

京都大学数理解析研究所講究録

水の波の線形問題について

電気通信大学電気通信学部情報工学科

牛島照夫 (USHIJIMA, Teruo)

松木美保子 (MATSUKI, Mihoko)

青木篤 (AOKI, Atsushi)

0. 要旨

単連結有界水域における流速のポテンシャル関数に対する線形の初期値境界値問題を、静止水面上の二乗可積分関数の作るヒルベルト空間に値を取る二階線形定作用素係数発展問題として定式化する。有限要素近似による半離散近似問題と、対応する固有値問題の収束性と誤差評価についてこの定式化によって得られる結果をのべる。つづいて、時間変数を中心差分法で離散化した全離散近似スキームの安定条件、収束性及び誤差評価につき報告する。これらの解析の結果の妥当性を示す数値例の若干を最後に与える。

1. 水の波の線形化問題 (LWW)

容器内に閉じ込められた水の運動を、無限小振幅仮定の下に解析するとき、次の線形初期値・境界値問題 (LWW) に出会う。

(Stoker[6] の Chapter 1 参照)。

$$\begin{array}{l}
 \text{(LWW)} \left\{ \begin{array}{l}
 -\Delta \Phi = 0 \quad \text{in } \Omega, \\
 \Phi_{tt} + g \partial \Phi / \partial n = F_t \quad \text{on } \Gamma_0, \\
 \partial \Phi / \partial n = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \\
 \Phi(0, x, y, z) = \Phi^1(x, y, z) \quad \text{in } \Omega, \\
 \Phi_t(0, x, y, z) = \Phi^0(x, y, z) \quad \text{in } \Omega.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

ここで、 Ω は 3次元空間内の (静止) 水域であるか、又はその水域が一つの水平方向に対して一様であるときその方向に直交する水域の断面である。 Γ_0 は水域が静止しているときの水面であり、 Γ_1 は静止水域と接触する容器壁である。 Φ は水の速度のポテンシャル関数である。 $\partial\Phi/\partial n$ は Ω の境界における外向き法線微係数を、 g は重力加速度を、それぞれ、表す。

外力 F が時間によらないとき、時間につき調和な (LWW) の解 :

$$\Phi(t, x, y, z) = \sin(\omega t) \phi(x, y, z)$$

を求めると、(LWW) は次の固有値問題 (E) になる。

$$(E) \begin{cases} -\Delta \phi = 0, & \text{in } \Omega, \\ \partial \phi / \partial n = \lambda \phi, & \text{on } \Gamma_0, \quad (\lambda = \omega^2 / g), \\ \partial \phi / \partial n = 0, & \text{on } \Gamma_1. \end{cases}$$

ここで、 Ω は、Nečas[3]の意味で、リプシッツ連続な境界 Γ を持つ R^N

($N=2, 3$) の有界領域とする。 R^{N-1} の有界領域 Γ_0 はその $N-1$ 次元測度が正であるとする。

$$X = L^2(\Gamma_0), \quad Y = H^{1/2}(\Gamma_0), \quad V = H^1(\Omega)$$

とし、 V 上のエルミート形式 $a(u, v)$, $b(u, v)$, $\langle u, v \rangle$ とノルム $\|v\|$ を次のように定める。

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \bar{v} \, dx, \quad b(u, v) = \int_{\Gamma_0} u \bar{v} \, d\Gamma,$$

$$\langle u, v \rangle = a(u, v) + b(u, v), \quad \|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}.$$

V から X へのトレース作用素を r_0 とする。 r_0 は完全連続作用素であり、 Γ_0 の測度が正であることから、 $V = H^1(\Omega)$ の本来のノルム $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ と上に定めた $\|v\|_0$ とは同値になる (Necas[3])。

$$V_0 = \{v \in V : v = 0 \text{ on } \Gamma_0\}$$

として、内積 $\langle u, v \rangle$ に関する V における V_0 の直交補空間を V_1 とする。

2. $L^2(\Gamma_0)$ における発展問題

任意の $\Phi \in Y$ に対して次の弱形式問題 (H_Φ) の解 u は一意に存在して、 V_1 の元である。

$$(H_\Phi) \begin{cases} a_0(u, v) = 0, & v \in V_0, \\ u = \Phi, & \text{on } \Gamma_0, \\ u \in V_1. \end{cases}$$

$u = H\Phi$ によって定まる $L^2(Y, V_1)$ の元 H を、ここでは、ポテンシャル作用素とよぶ。 H は、 Y を V_1 の上に、1対1、両連続に写す。 Y を定義域とする X における非負値エルミート形式 a_0 を、

$$a_0(\Phi, \Psi) = a_0(H\Phi, H\Psi), \quad \Phi, \Psi \in D(a_0) = Y,$$

によって定める。

X で稠密な定義域 $D(A)$ をもつ非負値な自己共役作用素 A が存在して、

$$(1) \quad (A\Phi, \Psi) = a_0 (\Phi, \Psi),$$

$$\Phi \in D(A), \Psi \in D(a_0),$$

$$(2) \quad (A^{1/2}\Phi, A^{1/2}\Psi) = a_0 (\Phi, \Psi),$$

$$\Phi, \Psi \in D(A^{1/2}) = D(a_0),$$

$$(3) \quad D(A) = \{ \Phi \in Y : \text{正数 } C \text{ が存在して} \\ | a_0 (\Phi, \Psi) | \leq C | \Psi | \\ \text{が、全ての } \Psi \in Y \text{ に対して成り立つ。} \},$$

であることがわかる(Kato[2])。ここで、 (Φ, Ψ) と $|\Psi|$ は、それぞれ、

$L_2(\Gamma_0)$ での内積とノルムを表す。更に、

$$(4) \quad A\Phi = 0 \quad \text{と、} \Phi \text{ が } \Gamma_0 \text{ 上で定数であることは、同値、}$$

$$(5) \quad (A+1)^{-1} \text{ は、} X \text{ 上の完全連続作用素、}$$

$$(6) \quad \sigma(A) = \{ \lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty \},$$

であることがわかる。

初期データ Φ^i ($i=1,0$) と非同次項 $\Psi(t)$ が、

$$\Phi^i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^i \Phi_n, \quad \Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) \Phi_n$$

と A の固有関数系で $L_2(\Gamma_0)$ で完全正規直交系をなす

$\{ \Phi_n : n=0,1,2, \dots \} :$

$$A \Phi_n = \lambda_n \Phi_n, \quad (\Phi_n, \Phi_m) = \delta_{nm},$$

によって展開されるとき、次式によって与えられる $\Phi(t)$ を (ALWW) の一般化された解と呼ぶことにする。

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \Phi_n,$$

$$a_0(t) = a_0^0 + a_0^1 t + \int_0^t (t-s) b_0(s) ds,$$

$$a_n(t) = a_n^0 \cos(\sqrt{g\lambda_n} t) + a_n^1 (1/\sqrt{g\lambda_n}) \sin(\sqrt{g\lambda_n} t) \\ + (1/\sqrt{g\lambda_n}) \int_0^t \sin(\sqrt{g\lambda_n} (t-s)) b_n(s) ds,$$

$(n=1,2,3, \dots)$.

発展問題 (LWW) は、次の X に値を取る二階線形定作用素係数発展問題 (ALWW) として把握することができる。

$$(ALWW) \begin{cases} d^2 \Phi / dt^2 + g A \Phi = \Psi(t), & t > 0, \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad d\Phi(0) / dt = \Phi^1. \end{cases}$$

固有値問題 (E) は、次の固有値問題 (AE) としてとらえられる。

$$(AE) \begin{cases} A \Phi = \lambda \Phi, \\ \{ \lambda, \Phi \} \in \mathbb{R} \times (D(A) - \{0\}). \end{cases}$$

3. 有限要素近似問題

空間 $V = H^1(\Omega)$ の有限次元近似空間 V_h が与えられているとする。近似

空間 V_h は定数関数を含むものとする。空間 V の r_0 による像 $r_0(V_h)$ を

X_h とし、ヒルベルト空間 $X = L^2(\Gamma_0)$ から引きつがれた内積

(Φ_h, Ψ_h) ($\Phi_h, \Psi_h \in X_h$) をもつヒルベルト空間と見なす。

X_h を X の近似空間と考える。 $X_h \subset X$ である。

$$V_{0h} = V_h \cap V_0$$

とし、内積 $\langle u, v \rangle$ の意味での直交分解：

$$V_h = V_{0h} + V_{1h}$$

を考慮する。

任意の $\Phi_h \in X_h$ に対して次の弱形式問題 $(H_{\Phi_h}^h)$ の解 u_h は一意に存在

して、 V_{1h} の元である。

$$(H_{\Phi_h}^h) \left\{ \begin{array}{l} a(u_h, v_h) = 0, \quad v_h \in V_{0h}, \\ u_h = \Phi_h, \quad \text{on } \Gamma_0, \\ u_h \in V_{1h}. \end{array} \right.$$

$u_h = H_{\Phi_h}^h$ によって定まる $L(X_h, V_{1h})$ の元 $H_{\Phi_h}^h$ を、ここでは、

近似ポテンシャル作用素とよぶ。

$H_{\Phi_h}^h$ は、 X_h を V_{1h} の上に、1対1、両連続に写す。

X_h を定義域とする X_h における非負値エルミート形式 a_h を、

$$a_h(\Phi_h, \Psi_h) = a_h(H_h \Phi_h, H_h \Psi_h), \quad \Phi_h, \Psi_h \in X_h,$$

によって定める。

X_h で定義された非負値な有界自己共役作用素 A_h が存在して、

$$(7) \quad (A_h \Phi_h, \Psi_h) = a_h(\Phi_h, \Psi_h), \quad \Phi_h, \Psi_h \in X_h,$$

$$(8) \quad A_h \Phi_h = 0 \quad \text{と、} \quad \Phi_h \text{ が } \Gamma_h \text{ 上で定数であることは、同値、}$$

$$(9) \quad \sigma(A_h) = \{ \lambda_{h0} = 0 < \lambda_{h1} \leq \lambda_{h2} \leq \dots \leq \lambda_{hN-1} \}$$

であることがわかる。ここで、 $N_{1h} = \dim X_h$ である。更に、

$$(10) \quad \lambda_{h1} \geq \lambda_{h1} > 0$$

が成立する。

空間 X_h^0 と X_h^0 を次のように定める。

$$X_h^0 = \{ \Phi_h \in X_h : (\Phi_h, 1) = 0 \}, \quad X_h^0 = X_h^0 \cap X_h^0.$$

作用素 P_h^0 及び P_h^0 をそれぞれ、 X_h から X_h^0 への、及び X_h から X_h^0 への直交

射影とすると、 P_h^0 と P_h^0 はそれぞれ、 A_h と A_h を約す。

$$A_h^0 = A_h P_h^0 \quad (= P_h^0 A_h P_h^0), \quad A_h^0 = A_h P_h^0 \quad (= P_h^0 A_h P_h^0)$$

とおくと、

(11) A_h^0 は X_h^0 における正定値自己共役作用素、

(12) A_h^0 は X_h^0 における有界正定値自己共役作用素

である。

(LWW) の弱形式表現を経由して、自然につぎのガレルキン近似問題

(Π_h) が導出される。

$$\begin{aligned}
 (\Pi_h) \left\{ \begin{aligned}
 &g a_h(\Phi_h(t), v_h) \\
 &= b_h(\{\Psi - \partial_t^2 \Phi_h\}, v_h), \\
 &t > 0, v_h \in V_h, \\
 &b_h(\Phi_h(0), v_h) \\
 &= b_h^1(\Phi_h^1, v_h), v_h \in V_h, \\
 &b_h(\partial_t \Phi_h(0), v_h) \\
 &= b_h^0(\Phi_h^0, v_h), v_h \in V_h.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

同様に、固有値問題 (E) のガレルキン式近似問題 (E_h) が導びかれる :

$$(E_h) \left\{ \begin{aligned}
 &a_h(\Phi_h, v_h) = \lambda_h b_h(\Phi_h, v_h), v_h \in V_h, \\
 &\{\lambda_h, \Phi_h\} \in R \times (V_h - \{0\}).
 \end{aligned} \right.$$

発展問題 (Π_h) は、次の X_h に値を取る二階線形定作用素係数発展問題

(ALWW_h) として把握することができる。

$$(ALWW_h) \begin{cases} d^2 \Phi_h / dt^2 + g A_h \Phi_h = \Psi_h(t), & t > 0, \\ \Phi_h(0) = \Phi_h^1, & d\Phi_h(0) / dt = \Phi_h^0. \end{cases}$$

固有値問題 (E_h) は、次の固有値問題 (AE_h) としてとらえられる。

$$(AE_h) \begin{cases} A_h \Phi_h = \lambda_h \Phi_h, \\ \{\lambda_h, \Phi_h\} \in \mathbb{R} \times (X_h - \{0\}). \end{cases}$$

4. 半離散近似問題の収束性と誤差評価

正のパラメタ $h \in (0, \bar{h}]$ ($\bar{h} < \infty$) に対して、 V の有限次元適合近似空間 V_h の族 $\{V_h : 0 < h \leq \bar{h}\}$ が与えられているとする。近似空間 V_h は定

数空間を含むものとし、空間 V_h の r_0 による像 $r_0(V_h)$ を X_h とし、 X_h

の近似空間と考える。次のような空間を準備する。すなわち、

$$X_h^0 = \{ \Phi \in X : (\Phi, 1) = 0 \}, \quad X_h^0 = X_h \cap X^0,$$

$$V_h^0 = \{ v \in V : b(v, 1) = 0 \},$$

$$V_1^0 = V_1 \cap V^0, \quad V_{1h}^0 = V_{1h} \cap V^0$$

と定める。このとき、 $X_h^0 = r_0(V_{1h}^0)$ である。

任意の $\Phi^0 \in X^0$ に対して次の弱形式問題 (G_Φ^0) の解 u_Φ^0 は一意に存在して、 V_1^0 の元である。

$$(G_\Phi^0) \left\{ \begin{array}{l} a(u_\Phi^0, v) = \int_{\Gamma_0} \Phi^0 \bar{v} d\Gamma, \quad v \in V, \\ b(u_\Phi^0, 1) = 0, \\ u_\Phi^0 \in V. \end{array} \right.$$

$u_\Phi^0 = G_\Phi^0$ によって定まる $L(X_1^0, V_1^0)$ の元 G を、グリーン作用素とよぶ。

$$(R) \quad \Phi^0 \in Y \cap X^0 \quad \text{ならば、} \quad G_\Phi^0 \in H^2(\Omega),$$

が成立するとき、「 G は性質 (R) を持つ」と言うことにする。

Ω が 2 次元の凸多角形領域のとき、 G は性質 (R) を持つ (渡辺二郎教授からの御教示による)。

V の近似空間の族 $\{V_h^0 : 0 < h \leq \bar{h}\}$ において、 R_h を内積 $\langle u, v \rangle_h$ に関する V から V_h^0 への直交射影作用素とし、空間の近似能力に関する次の 2 条件を考える。

$$(h-0) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|R_h v - v\|_h = 0, \quad v \in V,$$

$$(h-1) \left\{ \begin{array}{l} v \in H^2(\Omega) \text{ に対して、} \\ \|v - v_h\| \leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega)} \\ \text{をみたす } v_h \in V_h \text{ が存在する。ここで、} C \text{ は } h \text{ と } v \text{ によらな} \\ \text{い定数である。} \end{array} \right.$$

定理 1. (ALWW) の一般化された解を $\Phi(t)$,

(ALWW_h) の解を $\Phi_h(t)$ とする。

1. $(h-0)$ の下で、 $\Phi^1, \Phi^0 \in X, \Psi(t) \in C([0, T]; X)$ であれば、

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\Phi(t) - \Phi_h(t)| = 0$$

が、 $t \in [0, T]$ につき一様に成り立つ。

2. $(h-1)$ の下で、 G が性質 (R) を持つとき、

$1/2 \leq s \leq 3/2$ に対して、

$$\Phi^1 \in D(A^{s+(1/2)}), \Phi^0 \in D(A^s),$$

$$\Psi(t) \in C([0, T]; D(A^s))$$

ならば、これらのデータと h と T によらない定数 C があって、 $0 \leq t \leq T$ で、

$$\begin{aligned} & |\Phi(t) - \Phi_h(t)| \\ & \leq Ch^s (1+t) \{ |A^{s+(1/2)} \Phi^1| + |A^s \Phi^0| \\ & \quad + t \max_{0 \leq \tau \leq t} |A^s \Psi(\tau)| \}. \end{aligned}$$

実数 s が $0 \leq s \leq 1/2$ をみたしているとき、

$$X^s = [H_{\theta}^{1/2}(\Gamma), L_{\theta}^2(\Gamma)]_{1-2s} \cap X^0$$

とおく。ここで $[H_{\theta}^{1/2}(\Gamma), L_{\theta}^2(\Gamma)]_{\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 1$) は

Lions-Magenes [4] の定義による補間空間である。 $-1/2 \leq s \leq 0$ に対しては

$$X^s = L(X^{-s}, C)$$

とする。ただし $\Psi \in X^0 = X^0$ を X^s の元と見る同一視の方法は

$$\Psi(\Phi) = (\Phi, \Psi)_X, \quad \Phi \in X^{-s}$$

による。定理 1 の 2 は次の命題 1 より導かれる。

命題 1 G は性質 (R) を持ち、条件 (h-1) が成立するものとする。

実数 s と t は $-1/2 \leq s, t \leq 1/2$ をみたすものとする。このとき、

1. $X^{1/2} = Y^0$ 上で定義された作用素 $(A_h)^{-1} - (A_h)^{-1} P_h$ は X^s から X^t への有界作用素に拡張される。

$$2. \left\| (A_h)^{-1} - (A_h)^{-1} P_h \right\|_{L(X^s, X^t)} \leq C_{s,t} h^{s-t+1}$$

と評価される。ここに $C_{s,t}$ は h には依存しない定数である。

5. 近似固有値問題の収束性と誤差評価

固有値問題 (AE) の解 $\{\lambda, \Phi\}$ と、近似固有値問題 (AE_h) の解

$\{\lambda_h, \Phi_h\}$ とを考察する。

$$\{\lambda_{h0}, \Phi_{h0}\} = \{\lambda_0, \Phi_0\} = \{0, m_{N-1} (\Gamma_0)^{-1/2}\}$$

であることに注意する。

定理 2. $(h \rightarrow 0)$ の下で、 $n = 1, 2, \dots$ に対して

1. 十分小さい $h > 0$ に対して、 $\lambda_{hn} \geq \lambda_n$ であり、

$h \rightarrow 0$ のとき、 λ_{hn} は λ_n に収束する。

更に、 V_h が単調に増加して V に近づくなれば、 λ_{hn} は単調に減少して λ_n に収束する。

2. λ_n が単純固有値であり、 $(\Phi_n, \Phi_{hn}) \geq 0$ であれば、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\Phi_n - \Phi_{hn}\|_{H(\Gamma_0)}^{1/2} = 0.$$

この定理の証明は Raviart-Thomas[7] の Chapitre 6 にある論法を参考にし
て与えることが出来る。

定理 3. $(h \rightarrow 1)$ の下で、 G が性質 (R) を持つとき、 $n = 1, 2,$

\dots に対して $\lambda_{n-1} < \lambda_n = \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+m-1} < \lambda_{n+m}$ である

ならば、

1. $\bar{\lambda}_{hn} = (1/m) \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_{h, n+j}$ に対して、 n によらない定数 C があって、

$$|\lambda_n - \bar{\lambda}_{hn}| \leq C h^2.$$

2. (AE) の解 $\{\lambda_n, \Phi_n\}$ で $|\Phi_n| = 1$ をみたすものに対して

(AE_h) の解 $\{\lambda_{hn}, \Phi_{hn}\}$ で $|\Phi_{hn}| = 1$ をみたし、

$$|\Phi_n - \Phi_{hn}| \leq C h^{3/2}$$

をみたすものが存在する。

この定理の証明は、Bramble-Osborn[1] 及び [2] にならって行なうことができる。命題 1 が本質的である。

6. 時間変数を中心差分近似した全離散近似問題とその安定条件

発展問題 (ALWW) の半離散近似問題として、次の X_h に値を取る

二階線形定作用素係数発展問題 (ALWW_h) が設定される。

$$(ALWW_h) \begin{cases} d^2 \Phi_h / dt^2 + g A_h \Phi_h = \Psi_h(t), & t > 0, \\ \Phi_h(0) = \Phi_h^1, & d\Phi_h(0) / dt = \Phi_h^0. \end{cases}$$

(ALWW_h) に対応して、中心差分全離散近似問題 (ALWW_{h,τ}) が

定まる。

$$(ALWW_{h,\tau}) \begin{cases} D_{\tau\tau} \Phi_{h,\tau,m} + g A_h \Phi_{h,\tau,m} = \Psi_{h,\tau,m}, & m = 1, 2, \dots, \\ \Phi_{h,\tau,0} = \Phi_{h,\tau}^1, & D_{\tau} \Phi_{h,\tau,0} = \Phi_{h,\tau}^0. \end{cases}$$

ここで、 $(l, m, n) = (m-1, m, m+1)$ として、次のような記法を

用いている：

$$D_{\tau m} \Phi = (\Phi_n - \Phi_m) / \tau, \quad D_{\tau m} \Phi = (\Phi_m - \Phi_l) / \tau,$$

$$D_{\tau\tau m} \Phi = (\Phi_n - 2\Phi_m + \Phi_l) / (\tau^2).$$

次のような記法を導入する。 $X = X^0$, $X_h = X_h^0$,

$$A = g A^0, \quad A_h = g A_h^0, \quad \Phi = m \binom{\Gamma}{N-1}^{-1/2} \text{とおくと}$$

$$X \ni \Phi = a \Phi^0 + P^0 \Phi, \quad a \in \mathbb{C}$$

と一意に分解されるが、これを $\Phi = a \Phi^0 + \phi$ のように表す。

平行して

$$X_h \ni \Phi_h = a \Phi_h^0 + P_h^0 \Phi_h = a \Phi_h^0 + \phi_h$$

のように表す。 $i=1, 0$ に対して

$$\phi_h^i = P_h^0 \Phi_h^i, \quad \phi_h^i = P_h^0 \Phi_h^i, \quad \phi_{h,\tau}^i = P_h^0 \Phi_{h,\tau}^i,$$

$$\phi_{h,\tau,m}^0 = P_h^0 \Phi_{h,\tau,m}^0, \quad \phi_{h,\tau,m}^0 = P_h^0 \Psi_{h,\tau,m}^0$$

とする。 対応して

$$\Phi^i = a \Phi^0 + \phi^i, \dots$$

等を使用する。 (6) と (9) と (10) により

$$(13) \quad A \geq g \lambda_1 > 0, \quad A_h \geq g \lambda_1 > 0$$

である。

以下では、 V_h はラグランジ補間多項式によって生成される有限要素空間と

する。我々は

(Ω) Ω は多面体領域とする、

(T_h) $\{T_h\}_{0 < h \leq h}$ を Ω の単体分割の族で準一様かつ逆仮定をみたす

ものとする、

なる二つの仮定を要請し、 $k \in \mathbb{N}$ を固定して、

$$(14) \quad V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in P_k, T \in T_h\}$$

とおく。 P_k は高々 k 次の多項式の全体とする。このとき、

(15) 条件 (h-1) がみたされる、

ことはよく知られている。(例えば [7] Chapitre 4) .

命題 2. ある $\alpha > 0$ があって、(7) で定めた A_h に対して

$$(16) \quad \|A_h\|_{L(X_h)} \leq \alpha/h, \quad h \in (0, \bar{h}]$$

が成立する。

命題 2 の証明の概略

$$V_h = \{ \{ w_j : 1 \leq j \leq N_{0h} + N_{1h} \} \},$$

$$X_h = \{ \{ \omega_j = r_{0, N_{0h} + j} w_j : 1 \leq j \leq N_{1h} \} \}$$

のように V_h の基底 $\{w_j\}_{1 \leq j \leq N_h}$ ($N_h = N_{0h} + N_{1h}$) と

X_h の基底 $\{\omega_j\}_{1 \leq j \leq N_{1h}}$ を固定する。

-△の離散表現を

$$\alpha = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq N_h} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \swarrow N_{0h} \\ \searrow N_{1h} \end{matrix}$$

$$\alpha_{i,j} = a(w_j, w_i), \quad 1 \leq i, j \leq N_h$$

とする。Φ ∈ X_h は上の基底により

$$\Phi_h = \sum_{j=1}^{N_{1h}} \Phi_{N+j} \omega_j \quad \text{とあらわせる。}$$

$$\phi_h = \sum_{j=1}^{N_{1h}} \Phi_{N+j} w_j \quad \text{とすると} \quad r(\phi_h) = \Phi_h$$

である。

Φ_h に対応させて

$$\Phi_h = (\Phi_j)_{1 \leq j \leq N_h}$$

$$\Phi_j = 0, \quad 1 \leq j \leq N_{0h}$$

$$\Phi_h = (\Phi_{N+j})_{1 \leq j \leq N_{1h}}$$

とおく。

$$(A_h \Phi_h, \Phi_h)_{X_h} = (a_1 \Phi_1, \Phi_1)_{C^1}$$

である。

ここで

$$a = \alpha - \alpha \alpha^{-1} \alpha^T$$

であり、 α_0^{-1} は正定値であるから

$$\begin{aligned} (A_h \Phi_h, \Phi_h)_X &\leq (\alpha_0^{-1} \Phi_h, \Phi_h)_C \\ &= (\alpha_0^{-1} \Phi_h, \Phi_h)_C = \|\nabla \phi_h\|_{L(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{(A_h \Phi_h, \Phi_h)_X}{|\Phi_h|_h^2} &\leq \frac{\|\nabla \phi_h\|_{L(\Omega)}^2}{|\Phi_h|_{L(\Gamma_0)}^2} \\ \therefore \frac{(A_h \Phi_h, \Phi_h)_X}{|\Phi_h|_h^2} &\leq \frac{\|\nabla \phi_h\|_{L(\Omega)}^2}{\|\phi_h\|_{L(\Omega)}^2} \frac{\|\phi_h\|_{L(\Omega)}^2}{|\Phi_h|_{L(\Gamma_0)}^2} \end{aligned}$$

分割が準一様かつ逆仮定をみたすことから

$$(\beta_0) \quad \beta_0 > 0, \quad \|\nabla \phi_h\|_{L(\Omega)}^2 \leq \beta_0 / h \|\phi_h\|_{L(\Omega)}^2,$$

$$\phi_h \in V_h, \quad h \in (0, \bar{h}].$$

次に

$$\beta_1 > 0, \quad \|\phi_h\|_{L(\Omega)}^2 \leq \beta_1 h |\Phi_h|_{L(\Gamma_0)}^2,$$

$$\phi_h = \sum_{j=1}^N \frac{1}{h} \Phi_{N+j} w_j, \quad h \in (0, \bar{h}]$$

が示せるから $\alpha = \beta_0^2 \beta_1$ として命題 2 が成立する。

標準的な方法で、中心差分の L-安定性に関する次の定理 4 を得る。

定理 4. 仮定 (Q) と (T) を要請する。近似空間の族 V_h は

(14) によって定めるものとする。 $\tau \in (0, 1)$ を固定して、
 $h \in (0, \bar{h}]$ に対しては

$$(S_{2\tau}) \quad \tau \leq (2\tau / \sqrt{g\alpha}) \sqrt{h}$$

が成立するように $\tau > 0$ を選んで問題 (ALWW_{h, \tau}) の解 $\Phi_{h, \tau, m}$ を

構成する。

$$\Phi_{h, \tau, m} = a_{h, \tau, m} \Phi_0 + \phi_{h, \tau, m}$$

$$\Phi_{h, \tau}^i = a_{h, \tau}^i \Phi_0 + \phi_{h, \tau}^i \quad (i = 1, 0),$$

$$\Psi_{h, \tau, m} = b_{h, \tau, m} \Phi_0 + \phi_{h, \tau, m}$$

とおく。このとき、 $n = 2, 3, \dots$ に対して

$$(17) \quad a_{h, \tau, n} = a_{h, \tau}^1 + (n\tau) a_{h, \tau}^0 + \sum_{j=0}^m (n-j) \tau b_{h, \tau, j} \tau,$$

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & \left| \phi_{h, \tau, n}^1 \right| \leq (1 + r / \sqrt{1 - r^2}) \left| \phi_{h, \tau}^1 \right| \\
 & + (1 / \sqrt{1 - r^2}) \left| A_h^{-1/2} \phi_{h, \tau}^0 \right| \\
 & + (m\tau / \sqrt{1 - r^2}) \max_{0 \leq j \leq m} \left| A_h^{-1/2} \phi_{h, \tau, j} \right|.
 \end{aligned}$$

7. 中心差分近似問題の収束性と誤差評価

定理5. 定理4の仮定の下で考える。(ALWW)の一般化された解を $\Phi(t)$ とし、(ALWW)の解を $\Phi_{h, \tau, m}$ とする。

$$\Phi^1, \Phi^0 \in X, \quad \Psi(t) \in C([0, T] : X)$$

であり、

$$\Phi_{h, \tau}^i = P_h \Phi_h^i \quad (i = 0, 1),$$

$$\Psi_{h, \tau, m} = P_h \Psi(m\tau) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

であるとする。このとき、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq m\tau \leq T} \left| \Phi_{h, \tau, m} - \Phi(m\tau) \right| = 0$$

である。

定理6. 定理4の仮定に加えて、Gは性質(R)をもつものとする。

(ALWW)のデータ $\{\Phi^1, \Phi^0, \Psi\}$ が次の条件(I)のある $s \in [0, 1/2]$ に対してみたしているとする。

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \Phi^i \in D(A^{1+(i/2)+s}), \quad i = 1, 0, \\ \Psi(t) \in C^2([0, T], X), \\ \Psi^{(i)}(0) \in D(A^{(1-i)/2+s}), \quad i = 1, 0, \\ \Psi^{(2)}(t) \in D(A^s), \quad 0 \leq t \leq T. \end{array} \right.$$

$$\Phi^i = a \Phi_0^i + \phi^i \quad (i = 1, 0),$$

$$\Psi(t) = b(t) \Phi_0 + \phi(t)$$

とおき、(ALWW) の解を $\Phi(t)$ 、 $(ALWW_{h, \tau})$ の解を $\Phi_{h, \tau, m}$

とすると、 $0 \leq n\tau \leq T$ で

$$\begin{aligned} & |\Phi(n\tau) - \Phi_{h, \tau, n}| \\ & \leq (1+m\tau) \left\{ h^{1+s} C E_{m\tau}^s + \tau^2 M E_{\tau, n}^2 \right\} \\ & \quad + R_{\tau, m} + r_{\tau, n} \end{aligned}$$

なる評価が成立する。ここで、 C と M は $h \in (0, \bar{h}]$ と $T > 0$ に

よらない定数である。 M は τ と λ に依存する定数であり、

$$\begin{aligned} E_t^s &= |A^{(1/2)+s} \Psi(0)| \\ &+ |A^{(3/2)+s} \Phi| + |A^{1+s} \Phi| \\ &+ |A^s \Psi^{(1)}(0)| + t \max_{0 \leq r \leq t} |A^s \Psi^{(2)}(r)|, \end{aligned}$$

$$E_{\tau, m} = |A^{3/2} \phi^1| + |A \phi^0| + (n\tau + (1/\sqrt{g\lambda})) \max_{0 \leq r \leq n\tau} |\Psi^{(2)}(r)|,$$

$$r_{\tau, n} = |a(n\tau) - a_{h, \tau, n}|,$$

$$R_{\tau, m} = (1 + r/\sqrt{1-r^2}) |P_h \phi^1 - \phi_{h, \tau}^1| + (1/\sqrt{1-r^2}) |A_h^{-1/2} \{P_h \phi^0 + (\tau/2) (-A_h P_h \phi^1 + P_h \phi(0)) - \phi_{h, \tau}^0\}| + (1/\sqrt{1-r^2}) \max_{0 \leq j \leq m} |A_h^{-1/2} \{P_h \phi(j\tau) - \phi_{h, \tau, j}\}|,$$

$$a(t) = a^1 + t a^0 + \int_0^t (t-r) b(r) dr,$$

$a_{h, \tau, n}$ は定理4の(17)において定められている。

定理6の証明の方針 以下の4問題を考える。

$$(ALWW^0) \left\{ \begin{array}{l} d^2 \phi / dt^2 + A \phi = \phi, \quad t > 0, \\ \phi(0) = \phi^1, \quad (d\phi/dt)(0) = \phi^0. \end{array} \right.$$

$$(ALWW_h^0) \left\{ \begin{array}{l} d^2 \phi_h / dt^2 + A_h \phi_h = P_h \phi, \quad t > 0, \\ \phi_h(0) = P_h \phi^1, \\ (d\phi_h/dt)(0) = P_h \phi^0. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \sim \\ (ALWW) \\ h, \tau \end{array} \right\} & \begin{cases} D_{\tau} \frac{\sim}{\tau} \phi_{h, \tau, m} + A_h \frac{\sim}{\phi_{h, \tau, m}} = P_h \phi(m\tau), \\ \phi_{h, \tau, 0} = P_h \phi^1, \\ D_{\tau} \phi_{h, \tau, 0} = P_h \phi^0 \\ + (\tau/2) (-A_h P_h \phi^1 + P_h \phi(0)). \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} 0 \\ (ALWW) \\ h, \tau \end{array} \right\} & \begin{cases} D_{\tau} \frac{\sim}{\tau} \phi_{h, \tau} + A_h \frac{\sim}{\phi_{h, \tau}} = \phi_h, \\ \phi_{h, \tau}(0) = \phi_{h, \tau}^1, \\ D_{\tau} \phi_{h, \tau, 0} = \phi_{h, \tau}^0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}
 & \Phi(n\tau) - \Phi_{h, \tau, n} \\
 = & \Phi(n\tau) - \Phi_h(n\tau) + \Phi_h(n\tau) - \tilde{\Phi}_{h, \tau, n} \\
 & + \tilde{\Phi}_{h, \tau, n} - \Phi_{h, \tau, n} \\
 & \quad \left(\tilde{\Phi}_{h, \tau, n} = \phi_{h, \tau, n}^{\sim} + a(n\tau) \Phi_0 \right) \\
 = & (\phi(n\tau) - \phi_h(n\tau)) \\
 & + (\phi_h(n\tau) + a(n\tau) \Phi_0 - \phi_{h, \tau, n}^{\sim} - a(n\tau) \Phi_0) \\
 & + (\phi_{h, \tau, n}^{\sim} + a(n\tau) \Phi_0 - \phi_{h, \tau, n} - a(n\tau) \Phi_0)
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} & \Phi(n\tau) - \Phi_{h, \tau, n} \\ = & (\phi(n\tau) - \phi_{h, \tau, n}(n\tau)) + (\phi_{h, \tau, n}(n\tau) - \tilde{\phi}_{h, \tau, n}) \\ & + (\tilde{\phi}_{h, \tau, n} - \phi_{h, \tau, n}) + (a(n\tau) - a_{h, \tau, n}) \Phi_0 \end{aligned}$$

であるが

$$\begin{aligned} | \text{第一項} | &= O(h^{1+s}), \\ | \text{第二項} | &= O(\tau^2), \\ | \text{第三項} | &\leq R_{\tau, n} \quad (\text{定理1によって}), \\ | \text{第四項} | &= r_{\tau, n}. \end{aligned}$$

と評価される。

A_h が A のガレルキン近似ではなく、ある種の変分法違反によって定義されているため、評価のプロセスが複雑になっている。 A_h が A のガレルキン近似として定義されているときは $(ALWW^0)$ と $(ALWW^0_{h, \tau})$ と

を直接に比較することが可能である。(例えば Raviart-Thomas[7] Chapitre 8 参照)

8. 数値的検討

直方体領域：

$$\Omega = \{ (x, y, z) : 0 < x < 1, 0 < y < 0.55, -0.1 < z < 0 \}$$

に対して、近似固有値問題：

$$(AE)_h \quad A_h \Phi_h = \lambda_h \Phi_h,$$

$$\{\lambda_h, \Phi_h\} \in \mathbb{R} \times (X_h - \{0\})$$

を数値計算し、 $\|A_h\|_{L(X_h)}$ 、すなわち、 A_h の最大固有値、を求め、

評価 (16) の成立を確かめてみた。この計算においては、

$$\Gamma_0 = \{(x, y, 0) : 0 < x < 1, 0 < y < 0.55\}$$

である。直方体の各辺を N 等分 ($1 \leq N \leq 14$) し、ケース 1 では、フリードリックス・ケラー分割にもとづく区分一次連続要素を用い、ケース 2 では、かなえ一次直方体要素を用いた。(要素の命名法は昨年報告 [8] に従った。)

本計算にあたっては $(AE)_h$ に対応する弱形式問題を静的に縮約した一般固有値問題とし、修正コレスキー分解を用いた二分法により固有値を求め、逆反復法によって固有ベクトルを求めた。FORTRAN 77 による倍精度計算で、

電気通信大学情報処理センタ HITAC M260-D ($1 \leq N \leq 9$) および東京大学大型計算機センタ HITAC M680 ($10 \leq N \leq 14$) によって実行した。

図 1 に、ケース 1 とケース 2 の場合の A_h の最大固有値と N との関係プロットしたもの

を示す。ほぼ N に関して線形であり、評価 (16) と矛盾していないことがわかる。

図 2 と図 3 に、それぞれケース 1 とケース 2 の場合の第 1 固有値から第 4 固有値までの誤差を表示した。定理 3 の 1 の評価に対応する収束率が観察される。

図 4 には、ケース 1 の場合の固有ベクトルの収束状況をプロットした。定理 3 の 2 の評価に対応する収束率が観察される。

傾斜底水域：

$$\Omega = \{ (x, y, z) : 0 < x < 1, 0 < y < 0.55, \\ z = -0.1 + 0.08x \}$$

の場合にフリードリックス・ケラー分割を用いて、 A_h の最大固有値を計算し

た。その値を図1に附加してある。このとき用いた正則な分割は次のようにして作った。次の二つの直方体 Ω_0 と Ω_1 を考える。

$$\Omega_0 = \{ (x, y, z) : 0 < x < 1, 0 < y < 0.55, \\ -0.02 < z < 0 \},$$

$$\Omega_1 = \{ (x, y, z) : 0 < x < 1, 0 < y < 0.55, \\ -0.8 < z < -0.02 \}.$$

直方体 Ω_0 の各辺を N 等分してフリードリックス・ケラー分割による四面体分

割を得る。直方体 Ω_1 も同様にして四面体分割する。ただし、平面：

$$z = -0.1 + 0.08x \text{ で } \Omega_1 \text{ を二分したときに上に得られた四面体分割}$$

はこの二分された領域の四面体分割になっているようにした。 Ω_0 と Ω_1 で得

られた四面体分割を Ω に制限したものを計算に使用した。

9. 謝辞

本研究に際して、建設的な助言をいただいた電気通信大学渡辺二郎教授ならびに田端正久助教授に深く感謝申し上げます。

文献

- [1] J.H.Bramble & J.E.Osborn, Approximation of Steklov Eigenvalues of Non-Selfadjoint Second Order Elliptic Operators, The Mathematical Foundation of the Finite Element Method with Applications in the Partial Differential Equations, (Ed. by K.Aziz), pp.387-408, Academic Press, New York, 1972.
- [2] J. H. Bramble & J. E. Osborn, Rate of Convergence Estimates for Nonselfadjoint Eigenvalue Approximations, Math. of Comp., Vol.27, No.123, pp. 525-549 (1973).
- [3] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, Berlin, 1966.
- [4] J.L.Lions & E.Magenes, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- [5] J. Nečas, Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques Masson et C^{ie}, Paris & Academia, Prague, 1967.
- [6] J. J. Stoker, Water Waves, Interscience Publishers, New York, 1957.
- [7] P. A. Raviart & J. M. Thomas, Introduction a l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles, Masson, Paris, 1983.
- [8] 牛島照夫, 四面体分割と離散調和作用素, 応用数学合同シンポジウム研究報告集, 昭和61年12月22日~24日, pp. 165-172.

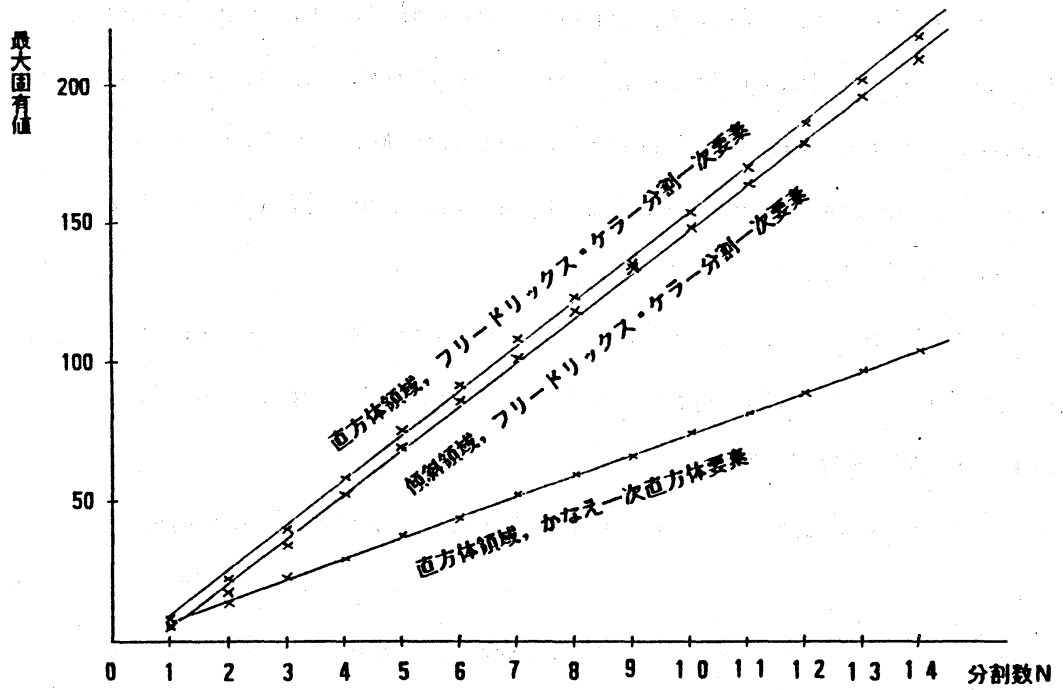


図1 最大固有値と分割数の関係

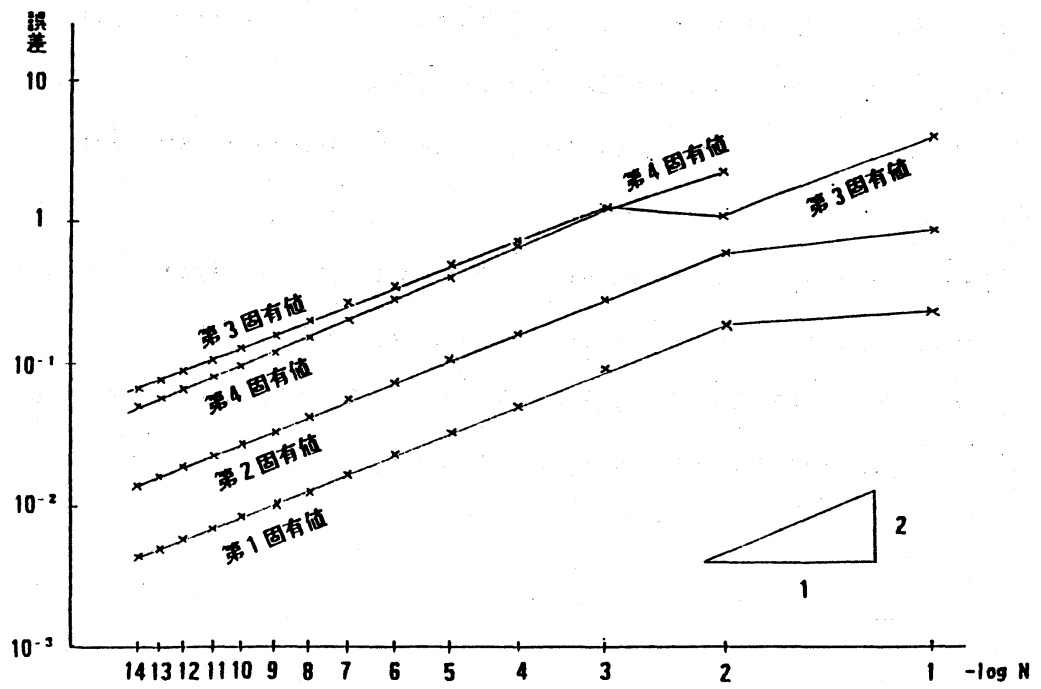


図2 直方体領域, フリードリックス・ケラー分割一次要素の固有値の収束

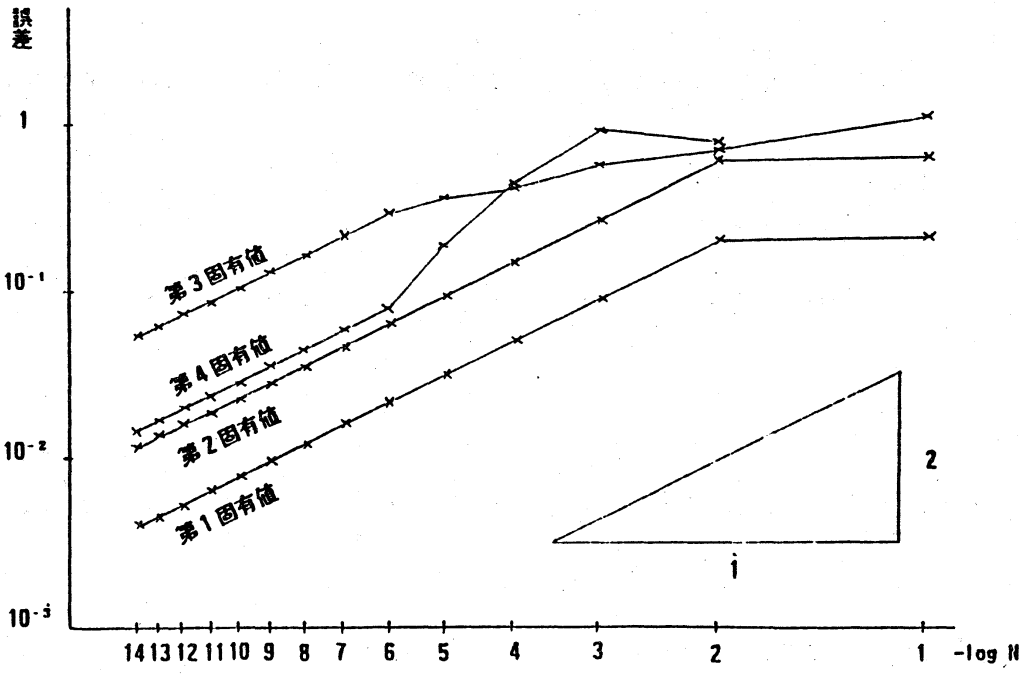


図3 直方体領域, かなえ一次直方体要素の固有値の収束

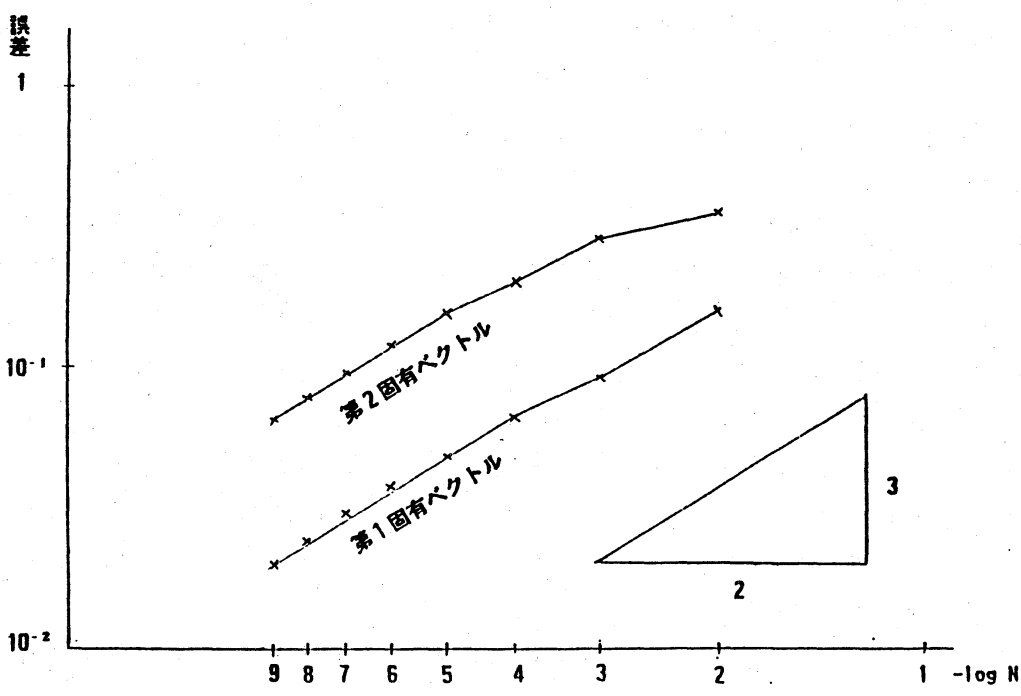


図4 直方体領域, フリードリックス・ケラー分割一次要素の固有ベクトルの収束