数理解析研究所講究録
第 691 巻 1989 年 52-62

境界要素法における数値解の一様収束性について

京都大学数理解析研究所
磯 祐介
(Yuusuke Iso)

§1 はじめに.

Ω を $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし．その境界 $\Gamma=\partial\Omega$ は C^3-級の滑らかさで．その曲率は positive であるとする。ここで次のラプラス方程式の境界値問題を考える。

$$
(\mathrm{NP})\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \quad (1.1) \\ \dfrac{\partial}{\partial n} u = g & \text{on } \Gamma \quad (1.2) \end{cases}
$$

但し．$\frac{\partial}{\partial n}$ は Γ に於ける外向き法線微分を表わし．g は $C^2(\Gamma)$ の函数で

$$\int_\Gamma g(y)\,d\sigma_y = 0$$

を満足する与えられた函数である。このとき．(NP) は $C^2(\Omega)/\mathrm{const.}$ に一意的な解をもつ。$g(x,y)$ をラプラス方程式の全空間における素解 (fundamental solution) とする。即ち

$$g(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y| \quad 。$$

この素解を用いると、(NP) の解は次の積分表示によって与えられる。

$$u(x) = -\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} g(x, y)\, u(y)\, d\sigma_y$$

$$+\int_\Gamma g(x, y)\, g(y)\, d\sigma_y \quad , x \in \mathring{\Omega} \text{。} \qquad (1.3)$$

従って、ノイマン問題 (NP) に対するディリクレ data が得られれば、(1.3) によって解を得ることができる。その為に、(1.3) において領域内の点 x を境界上の点に近ずけるという極限をとる。即わち、z を Γ 上の点とし、$x \in \mathring{\Omega}$ を z にその内向法線方向から近ずけるという極限をとると、(1.3) 式は次の様になる。

$$\frac{1}{2} u(z) + \text{p.v.}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} g(z, y)\, u(y)\, d\sigma_y$$

$$= \int_\Gamma g(z, y)\, g(y)\, d\sigma_y \quad , \quad z \in \Gamma \text{。} \qquad (1.4)$$

これをディリクレ data $u(z)$ に対する積分方程式と考える。現実には、一意性を考慮して、次の積分方程式 (1.5) と連立にして考える。

$$\int_\Gamma u(y)\, d\sigma_y = 0 \qquad (1.5)$$

境界上の積分方程式系 (1.4), (1.5) を (NP) に対する境界

積分方程式と呼ぶ。この積分方程式の一意可解性については、次の補題を得る。

補題 1.1

積分方程式 (1.4), (1.5) は、Γ, g が上の仮定を満足するとき $C^0(\Gamma)$ に一意的な解をもつ。■

以下の議論の便宜上、$C^0(\Gamma)$ を定義域とする作用素 K を次の様に定義する。

$$\begin{cases} (Kf)(z) := \dfrac{1}{2} f(z) + \mathrm{p.v.} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} g(z, y) f(y)\, d\sigma_y, & (1.6) \\ f \in C^0(\Gamma) & \end{cases}$$

この作用素 K は次の性質をもつ。

補題 1.2

K は 0 を固有値にもち、その固有空間は一次元で、固有関数は定数である。■

補題 1.1 及び 補題 1.2 の証明は、Kellogg [1] を参照されたい。

本稿の目標は、積分方程式 (1.4), (1.5) の数値解を collocation (選点) 法を用いて構成し、その数値解の一様収束を示すことである。

§2 境界の近似を伴わない離散化.

§1の仮定の下に、境界Γ上にN個の節点 $\{z_k\}_{k=1}^{N}$ を等間隔にとる。即ち、2点 z_k, z_{k+1} を端点とするΓ上の閉劣弧を $\Gamma_k \left(= \overline{\overparen{z_k z_{k+1}}}\right)$ とするとき、$|\Gamma_k| = \frac{1}{N}|\Gamma|$ を満足する様に節点を定める。便宜上分割の巾を $h := \frac{1}{N}|\Gamma|$ によって定めておく。次に $C^0(\Gamma)$ の有限次元内近似空間V_hを構成する為に、その基底函数となるべき一組の函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{N}$ を次の仮定を満たす様にとる。

<u>仮定 2.1.</u>

(i) $\varphi_k \in C^0(\Gamma)$, $\varphi_k(z_\ell) = \delta_{k,\ell}$ $\quad (1 \le k, \ell \le N)$

(ii) $\operatorname{supp} \varphi_k = \overline{\overparen{z_{k-1}\, z_{k+1}}}$

$\qquad (1 \le k \le N, \quad z_0 = z_N, \quad z_{N+1} = z_1)$

(iii) $\varphi_k \big|_{\Gamma_\ell} \in C^2(\Gamma_\ell) \quad (1 \le k, \ell \le N)$

(iv) $\sum_{k=1}^{N} \varphi_k \equiv 1$

(v) $\int_\Gamma \varphi_k(y)\, d\sigma_y = \int_\Gamma \varphi_\ell(y)\, d\sigma_y \quad (1 \le k, \ell \le N)$ $\blacksquare$

この函数$\{\varphi_k\}$を用いて、V_hを次の様に定める。

$$V_h := \langle \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N \rangle$$

明らかに、V_h は $C^0(\Gamma)$ のN次元内近似空間である。$C^0(\Gamma)$ の元を V_h に制限する collocation operator P_h を次の様に定義する。

$$
\begin{array}{ccccc}
P_h : & C^0(\Gamma) & \longrightarrow & V_h \\
 & \Psi & & \Psi \\
 & u(z) & \longrightarrow & \sum_{k=1}^{N} u(z_k)\,\varphi_k
\end{array}
$$

この P_h に対しては、次の評価が成立する。

<u>補題 2.2</u>

函数 u が $C^2(\Gamma)$ に属すとき、h に依存しない正定数 c が存在して、

$$\| P_h u - u \|_\infty \leq c\, h^2$$

が成立する。∎

以上を準備して、(1.6) で定義した積分作用素 K の離散化に相当する V_h から V_h への作用素 K_h を次の様に定義する。

$$D(K_h) = V_h, \qquad K_h := P_h K \tag{2.1}$$

V_h は有限次元函数空間であるから、基底 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{N}$ を介して $\mathbb{R}^N$ と同一視できる。即わち、$v_h \in V_h$ は、

$$v_h = \sum_{k=1}^{N} v_h^k\, \varphi_k$$

と表わされるが、これを $\mathbb{R}^N$ の元 $(v_h^1, v_h^2, \cdots, v_h^N)^T$ と同一視する。この同一視のルールによって、(2.1) で定義された作用素 K_h は、次の行列と同一視できる。

$$K_h \simeq (a_{i,j})_{i\rightarrow,\, j\downarrow}, \quad a_{i,j} = (P_h K \varphi_j)(z_i) \tag{2.2}$$

但し、$1 \leq i, j \leq N$.

本稿に於いては、$\mathbb{R}^N$ の元と V_h の元、行列 K_h と作用素 K_h を（混乱の起こらない限りは）同一の表記で取り扱う。

(2.2) によって定義された行列は次の評価を受ける。この評価は以下の議論に於いて、重要な役割りを果たす。

<u>補題 2.3</u>

C_1, C_2, C_3, C_4 を h に依存しない正定数として、以下の評価が成立する。

(i) $-C_1 h \leq a_{i,j} \leq -C_2 h \qquad (1 \leq i, j \leq N,\ i \neq j)$

(ii) $C_3 \leq a_{i,i} \leq C_4 \qquad (1 \leq i \leq N)$

(iii) $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} = 0$ 。 ■

この補題より、行列 K_h は弱い意味で優対角行列であることがわかる。従って、

$$\mathrm{rank}\,(K_h) = N - 1 \tag{2.3}$$

が成立する。我々は方程式 (1.4) の離散化を目指しているのであるが、(2.3) は非斉次項の離散化をうまく決めなければ、$R(K_h)$ からはみ出してしまうことを示唆している。そこで、次の様に r_h^k $(1 \leq k \leq N-1)$、$\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_N) \in \mathbb{R}^N$ を次の様に定義し、それらを利用して (1.4) 式の非斉次項の離散化を試みる。

$$r_h^k := \int_\Gamma g(z_k, y)\, f(y)\, d\sigma_y \qquad (1 \leq k \leq N-1) \tag{2.4}$$

$$K_h^T \mu = 0, \qquad \|\mu\|_1 = \sum_{k=1}^{N} |\mu_k| = 1 \quad 。 \tag{2.5}$$

(2.4), (2.5) を利用して、

$$r_h^N := -\frac{1}{\mu_N}\sum_{k=1}^{N-1}\mu_k r_h^k \tag{2.6}$$

と定め．$r_h=(r_h^1,\cdots,r_h^{N-1},r_h^N)$ と定める。明らかに $r_h \in R(K_h)$ である。

以上を利用して．境界積分方程式 (1.4), (1.5) の離散化を

$$K_h u_h = r_h \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=1}^{N} u_h^k = 0 \tag{2.8}$$

と決める。(2.7), (2.8) に対しては．次の定理が成立し．離散化が適切であることがわかる。

<u>定理 2.4</u>

連立方程式 (2.7), (2.8) は $\mathbb{R}^N$（即わち V_h）に唯一つの解をもつ。■

このセクションの補題及び定理の証明は．磯[2] を参照されたい。

<u>§3　一様収束評価</u>

このセクションでは．次の定理を示すことが目的である。

<u>定理 3.1.</u>

u を積分方程式 (1.4), (1.5) の解とし．u_h を連立方程式 (2.7), (2.8) から作られる V_h の元とする。このとき．次の評価が成立する．

$$\| P_h u - u_h \|_\infty \leq Ch \tag{3.1}$$

但し，Cはhには依存しない正定数である。■

この定理から，連立方程式(2.7)，(2.8)の解は，少なくとも$O(h)$で(1.4)，(1.5)の厳密解を近似するものであることがわかる。

証明の準備の為にいくつかの補題を用意する。

<u>補題3.2</u>

行列K_h'をK_hの第一小行列

$$K_h' := \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq N-1\\ 1\leq j\leq N-1}} \qquad (3.2)$$

とする。このとき行列K_h'は正則行列であって，十分大きな正整数Nに対して，

$$\| K_h'^{-1} \| \leq C\cdot\frac{1}{h} \qquad (3.3)$$

が成立する。但し，Cはhに依存しない正数である．■

〈証明〉

$D_h' := \mathrm{diag}(a_{1,1}, \cdots, a_{N-1,N-1})$ とする。

$$K_h' = D_h'\left(I + D_h'^{-1}(K_h' - D_h')\right) \quad 。$$

ここで補題2.3の結果を利用すると，

$$\|D_h'^{-1}(K_h' - D_h')\|_\infty \leq \max_i \sum_{j=1}^{N-1} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}$$

$$\leq 1 - Ch \quad 。$$

従って

$$\| K_h'^{-1} \|_\infty \leq \| D_h'^{-1} \| \cdot \| \left(I + D_h'^{-1}(K_h' - D_h')\right)^{-1} \|_\infty$$

$$\leq C'\cdot\frac{1}{h} \quad 。$$

<q.e.d.>

<u>補題3.3</u>

u が (1.4), (1.5) の厳密解であるとき.

$$\| P_h K (P_h u - u) \|_\infty \leq C h^2 \qquad (3.4)$$

が成立する。 ■

〈証明〉

作用素 K の定義に立ち戻ると.

$$\| P_h K (P_h u - u) \|_\infty$$

$$\leq \| P_h u - u \|_\infty + \max_i \lim_{x \to z_i} \left| \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} g(x,y) (P_h u - u) \, d\sigma \right|$$

$$\leq 2 \| P_h u - u \|_\infty \ 。$$

この評価を出す為に、Γ の凸性を利用していることに注意しておく。あとは補題2.2を援用する。 〈q.e.d.〉

<u>補題3.4</u>

u が (1.4), (1.5) の厳密解, u_h が (2.7), (2.8) の厳密解であるとき.

$$\left| \int_\Gamma (P_h u - u_h) \, d\sigma \right| \leq C h^2 \qquad (3.5)$$

が成立する。 ■

〈証明〉

$$\left| \int_\Gamma (P_h u - u_h) \, d\sigma \right| = \left| \int_\Gamma \big((P_h u - u) + (u - u_h) \big) \, d\sigma \right|$$

$$\leq |\Gamma| \cdot \| P_h u - u \|_\infty \ 。$$

あとは補題2.2を援用する。 〈q.e.d.〉

〈定理3.1の証明〉

$K_h(P_h u - u_h)$ の評価を通して $P_h u - u_h$ を評価する。 $K_h(P_h u - u_h) = P_h K(P_h u - u) + (P_h K u - r_h)$ (3.6)

便宜上 $e_h := P_h u - u_h$ とする。

2つの行列 S, T を

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 1 \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \mu_1 & \cdots & \mu_{N-1} & \mu_N \end{pmatrix}$$

と定める。但し、$\mu_1, \cdots \mu_N$ は (2.5) によって定義されたものである。この行列を用いると

$$TK_h S = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.7)$$

となる。(3.6) より

$$TK_h S S^{-1} e_h = TP_h K(P_h u - u) + T(P_h r - r_h)\text{。}$$

(3.7)及び、補題3.2，補題3.3．より

$$e_h^k - e_h^N = O(h) \qquad (1 \leq k \leq N-1)$$

を得る。更に補題3.4 より

$$e_h^1 + e_h^2 + \cdots + e_h^N = O(h)$$

故に

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} e_h = O(h)$$

。

Gauss消去法を用いることによって e^k_n を解くと

$$e^k_n = O(h) \qquad (1 \leq k \leq N)$$

を得て、定理の証明が完了する。 <q.e.d.>

§4 まとめ

実際の数値計算に於いては、境界Γの多角形近似が行なわれる。この場合は、基本解の法線方向微分を考える上で、精度の良い近似を考える必要が生じる。それについての詳細は磯[2]に詳しい。

〈文 献〉

[1] Kellog O.D. Foundations of Potential Theory (Dover 1958)

[2] Iso Y. Uniform Convergence Theorems of Boundary Solutions for Laplace's Equation (to appere in Pub.R.I.M.S.)