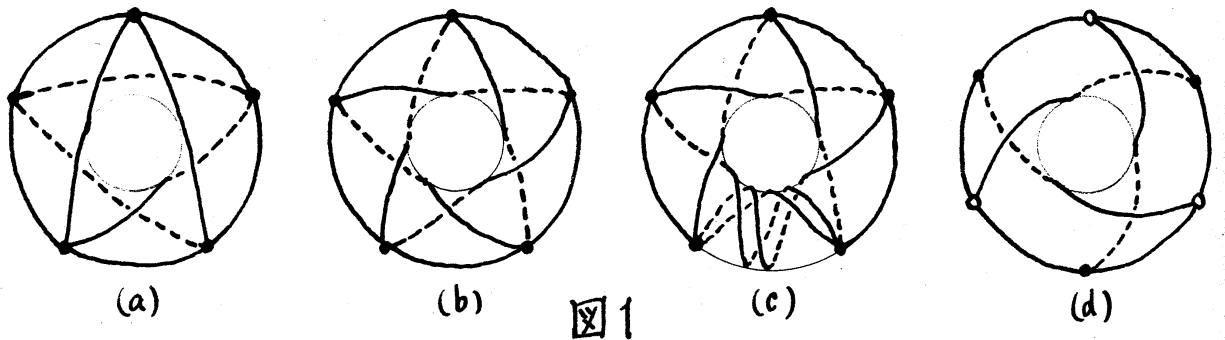


図1(a)は、そのすべてのサイクルが平凡型の結び目 (定義は次節) となる  $K_5$  の埋蔵、(b)は  $(2,5)$ -トーラス結び目を含む  $K_5$  の埋蔵で、(a)と(b)は全同位ではない。(c)は、

トーラスの経線に沿ってトーラスを切断し、切り口を  $2\pi$  回転して貼り直す写像によって (b) から得られた  $K_5$  の埋蔵で、 $(2, 7)$ -トーラス結び目を含む。従って、(a) と (b) とも全同位ではない。同じ方法で、一般に任意の奇数  $p$  に対して、 $(2, p)$ -トーラス結び目を含む  $K_5$  の埋蔵が得られる。

図 1 (d) は、 $(2, 3)$ -トーラス結び目を含む  $K_{3,3}$  の埋蔵で、 $K_5$  の場合と同様に、これを利用して互いに全同位でない可能無限個の埋蔵を得る。

いざこれにしても、 $\chi(G) = 1$  を有するグラフ  $G$  については、定理 2 に相当する命題は成立しない。

グラフ  $G$  のすべての辺が線分であるような  $G$  の空間内の実現を、線形空間グラフと呼ぶことにする。単純グラフはすべて線形空間グラフとして実現できる。“平凡型”は、このような線形グラフを代表元として持つ類であらう。

尚、図 1 (a), (d) は線形グラフを代表元として持つが、(b) (c) は持たないことが容易に確かめられる。

定義 3. 2つのグラフ  $G$  と  $G'$  が 同相 (homeomorphic) であるとは、距離空間として互いに同相となる場合をいう。

空間グラフの定義と、それらの全同位の定義からわかるように、同相をグラフの位置の問題は同じである。

### §1. 結び目理論からの準備

(円周  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  は, 任意の長さ  $n (\geq 1)$  のサイクルと同相である。従って次の定義は, 前節の定義1と定義2の特別な場合であるが, 改めて別記する。

定義4.  $S^1$  の  $\mu$  個の直和  $S^1 \amalg \cdots \amalg S^1$  の  $\mathbb{R}^3$  の中への折線状の埋蔵  $f: S^1 \amalg \cdots \amalg S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  の像

$$L = f(S^1 \amalg \cdots \amalg S^1) = C_1 \cup \cdots \cup C_\mu$$

を,  $\mu$  成分の 絡み目 (link) とする。

1成分の絡み目を特に 結び目 (knot) とする。

絡み目が全同位である: この定義は, 定義1による。

$\mu$  成分の絡み目  $L$  が 平凡 である: この定義は, 定義2による。すなわち,  $L$  が平凡であるとは,  $\mathbb{R}^2$  上の  $\mu$  個の単純閉折線 (多辺形) と  $\mathbb{R}^3$  内で全同位となるときをいう。

定義5.  $\mu (\geq 2)$  成分の絡み目  $L = C_1 \cup \cdots \cup C_\mu$  が  $\nu$  因子 を持つとは,  $\mathbb{R}^3$  内に互いに交わらない  $\nu$  個の3次元球体  $B_1^3, \dots, B_\nu^3$  が存在し, 次を満すときをいう:

(i)  $L \subset B_1^3 \cup \cdots \cup B_\nu^3$ ,  $B_j^3 \cap L \neq \emptyset$ ,  $\partial B_j^3 \cap L = \emptyset$  ( $j=1, \dots, \nu$ ).

(ii) 任意の  $\lambda > \nu$  について,  $\mathbb{R}^3$  内に互いに交わらない  $\lambda$  次元球体  $B_1^3, \dots, B_\lambda^3$  があり, 上の (i) を満すものは存在しない。

このとき,  $L_j = L \cap B_j^3$  ( $j=1, \dots, \nu$ ) を  $L$  の 因子 と呼ぶ。

$\nu \geq 2$  のとき、 $L$  は 分離 するといふ。特に  $\nu = \mu$  のとき、 $L$  は 完全に分離 するといふ。

$\mu (\geq 2)$  成分の平凡な絡み目は完全に分離する。

結び目理論に用いられる正則射影図の概念は、空間グラフを扱う際にも有効である。

$$p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$$

を射影とする。空間グラフ  $G_f$  の像  $p(G_f)$  上の点  $q$  が  $k$  重点 であるとは、 $p^{-1}(q) \cap G_f$  が  $k$  個の点から成るときをいふ。

$k = 1$  の点を通常点、 $k \geq 2$  の点を多重点といふ。

空間グラフ  $G_f$  が (射影  $p$  にに関して) 正則な位置 にあるとは、次の条件 (R) を満たすときをいふ：

(R)  $p(G_f)$  上の多重点は、高々有限個の 2 重点で、各 2 重点  $q$  について  $p^{-1}(q)$  は  $G_f$  の頂点を通らない。

空間グラフが正則な位置にあるとき、 $p(G_f)$  を  $G_f$  の 正則射影像 (以後簡単に 射影像) といふ。このとき  $p(G_f)$  の 2 重点のときは、局所的に 2 辺の像が交叉している。そこで  $G_f$  の辺の座標の高低に従って、下側を通る辺に切れ目を入れて空間的感覚を出した図を、 $G_f$  の 正則射影図 (以後簡単に 射影図) と呼ぶ。後の図 3 を参照のこと。

射影図  $\tilde{G}_f$  において、 $p(G_f)$  の 2 重点に対応する点を、交

又点という。

空間グラフの辺はすべて折線状としたので、次が分る：

命題 2.  $G_f$  を空間グラフとする。  $[G_f]$  の代表元で、正則な位置にあるものが存在する。  $\square$

次の命題は、絡み目を切断して繋ぎ直すことを許せば、どんな絡み目も平凡型にできるという、経験的に周知の事実を主張している。

命題 3.  $L$  を正則な位置にある絡み目とし、その射影図  $\tilde{L}$  の交叉点の数を  $n (> 0)$  とする。  $\tilde{L}$  の  $n$  個の交叉点の中から適当に  $u$  個 ( $0 \leq u < n$ ) を選んで、それらの点の交叉の上下を交換 (cross change) することにより、平凡な絡み目 (の射影図) を得ることが出来る。  $\square$

この簡単な命題から、次が得られる。

系 1.  $L$  と  $L'$  を  $\mu$  成分の絡み目とすると、絡み目型  $[L]$  と  $[L']$  の正則な位置にある代表元  $L, L'$  が存在し、射影像  $p(L)$  と  $p(L')$  が一致する。従って特に、 $L'$  の射影図  $\tilde{L}'$  は、 $L$  の射影図  $\tilde{L}$  のいくつかの交叉点の交叉の上下を交換することによって得られる。  $\square$



上の命題3と同じ考え方で、次も容易に証明される。

命題4.  $L$  を正則な位置にある  $\mu$  成分の絡み目 ( $\mu \geq 2$ ) とし、射影図  $\tilde{L}$  の交叉点の個数を  $n > 0$  とする。これら  $n$  個の交叉点から適当に  $\bar{u}$  個 ( $0 \leq \bar{u} < n$ ) を選んで、それらの点における交叉の上下を交換することにより、完全に分離する絡み目 (の射影図) を得ることが出来る。□

定義6.  $L$  を絡み目とする。結び目型  $[L]$  のあらゆる正則な位置にある代表元  $L_\lambda$  について、

(i) 命題3によって存在が示された整数  $u$  の最小値を  $u[L]$  で表し、 $[L]$  の 結び目消滅数 (unknotting number) といい、

(ii) 命題4によって存在が示された整数  $\bar{u}$  の最小値を  $\bar{u}[L]$  で表し、 $[L]$  の 絡み解消数 (unlinking number) といい。

また命題3と同じ考え方で、空間グラフについても系1に対応して、次が証明される。

定理3. グラフ  $G$  の (任意の) 埋蔵  $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  について、 $[G_f]$  と  $[G_g]$  の正則な位置にある代表元  $G_f, G_g$  が存在し、 $p(G_f)$  と  $p(G_g)$  が一致する。従って特に、 $G_g$  の射影図  $\tilde{G}_g$  は、 $G_f$  の射影図  $\tilde{G}_f$  のいくつかの交叉点の交叉の上下を交換することによって得られる。□

ここで、射影図から簡単に計算できる絡み目の不変量を一つ紹介しておく。

定義 7.  $L = A \cup B$  を 2 成分の絡み目とする。  $A, B$  には向きが指定してあり、正則な位置にあるとする。射影図  $\tilde{A} \cup \tilde{B}$  の各交叉点  $q$  において、次の図のように符号  $\varepsilon(q)$  を定める。

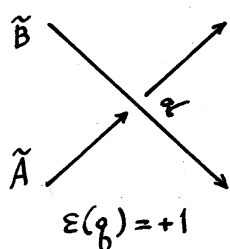
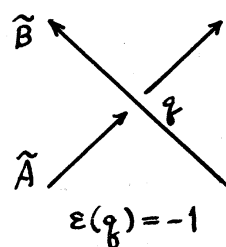


図 2



そこで、
$$lk(A, B) = \sum_q \varepsilon(q)$$

と定め、 $A$  と  $B$  の 絡み数 (linking number) という。ただし  $\sum_q$  は  $\tilde{A}$  が  $\tilde{B}$  の下を通るすべての交叉点に関して和をとるものとする。これは  $A$  と  $B$  の向きに依存するが、射影図の選択に依らない。

$$lk_2(A, B) \equiv lk(A, B) \pmod{2}$$

とすると、 $lk_2(A, B)$  は向き指定に依らない 2 成分の絡み目  $A \cup B$  の結び目型不変数であり、特に次の成り立つ。

命題 5.  $L = A \cup B$  を 2 成分の絡み目とする。

$$lk_2(A, B) \neq 0 \Rightarrow L \text{ は分離しない。}$$

$$\Rightarrow L \text{ は非平凡型である。} \quad \square$$

## §2. 絡み目を内蔵するグラフ

定義 8. グラフ  $G$  が 絡み目を内蔵する (self-linked) とは,  $G$  の任意の空間内の実現  $G_f$  について,  $G_f$  上に disjoint な 2 つのサイクルの組  $\{c_1, c_2\}$  が存在し,  $c_1 \cup c_2$  は 非平凡型の絡み目となる場合をいう。

[注] Sachs [17] は, self-linked でない グラフを discatenable と定義し, self-linked なグラフを non-discatenable と呼んでいる。また Motwani-et al [14] では, self-linked でない グラフを, linkless embeddable graph と呼んでいる。いずれにしても, "self-linked" は小生の造語で, 是看したものではない。

H. Sachs は 1981 年に次を示した。

定理 4. (Sachs [17]) 図 3 に示す 8 種のグラフ  $K_6, K_{4,4}, K_{4,4}-e, K_{3,3,1}, G_7, G_8, G_9, PG$  は, いずれも絡み目を内蔵する。ここで,  $K_6$  は 6 頂点完全グラフ,  $K_{4,4}$  は完全 2 組グラフ,  $K_{3,3,1}$  は完全 3 組グラフで,  $PG$  は Petersen グラフと呼ばれるグラフである。□

Sachs [17] は, 絡み目型不変量として, 定義 6 (ii) で与えた絡み解消数を用い,  $K_{4,4}-e$  について互いに交わらないサイクルの組をすべて教えあげることによって,  $K_{4,4}-e$  と  $K_4$  の

結び目を内蔵することを示し、残りについては同様に確かめられるとしておく。結び解消数は意義は容易であるが決定す

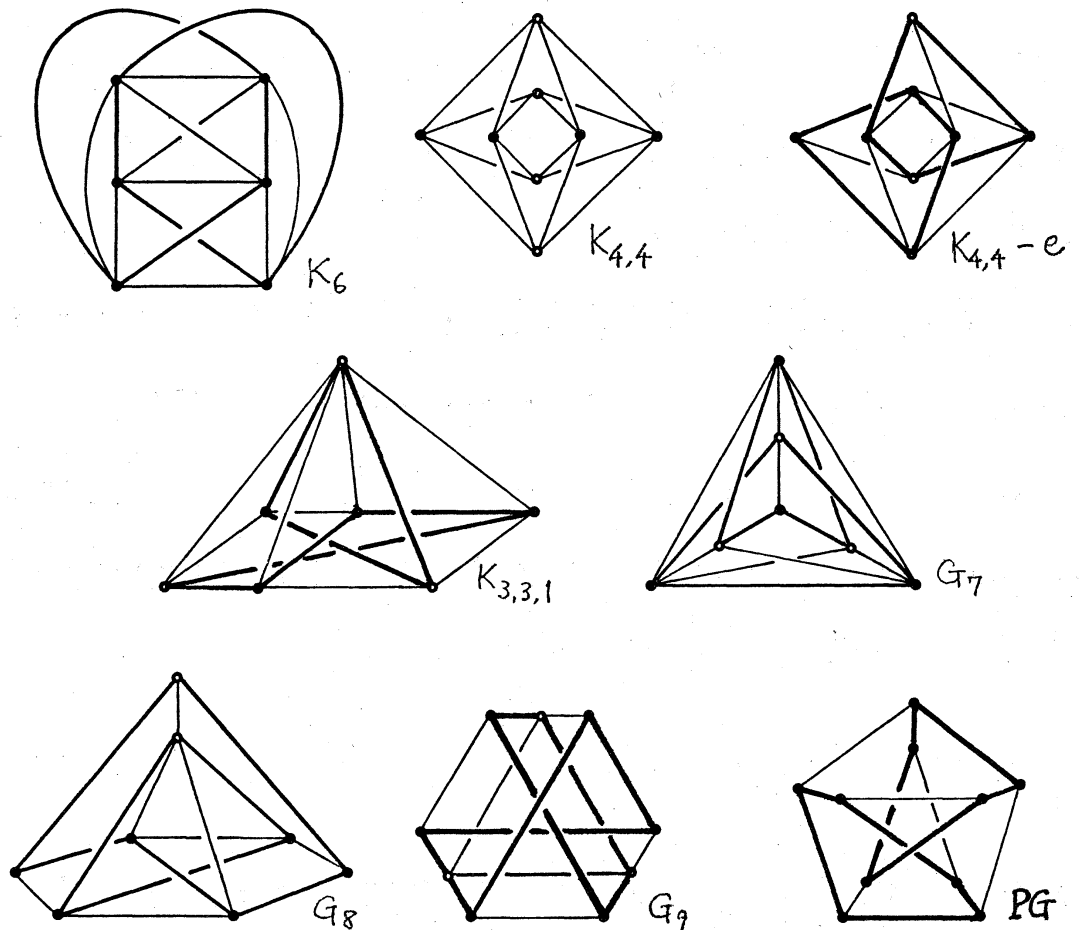


図3

るものは極めてむずかしい不変量で、結び目理論の立場からみると Sachs の証明はもう一つ明解でない。

しかし、とにかく(図3)に示した例では、 $K_{4,4}$ を除いて、(図4)に示す Hopf 結び目を唯一つだけ含むよう空間内の実現であることが確かめられる。(図3の中では、太線を示してある。)

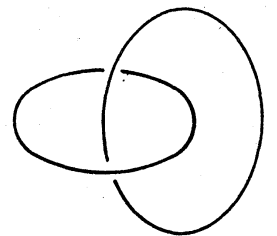


図4: Hopf 結び目

その後 1985 年に Conway-Gordon [3] は、完全グラフ  $K_6$  について別証明を与えた。(Sachs の論文 [17] を知らなかったと思われる。) ここで用いられた方法を整理すると次のようになる。

グラフ  $G$  の中の disjoint なサイクルの組の集合を  $\Lambda$  とする。  
( $\Lambda$  は disjoint なサイクルの組全体でもよいし、またその一部分でもよい。) 埋蔵  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対して、

$$\begin{aligned}\lambda_f(G; \Lambda) &= \sum_{\{c_1, c_2\} \in \Lambda} \text{lk}_2(f(c_1), f(c_2)) \in \mathbb{Z}_2 \\ &\equiv \sum_{\{c_1, c_2\} \in \Lambda} |\text{lk}(f(c_1), f(c_2))| \pmod{2}\end{aligned}$$

と定義する。これは対  $(G, \Lambda)$  の  $f$  に関する不変量である。

一方、グラフ  $G$  の non-adjacent な辺の対  $\{e_1, e_2\}$  に対して、

$$\nu(\Lambda; e_1, e_2) = \left| \{ \{c_1, c_2\} \in \Lambda \mid c_1 \supset e_1, c_2 \supset e_2 \} \right|$$

と定める。すると、次の補題が成り立つ。

補題 1.  $\lambda_f(G; \Lambda)$  は、埋蔵  $f$  に依存しない

$\Leftrightarrow G$  の non-adjacent な (任意の) 辺の対  $\{e_1, e_2\}$  に対して、

$$\nu(\Lambda; e_1, e_2) \text{ は偶数. } \square$$

この補題は、Conway-Gordon [3] が実質的に証明しているものだが、彼等はこれを  $K_6$  が self-linked であることを示した。実際、次が確かめられる。

命題 6. 図 3 に示した 8 個のグラフについて,  $\Lambda$  をそれぞれ  
のグラフの中の disjoint なサイクルの対全体とすると, いず  
れも補題 1 が成り立つ; すなわち  $\lambda_f(G; \Lambda)$  は埋蔵  $f$  に依ら  
ない. 特に次の計算される:

$$\begin{aligned} \lambda_f(K_6; \Lambda) &= \lambda_f(K_{4,4}-e; \Lambda) = \lambda_f(K_{3,3,1}; \Lambda) = \lambda_f(G_7; \Lambda) \\ &= \lambda_f(G_8; \Lambda) = \lambda_f(G_9; \Lambda) = \lambda_f(P; \Lambda) = 1, \\ \lambda_f(K_{4,4}; \Lambda) &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

分離する 2 成分の絡み目  $L = A \cup B$  については, 明らかに  
 $lk_2(A, B) = 0$  ( $|lk(A, B)| = 0$ ) だから, この命題 6 と補題 1 か  
ら, 定理 1 の別証明が得られる. (実際,  $K_{4,4}$  を除く 7 個のグ  
ラフについては直接に self-linked であることが結論される.  
 $K_{4,4}$  は  $K_{4,4}-e$  を部分グラフとして含むから, 当然 self-linked  
である. 実際, 図 3 の  $K_{4,4}$  は 2 つの Hopf 絡み目を含む.)

こゝで当然と言ったが, 一般に次が成り立つ.

命題 7. グラフが self-linked であるという性質は, その優  
グラフ (super graph) に遺伝する. すなわち, グラフ  $G$  が self-  
linked であるならば,  $G$  を部分グラフとして含むグラフはす  
べて self-linked である.  $\square$

定義 9. グラフ  $G$  の self-linkedness に関して 臨界 (critical)

であるとは,  $G$  が self-linked であって, かつ  $G$  の任意の辺  $e$  について,  $G-e$  が self-linked でない場合をいう。

図3に示したグラフでは,  $K_{4,4}$  を除いては, Hopf絡み目を1つだけ含んでいい。従って, この Hopf絡み目上の辺を1本除く得らぬ空間グラフは非平凡型の絡み目を含まない。よって,  $K_{4,4}$  を除く7個のグラフは, self-linkedness に関して臨界である。

定理2と平凡型の定義2および定義4から, planar グラフはすべて self-linked でない, すなわち linkless embeddings を持つ。一方, non-planar を極小グラフとして知らぬ  $K_5, K_{3,3}$  はいずれも  $K_6$  の真部分グラフであるから linkless embeddings を持つ。従って, linkless embeddings を持つグラフの類は, planar グラフを真部分集合として含み, かついつくかの禁止グラフ (forbidden graphs) で特徴付けできるはずである。この辺の事情は才4節で紹介する。

### §3. 結び目を内蔵するグラフ

定義10. グラフ  $G$  が 結び目を内蔵する (self-knotted) とは,  $G$  の任意の空間内の実現  $G_f$  について,  $G_f$  上のサイクル  $C$  が存在し,  $C$  が非平凡型の結び目となる場合をいう。

Conway-Gordon は, 前節でも挙げた論文でこれを証明した。

定理 5. (Conway-Gordon [3]) 7 頂点完全グラフ  $K_7$  は self-knotted である。□

この定理の証明には, Art 不変数または Conway 多項式と呼ばれる有向絡み目 (向きを指定してある絡み目) の不変量が使われた。以下に証明抜きで紹介する。

有向絡み目  $K$  の Conway 多項式  $\nabla_K(z)$  とは, 整係数多項式環  $\mathbb{Z}[z]$  の元であって, 次の 2 つの公理によって定義される。

(i) 平凡な結び目  $O$  について,  $\nabla_O(z) = 1$ 。

(ii) 1 つの交差点の近傍を図 5 に示すような形で与えられ, この近傍以外の部分では全く一致するような射影図を持つ 3 つの有向絡み目  $K_+$ ,  $K_-$ ,  $L$  について,

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z \nabla_L(z).$$

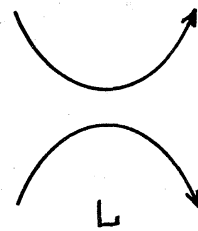
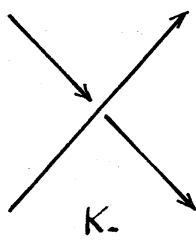
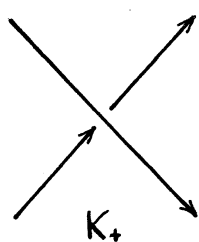


図 5

上の初期条件 (i) と漸化式 (ii) によって多項式  $\nabla_K(z)$  が定義されることは, 命題 3 によって保証される。



Conway 多項式  $\nabla_K(z)$  の  $z^n$  の係数を  $a_n(K)$  で示すことにすると, 次の成り立つ (Kauffman [5] など参照).

命題 8. (1) 有向結び目  $K$  に対し, その向きを逆にした結び目を  $\bar{K}$  で示せば,

$$\nabla_{\bar{K}}(z) = \nabla_K(z), \quad \text{特に } a_2(\bar{K}) = a_2(K).$$

(2) 図 5 において,  $K_+$  (と  $K_-$ ) が有向結び目ならば,  $L$  は 2 成分の絡み目となる. この成分を  $C_1, C_2$  とすると,

$$a_2(K_+) = a_2(K_-) + lk(C_1, C_2). \quad \square$$

この命題 8 を背景にして, グラフ  $G$  の埋蔵に対して新しい不変量を導入する.

グラフ  $G$  上のあるサイクルの集合を  $\Gamma$  とする. 自然数  $n$  と埋蔵  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対し,

$$\mu_f(G; \Gamma, n) \equiv \sum_{c \in \Gamma} a_2(f(c)) \pmod{n}$$

と定める. このサイクルの向きに依存しない  $G_f$  の結び目型の不変量であることの保証が命題 8(1) である.

$\mu_f(G; \Gamma, 2)$  は, Conway-Gordon [3] 以上の定理 5 の証明に用いているものを, Shimabara [18] 以上の形に一般化した.

$\mu_f(G; \Gamma, n)$  は 3 対  $(G; \Gamma, n)$  の  $f$  に依存する不変量であるが, この  $f$  に依存しないための必要十分条件が Shimabara

[18]にある。これは前節の補題1に比べてかなり複雑であるが、Conway-Gordon [3]は7頂点完全グラフ  $K_7$  について、 $\Gamma$  をその上の Hamilton サイクルの集合としたとき、 $\mu_f(K_7; \Gamma, 2)$  が埋蔵  $f$  に依らないこと、図6に示した  $K_7$  の空間内の実

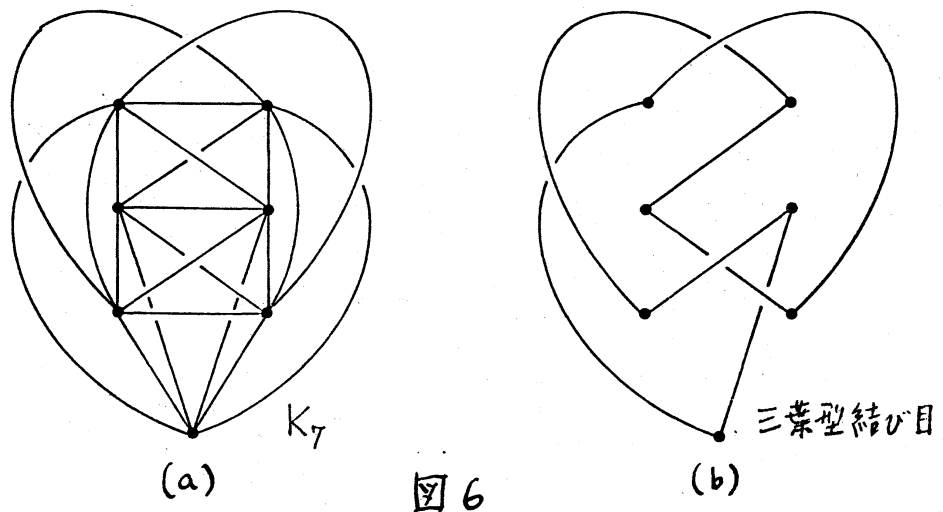


図6

現について  $\mu_f(K_7; \Gamma, 2) = 1$  を示すことにより定理5を証明した。実際、 $K_7$ には360個の Hamilton サイクルがあるが、図6(a)には(b)に示す三葉型結び目が含まれ、残り359個は平凡型である。ちなみに  $a_2(\text{三葉型結び目}) = 1$  であって、 $a_2(\text{平凡型結び目}) = 0$  ( $\nabla_K(z)$ の公理(i))である。

定理6. (Shimabara [18]) 完全2部グラフ  $K_{5,5}$  について、 $\Gamma$  をその Hamilton サイクルの集合とすると、 $\mu_f(K_{5,5}; \Gamma, 2)$ ,  $\mu_f(K_{5,5}; \Gamma, 4)$  は埋蔵  $f$  に依存しない。また  $\mu_f(K_{5,5}; \Gamma, 2) = 0$ ,  $\mu_f(K_{5,5}; \Gamma, 4) = 2$  である。従って特に  $K_{5,5}$  は self

knotted である。□

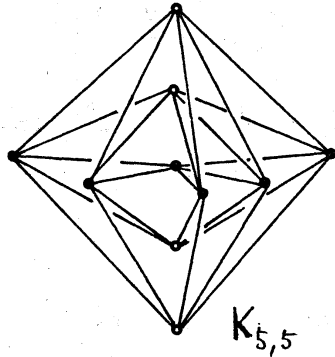


図7

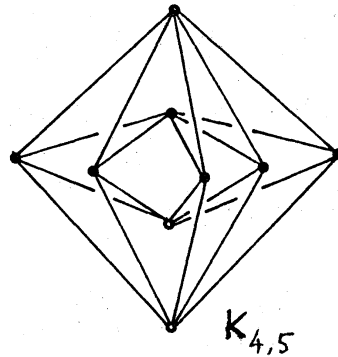


図8

実際、 $K_{5,5}$  には 1440 個の Hamilton サイクルが含まれるが、図7に示した  $K_{5,5}$  の空間内の実現については、丁度 10 個の三葉型結び目が含まれ、残りは平凡型となる。 $K_{5,5}$  の空間内の実現に関しては、 $a_2(K)$  が奇数となる結び目の  $4k+2$  個含まれることもわかる。

命題7と同様に、次も明らかである。

命題9. グラフが self-knotted であるという性質は、その super-graphs に遺伝する。□

定義11. グラフ  $G$  が self-knottedness に関して 臨界 (critical) であるとは、 $G$  が self-knotted であってかつ  $G$  の任意の辺  $e$  について  $G-e$  が self-knotted でない場合をいう。

定理5と図6から、 $K_7$  は self-knottedness に関して臨界である。臨界なグラフは単純グラフであることは自明で、 $K_7$  以

外の臨界グラフは頂点数が8以上であることもわかる。

また図8に示した完全2部グラフ  $K_{4,5}$  の空間内の実現ではその上のサイクルはすべて平凡型結び目であり、self-knotted ではないことがわかる。

問題1.  $K_{5,5}$  の部分グラフで、self-knottedness に関して臨界なものを探せ。(次節の最後を参照)

尚、Shimabara [18] では、次を主張している。

定理7. 完全2部グラフ  $K_{5,5}$  から任意の辺  $e$  を除いて得られるグラフ  $K_{5,5}-e$ , 完全3部グラフ  $K_{4,4,1}$ , 完全2部グラフ  $K_{m,m}$  ( $m \geq 5$ ) について、 $\Gamma$  をそれぞれの Hamilton サイクル全体とすると、次が成り立つ。

$\mu_f(K_{5,5}-e; \Gamma, 2)$ ,  $\mu_f(K_{4,4,1}; \Gamma, 2)$ ,  $\mu_f(K_{m,m}; \Gamma, 2)$  ( $m \geq 5$ ) はどれも埋蔵  $f$  に依存せず、特に 0 である;

$$\mu_f(K_{5,5}-e; \Gamma, 2) = \mu_f(K_{4,4,1}; \Gamma, 2) = \mu_f(K_{m,m}; \Gamma, 2) = 0. \quad \square$$

#### §4. Graph Minors の観点からの考察

この節では、linkless embeddable, knotless embeddable をグラフの類を、graph minors の観点から考察し、Motwani-Raghuathan-Saran [14] の結果を紹介する。

蛇足ながら、辺縮約 (edge-contraction) の定義から述べる。

定義 12. (1) グラフ  $G$  とその辺  $e = uv$  について、 $G - e$  において頂点  $u$  と  $v$  を同一視することによって得られるグラフを  $G/e$  と書き、 $G$  から辺  $e$  の 辺縮約 で得られたグラフをいう。

(2) グラフ  $H$  がグラフ  $G$  の minor である、これを  $H \leq G$  と示す、とは、 $G$  の部分グラフ  $H'$  と  $H'$  の辺  $e_1, e_2, \dots, e_n$  が存在して、 $H \cong ((H'/e_1)/e_2) \dots /e_n$  (同型) となる場合をいう。また  $H \leq G$  であるとき、 $G$  は  $H$  に minor reducible であるともいう。

すべての有限グラフの集合において、この minor 関係  $\leq$  は半順序を定める。

定義 13.  $\mathcal{F}$  を、性質  $P(\mathcal{F})$  を満たす有限グラフの族とする。

(1) 族  $\mathcal{F}$  (または性質  $P(\mathcal{F})$ ) の minor-reduction に関して 閉じている (closed) とは、次を満たすときをいう：

$$\forall G \in \mathcal{F} \text{ について, } H \leq G \Rightarrow H \in \mathcal{F}.$$

(2)  $\mathcal{F}$  に関する 障害集合 (obstruction set)  $\Omega(\mathcal{F})$  とは、 $\mathcal{F}$  に属さない minor-minimal なグラフ全体の集合である。 $\Omega(\mathcal{F})$  の元は、しばしば  $P(\mathcal{F})$  に対する 禁止グラフ (forbidden graph) と呼ばれる。

次の事実は障害集合の重要性を端的に示している。

命題 10.  $\mathcal{F}$  が minor-reduction  $\leq$  に関して閉じているならば、  
次が成り立つ:

$$G \in \mathcal{F} \iff \forall H \in \Omega(\mathcal{F}) \text{ について, } H \not\preceq G. \quad \square$$

障害集合としてよく知られているのは, planarity に関する Kuratwiski の結果である. 再び蛇足ながら, 後の関係でこれを紹介しておく.

命題 11 (Kuratwiski [31])  $\mathcal{F}_p$  を planar グラフの族とする.

$$G \in \mathcal{F}_p \iff \left[ \begin{array}{l} G \text{ が, } K_5 \text{ または } K_{3,3} \text{ と同相な部分グラフ} \\ \text{を含まない.} \end{array} \right. \quad \square$$

この古典的な大定理を, Wagner は次のように言い換えた.

$$\text{命題 12 (Wagner [35]) } \Omega(\mathcal{F}_p) = \{K_5, K_{3,3}\}. \quad \square$$

ところで, 最近の Robertson と Seymour の一連の仕事は, 長い間未解決だった Wagner の予想 ([34]) を解いたとのことである. すなわち,

定理 A (Robertson-Seymour [32]) グラフの族  $\mathcal{F}$  が minor-reduction  $\leq$  に関して閉じているならば,  $\Omega(\mathcal{F})$  は有限集合である.  $\square$

さらに次を示してあるとのことである.

定理 B. (Robertson-Seymour [33]) ある fixed グラフ  $H$  が、ある与えられたグラフ  $G$  の minor であるかを判定する問題は、多項式時間で解くことができる。  $\square$

Robertson と Seymour の膨大な off prints と preprints が手許にあるが、残念ながら筆者にはこれらの内容についてコメントできない。専門家の間では確信されているようである。

ここでまた本題に戻ろう。次の Notation を導入する。

$\mathcal{F}_L$  : linkless embeddable なグラフの族。

$\mathcal{F}_K$  : knotless embeddable なグラフの族。

すると、次の命題は容易に証明される。

命題 13.  $\mathcal{F}_L, \mathcal{F}_K$  は minor reduction  $\leq$  に関して閉じている。

従って、上記定理 A によって保証された有限集合  $\Omega(\mathcal{F}_L), \Omega(\mathcal{F}_K)$  を決定したくなる。第2節で述べた Sachs の定理4は、 $\Omega(\mathcal{F}_L)$  の元7つを決定したことになるが、これで全部であることが示された。

定理 8. (Motwani-Raghunathan-Saran [14])

$$(1) \quad \Omega(\mathcal{F}_L) = \{ K_6, K_{4,4} - e, G_7, K_{3,3,1}, G_8, G_9, PG \}.$$

ただし  $G_7, G_8, G_9, PG$  は図3に示したグラフとする。

$$(2) \quad \mathbb{F}_p \subsetneq \mathbb{F}_L \subsetneq \mathbb{F}_K. \quad \square$$

証明は、グラフとその中のサイクルに張った曲面の族との組に関して、“good” embeddings という概念を導入してなされている。がいずれにしてもかなり微妙な議論が必要で、むずかしい。(2)の前半は既に述べたことであるが、後半は(1)の証明の結果として出るようである。

また定理Bと合わせて、次の系が得られる。

### 定理9 (Motwani-Raghunathan-Saran [14])

(1) グラフ  $G$  の linkless embeddable かどうかを決定する  $O(n^3)$  アルゴリズムがある。

(2) グラフ  $G$  の非平凡型の絡み目を含まないように埋蔵するための有限時間アルゴリズムがある。  $\square$

定理8とグラフ理論の成果を組み合わせると、次の性質が得られている。

### 命題14 ([14], [17])

$$(1) \quad G \in \mathbb{F}_L \Rightarrow |E(G)| \leq 4|V(G)|.$$

$$(2) \quad G \in \mathbb{F}_L \Rightarrow \text{最小次数 } \delta(G) \leq 7.$$

(3)  $G \in \mathbb{F}_L \Rightarrow \forall v \in V(G)$  について、その neighbor set  $N(v)$  が誘導する部分グラフは planar である。  $\square$



前節で示した Conway-Gordon の定理 5 は,  $K_7 \in \Omega(\mathbb{F}_K)$  であることを主張してゐるが, 彼等が用いた方法で  $K_{3,3,1,1}$  も  $\Omega(\mathbb{F}_K)$  の元であることが示される.

定理 10 ([3], [14])  $\Omega(\mathbb{F}_K) \supset \{K_7, K_{3,3,1,1}\}$ .  $\square$

尚, Motwani-Raghunathan-Saran [14] では, 定理 10 の等号が成り立つことを予想してゐる.  $K_7$  は  $K_6$  と  $K_1$  の join で,  $K_{3,3,1,1}$  は  $K_{3,3,1}$  と  $K_1$  の join である. 一般に  $\Omega(\mathbb{F}_L)$  の元  $G = K_1$  との join は self-knotted であることが予想されるが, 前節で紹介した  $\mu_f(G; \Gamma, n)$  だけでは解決できないようである. 上の命題 14 に対応して, 次の性質が得られてゐる.

命題 15 ([14])

- (1)  $G \in \mathbb{F}_K \Rightarrow |E(G)| \leq 5|V(G)|$ .
- (2)  $G \in \mathbb{F}_K \Rightarrow \delta(G) \leq 9$ .
- (3)  $G \in \mathbb{F}_K \Rightarrow \forall v \in V(G)$  について,  $N(v)$  が誘導する  $G$  の部分グラフは linkless embeddable である.  $\square$

ところで,  $\Omega(\mathbb{F}_L)$  の 7 つの元の間の関係について, Motwani-Raghunathan-Saran [14] は面白いことを述べてゐるので, 報告しておく. 次の表換は今後も有効と思われる.

定義 14 ([14]) グラフ  $G = (V, E)$  が、 $u, v, w \in V$  を頂点とする三辺形 (= 3-サイクル) を持つとする。  $G$  からこの三辺形の三辺  $uv, vw, wu$  を除き、新しい頂点  $x$  と新しい三辺  $xu, xv, xw$  を加えて得られるグラフを  $G'$  とする;

$$G' = (V \cup \{x\}, E - \{uv, vw, wu\} \cup \{xu, xv, xw\}).$$

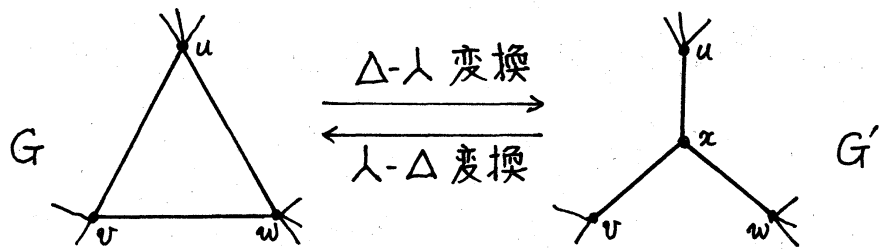


図9

このとき、 $G'$  は、 $G$  から triangle-star 変換 によって得られたという。この変換の逆を star-triangle 変換 という。

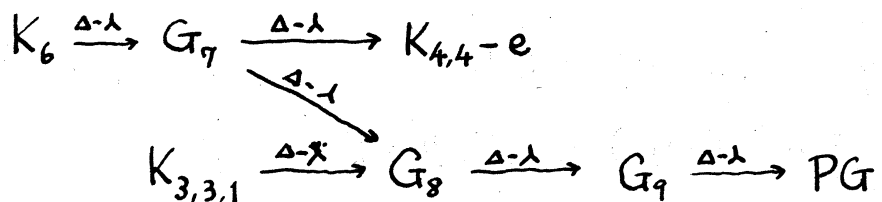
次の命題は、容易に証明される。

命題 16 ([14]) グラフ  $G'$  は、グラフ  $G$  から triangle-star 変換 によって得られたとする。

(1)  $G' \in F_p \Rightarrow G \in F_p, G' \in F_L \Rightarrow G \in F_L, G' \in F_K \Rightarrow G \in F_K.$

(2)  $G \notin F_p \Rightarrow G' \notin F_p, G \notin F_L \Rightarrow G' \notin F_L, G \notin F_K \Rightarrow G' \notin F_K.$

上の変換を  $\Omega(F_L)$  の 7 個の元は次の関係にある。



また,  $K_{5,5} - e$  において, 辺  $e$  と隣接し, 互いに隣接しない 2 辺  $e_1, e_2$  を選べば,  $((K_{5,5} - e)/e_1)/e_2 \cong K_{3,3,1,1}$  だから 命題 13 と 定理 10 から,  $K_{5,5} - e$  は self-knotted であり,  $K_{5,5}$  は臨界でないことも結論される。また 定理 10 の等号が成り立つならば,  $K_{5,5} - e$  は臨界であることも示される。

### §5. 順応性を持つグラフ.

定義 15. グラフ  $G$  が 順応性 を持つ (adaptable) とは,  $G$  のサイクルの任意の集合  $\Gamma = \{c_1, c_2, \dots, c_\alpha\}$  と, 結び目の任意の集合  $\{k_1, k_2, \dots, k_\alpha\}$  に対して, 埋蔵  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  が存在し,  $f(c_i) \approx k_i$  ( $i=1, 2, \dots, \alpha$ ) となる場合をいう。

サイクルやサイクルを頂点で撃ったグラフなどは, 明らかに順応性を持つ。自明でない順応性を持つグラフの例は, S. Kinoshita によって発見された。

定理 11 (Kinoshita [12]) 2 頂点とこれらをつなぐ  $n$  本 ( $n \geq 2$ ) の辺からなる多重グラフ  $\theta_n$  は順応性を持つ。□

実際,  $\theta_n$  上には  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  ( $=\alpha$ ) 個のサイクル  $c_{ij} = e_i \cup e_j$  ( $i \neq j$ ) が存在する。  
 $\alpha$  個の与えられた結び目の集合  $\{k_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$

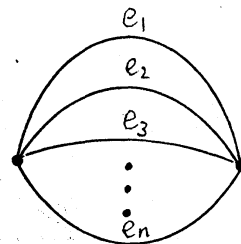


図 10: グラフ  $\theta_n$

に対して,  $f(c_{ij}) \approx k_{ij}$  となるように  $\theta_n$  を  $\mathbb{R}^3$  内に実現するのであるが, その方法は本質的に命題3を利用する。

M. Yamamoto は, 命題3を精密に研究することによって, 次を証明した。

定理12 (Yamamoto[29]) (1)  $\Gamma = \{c_1, c_2, \dots, c_\alpha\}$  を, グラフ  $G$  のあるサイクルの集合とする。  $\Gamma$  の任意の元が,  $G$  の連続する3辺によって決まるならば, (注意に与えられた結び目の集合  $\{k_1, k_2, \dots, k_\alpha\}$  に対して埋蔵  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  が存在し,  $f(c_i) \approx k_i$  ( $i=1, 2, \dots, \alpha$ ) となる。

(2) 従って特に,  $G$  の任意のサイクルが  $G$  の連続する3辺によって決まるならば,  $G$  は順応性を持つ。  $\square$

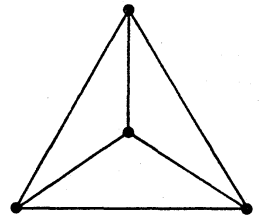


図11:  $K_4$

3-サイクル (三辺形) は3辺で決まるから, どんなグラフについてもその中の3-サイクルの結び目型は自由に制御できることになる。定理12(2)の条件を満たすグラフの例としては図11に示した4頂点完全グラフ  $K_4$  がある。  $K_4$  には4個の

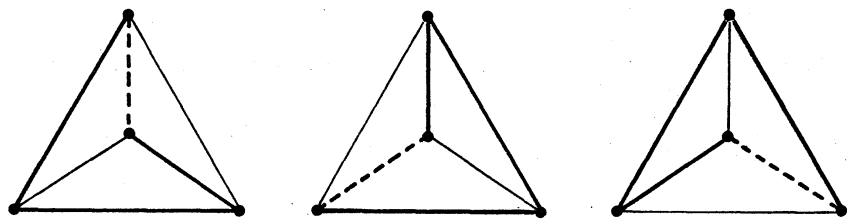


図12:  $K_4$  の3個の4-サイクル

3-サイクルと, 3個の4-サイクルが含まれる。これら4-サイクルは, 図12の太線で示した連続する3辺を与えたと, これらを含む唯一のサイクルとして, 一意に決まる。

与えられたグラフが順応性を持たないことを示すことも, 予想外にむずかしい問題である。

命題17. self-knotted なグラフは順応性を持たない。従って, 特に,  $K_7$ ,  $K_{3,3,1,1}$ ,  $K_{5,5}$ ,  $K_{5,5}-e$  は順応性を持たない。□

これは,  $\Gamma$  として全てのサイクルを選び, 結び目の集合として全て平凡型のもつを選びとよい。

ところで, 次の命題も自明である。

命題18.  $\mathcal{F}_A$  を adaptable なグラフの族とする。  $\mathcal{F}_A$  は minor reduction  $\leq$  に関して閉じている。□

従って,  $\mathcal{F}_A$  も障害集合  $\Omega(\mathcal{F}_A)$  によって特徴付けられるはずであるが, 上の命題17で挙げた4個のグラフはいずれも minor-minimal ではなさそうである。実は, 次が解決してゐないのである。

問題2. 図13, 図14に示すグラフは順応性を持つか?

実際, 図13のグラフは, 4個の3-サイクル, 5個の4-サイ

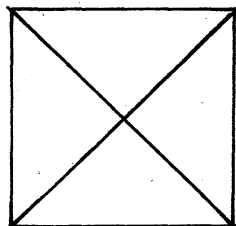


図13

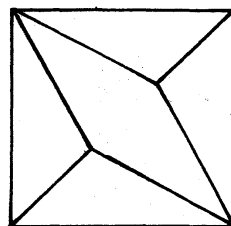


図14

クル, 4個の5-サイクルの合計13個のサイクルを含む。このうち、外側を一周する4-サイクルを除く12個のサイクルは全て連続する3辺によって決まることわかる。従って、定理12(1)によって、これらの12個のサイクルについては、与えられた結び目を実現するような埋蔵が存在する。

特に根拠はないが、 $\Omega(F_A)$ は図13と図14に示す2つのグラフから成るといふのが予想である。

## §6. 付記

これ迄に述べた話題の他にも、根上氏の Ramsey theorem [15] や、非平凡型の空間グラフで、(注意の真部分グラフが平凡型となる)  $n$  の存在 (Kinoshita [8] 他, Suzuki [21], Kawachi [7]), Yamada [28], Kauffman [6] などの多項式不変量など、たくさん話題があるが、今回は触れられなかった。

空間グラフに関して、どういう問題をどう形式化するかが当面の課題であろう。

## 引用文献

- [1] J.A.Bondy and U.S.R.Murty : Graph Theory with Applications, North Holland, New York, 1976.
- [2] G.Burde and H.Zieschang : Knots, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1985.
- [3] J.H.Conway and C.McA.Gordon : Knots and links in spatial graphs, Graph Theory, 7(1985), 445-453.
- [4] J.L.Gross and T.W.Tucker : Topological Graph Theory, Wiley-Interscience Publ., New York, 1987.
- [5] L.H.Kauffman : Formal Knot Theory, Princeton Univ.Press, 1983.
- [6] ————— : Invariants of graphs in three space, preprint.
- [7] A.Kawauchi : Hyperbolic imitations of 3-manifolds, preprint.
- [8] S.Kinoshita : On elementary ideals of polyhedra in the 3-sphere, Pacific J.Math., 42(1972), 89-98.
- [9] ————— : On elementary ideals of  $\theta$ -curves in the 3-sphere and 2-links in the 4-sphere, Pacific J.Math., 49(1973), 127-134.
- [10] ————— : On elementary ideals of projective planes in the 4-sphere and oriented  $\theta$ -curves in the 3-sphere, Pacific J.Math., 57(1975), 217-221.
- [11] ————— : Elementary ideals in knot theory, Kwansai Gakuin Univ. Annual Studies, 25(1986), 183-208.
- [12] ————— :  $\theta_n^3$ -curves in  $R^3$  and their constituent knots, in Topology and Computer Science (ed.S.Suzuki), Kinokuniya, Tokyo, 1987, 21-27.
- [13] W.K.Mason : Homeomorphic continuous curves in 2-space are isotopic in 3-space, Trans.Amer.Math.Soc., 142(1969), 269-290.
- [14] R.Motwani, A.Raghunathan and H.Saran : Constructive results from graph minors ; Linkless embeddings, in 29<sup>th</sup> Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1988, IEEE, 398-409.
- [15] S.Negami : Ramsey theorem for knots, links and spatial graphs, preprint.
- [16] D.Rolfsen : Knots and Links, Math.Lecture Series 7, Publish or Perish Inc., Berkeley, 1976.

- [17] H.Sachs : On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs --an open problem, in Graph Theory, Lagow 1981, Lecture Notes in Math., #1018, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1983, 230-241.
- [18] M.Shimabara :Knots in certain spatial graphs, Tokyo J.Math., in press.
- [19] S.Suzuki : On linear graphs in 3-sphere, Osaka J.Math., 7(1970), 375-396.
- [20] ——— : Alexander ideals of graphs in the 3-sphere, Tokyo J.Math., 7 (1984), 233-247.
- [21] ——— : Almost unknotted  $\theta_n$ -curves in the 3-sphere, Kobe J.Math., 1 (1984), 19-22.
- [22] ——— : A prime decomposition theorem for a graph in the 3-sphere, in Topology and Computer Science (ed.S.Suzuki), Kinokuniya, Tokyo, 1987, 259-276.
- [23] 鈴木晋一 : Knots and links in spatial graphs, 数理解析研講究録 670 (1988), 74-90.
- [24] ——— : 空間グラフ上の結び目と絡み目, 早大教育学部学術研究(数学編)37(1988),17-29.
- [25] K.Walcott : The knotting of theta curves and other graphs in  $S^3$ , in Geometry and Topology (eds.C.McCrory & T.Shifrin), Marcel Dekker, 1987, 325-346.
- [26] H.Whitney :Congruent graphs and the connectivity of graphs, Amer.J.Math., 54(1932), 150-168.
- [27] ——— : 2-isomorphic graphs, Amer.J.Math., 55(1933), 245-254.
- [28] S.Yamada : An invariant of graphs embedded in  $S^3$ , preprint.
- [29] M.Yamamoto : Knots in spatial embeddings of the complete graph on four vertices, preprint.
- [30] M.R.Fellows and M.A.Langston :Nonconstructive tools for proving polynomial-time decidability, J.A.C.M., to appear.
- [31] C.Kuratowski : Sur le probléme des courbes gauches en topologie, Fund. Math., 15(1930), 271-283.
- [32] N.Robertson and P.D.Seymour : Graph minors XVI. Wagner's conjecture, to appear.
- [33] ——— : Graph minors XIII, the disjoint path problem, to appear.
- [34] K.Wagner : Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe, Math. Ann., 114 (1937), 570-590.
- [35] ——— : Bemerkung zu Hadwigers Vermutung, Math. Ann., 141(1960), 433-451.