数理解析研究所講究録
第691巻 1989年 63-66

確率行列に対する一評価と境界要素近似への応用

阪大基礎工　早川　款達郎　(Kantaro Hayakawa)

§0. 記号と結果の記述

実N次列ベクトル空間をV_N，その元を$\vec{u}=(u_j)_j$ 等とかく。

第j成分が1で他の成分が0であるV_Nの元を$\vec{e}^j$，全ての成分が1である元を$\vec{1}$とかく。

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_N$ に対し次の様にノルムと duality を与える。

$$|\vec{u}|_1 = \sum_j |u_j| \quad , \quad |\vec{v}|_\infty = \mathrm{Max}\{|v_j| : j\}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_j u_j v_j$$

実N次正方行列 $A = (a_{j,k})_{\substack{j=1,\dots,N \\ k=1,\dots,N}}$ は次の条件を満たすものとする。

(仮定1)　$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \exists p \geq 1 \quad \varepsilon_0 N^{-1} \leqq a_{j,k} \leqq \varepsilon_0 p N^{-1} \quad \forall j, k$

(仮定2)　$A\vec{1} = \vec{1}$

上の2つの仮定からAは確率行列で成分が全て正であるから既約になる。次の一連の事実が容易にわかる。

1)　$|A\vec{u}|_\infty \leqq |\vec{u}|_\infty \quad \forall \vec{u} \in V_N$

2)　1はAのPerron根であり ${}^tA$ のPerron根でもある。

3) 1は単根であり．1に属するA, ${}^tA$の固有ベクトルとして成分が全て正であるものがとれる.（Perron-Frobeniusの定理）

$\vec{1}$はAの才の固有ベクトルである．${}^tA$の才の固有ベクトルを$\vec{\mu}=(\mu_j)_{j\downarrow}$とおき．$|\vec{\mu}|_1=1$と正規化しておく．

$$W_{\vec{1}}=\{\vec{u}\in V_N : \langle\vec{1},\vec{u}\rangle=0\}$$
$$W_{\vec{\mu}}=\{\vec{v}\in V_N : \langle\vec{v},\vec{\mu}\rangle=0\}$$
とおく．

4) $A W_{\vec{\mu}}\subset W_{\vec{\mu}}$, ${}^tA W_{\vec{1}}\subset W_{\vec{1}}$

我々の主目的は次の定理である.

定理．Aが（仮定1）（仮定2）を満たせば次のことが成立する.

i) $|{}^tA\vec{v}|_1 \leqq (1-\varepsilon_0)|\vec{v}|_1 \quad \forall\vec{v}\in W_{\vec{1}}$

ii) $|A\vec{u}|_\infty \leqq (1-p^{-1})|\vec{u}|_\infty \quad \forall\vec{u}\in W_{\vec{\mu}}$

iii) $|(I-A)\vec{w}|_\infty \leqq (2p)^{-1}|\vec{w}|_\infty \quad \forall\vec{w}\in W_{\vec{1}}$

§1. 証明の概略.

補題1. $\vec{\mu}$に対して．$\varepsilon_0 N^{-1}\leqq\mu_j\leqq\varepsilon_0 p N^{-1}$が成立する.

補題2. $\vec{v}\in W_{\vec{1}}$に対し $T\vec{v}=\vec{v}-\langle\vec{v},\vec{\mu}\rangle\langle\vec{1},\vec{\mu}\rangle^{-1}\vec{1}$ とおくと $T\vec{v}\in W_{\vec{\mu}}$ となり $\vec{v}=T\vec{v}-\langle\vec{1},T\vec{v}\rangle N^{-1}\vec{1}$ である.

i) の証明.

$\vec{v}\in W_{\vec{1}}$であれば$\sum_k v_k=0$である.

$$|{}^tA\vec{v}|_1=\sum_j\left|\sum_k a_{kj}v_k\right|=\sum_j\left|\sum_k(a_{kj}-\varepsilon_0 N^{-1})v_k\right|$$

$$\leq \sum_j \sum_k (a_{k,j} - \varepsilon_0 N^{-1}) |v_k| = (1-\varepsilon_0) |\vec{v}|_1.$$

ii) の証明.

$\vec{u} \in W_{\vec{\mu}}$ とすれば $\langle A\vec{u}, \vec{\mu} \rangle = 0$ となる.

$$|A\vec{u}|_\infty = \mathrm{Max}_j | \langle A\vec{u}, \vec{e}^j \rangle |$$
$$= \mathrm{Max}_j | \langle A\vec{u}, \vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu} \rangle |$$
$$= |\vec{u}|_\infty \ \mathrm{Max}_j | {}^tA(\vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu})|_1.$$

一方 $|{}^tA(\vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu})|_1 = |{}^tA\vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu}|_1$

$$= \sum_k |a_{j,k} - p^{-1}\mu_k|$$

補題1と(仮定1)より $a_{j,k} \geq \varepsilon_0 N^{-1} \geq p^{-1}\mu_k \quad \forall j, k$

従って $|{}^tA(\vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu})|_1 = \sum_k a_{j,k} - p^{-1}|\vec{\mu}|_1 = 1 - p^{-1}$.

iii) の証明.

$\forall \vec{u} \in W_{\vec{\mu}}$ に対して $|(I-A)\vec{u}|_\infty \geq p^{-1}|\vec{u}|_\infty$ となる.

そこで $\forall \vec{w} \in W_{\vec{1}}$ に対して $T\vec{w} \in W_{\vec{\mu}}$ であるから

$$|(I-A)\vec{w}|_\infty = |(I-A)T\vec{w}|_\infty \geq p^{-1}|T\vec{w}|_\infty.$$

補題2より $|\vec{w}|_\infty \leq 2|T\vec{w}|_\infty$ が出るから.

$$|(I-A)\vec{w}|_\infty \geq (2p)^{-1}|\vec{w}|_\infty \quad \forall \vec{w} \in W_{\vec{1}} \quad となる.$$

§2. 応用.

本研究会の磯祐介氏の講演において. 境界要素解の誤差, $\tilde{e}_h$ は. $K_h \tilde{e}_h = \tilde{f}_h$ をみたすものとして与えられる. 境界要素空间の取り方を適当なものにすると, $\langle \tilde{e}_h, \vec{1} \rangle = 0$ と

なる.

K_h は $Ku(\xi) = \frac{1}{2}u(\xi) + p.v\int_\Gamma \frac{\partial g}{\partial n}(\xi,\eta)\,u(\eta)\,d\sigma_\eta$

なる積分作用素の離散化であることから,

$$K_h = \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}A_h$$

とおいて見ると, A_h が(仮定1),(仮定2)を満たすことになるから定理 iii) より

$$|\tilde{e}_h|_\infty \leq 4p|\tilde{f}_h|_\infty$$

が得られ, この評価が.磯氏の近似解の誤差の評価を高めることにつながる.

又, 定理 i), ii) は確率行列Aの固有値の分布に対して,若干の情報を与える.