

ナビエ・ストークス方程式の分数段有限要素近似

電気通信大学 田端 正久 (Masahisa Tabata)

0. はじめに

ナビエ・ストークス方程式

$$\partial u / \partial t + (u \cdot \text{grad}) u - \nu \Delta u + \text{grad } p = f, \quad x \in \Omega, t \in (0, T) \quad (1a)$$

$$\text{div } u = 0 \quad (1b)$$

の分数段近似

$$(u^{n+1/2} - u^n) / \tau - \nu \Delta u^{n+1/2} + \text{grad } p^{n+1} = f^{n+1}, \quad (2a)$$

$$\text{div } u^{n+1/2} = 0, \quad (2b)$$

$$(u^{n+1} - u^{n+1/2}) / \tau + (u^{n+1/2} \cdot \text{grad}) u^{n+1} = 0 \quad (2c)$$

を考える。ここに、 Ω は流体の占めている空間領域、 ν は粘性係数、 f は外力、 u 、 p はそれぞれ求めるべき速度ベクトル、圧力である。式 (2) で、 τ は時間刻み、 u^n はある有限要素空間に求めた時刻 $n\tau$ での u の近似関数、 p^n は p の近似関数ある。空間微分は弱形式を経由して有限要素近似で置き換えられる。分数段近似解法では、 u^n から $u^{n+1/2}$ と p^{n+1} を (2a), (2b) 式を用いて、 $u^{n+1/2}$ から u^{n+1} を (2c) 式を解いて、順次求める。前半はストークス型の問題であり、後半は一階双曲型問題である。 n が整数のとき、 $u^n(P)$ は場所 P 、時刻 $n\tau$ での u の値に対応しているが、 $u^{n+1/2}(P)$ は $(P, n\tau)$ に位置していた粒子の τ 時刻後の位置 $(P+u\tau, (n+1)\tau)$ での値に対応している。この特長を活かして、分数段近似は自由表面を持つ非圧縮粘性流体問題の計算にしばしば使われる。

以下では、有限要素スキームの構成を説明し、 Ω が固定領域のときスキームの安定性、収束性を検討する。式 (2a, 2b), (2c) はともに陰解法になっているが、陽陰解法など他の組み合わせについても考察する。

1. 有限要素近似

領域 Ω は m ($= 2, 3$) 次元の有界領域とする。境界 $\partial\Omega$ で斉次境界条件

$$u = 0 \quad (3)$$

が与えられている。関数空間 X 、 M を

$$X = (H_0^1(\Omega))^m, \quad M = L_0^2(\Omega)$$

と置く。ここに、 $L_0^2(\Omega)$ は $L^2(\Omega)$ の関数で Ω での積分平均が零であるものの全体を示している。 $X \times X$, $X \times X \times X$, $X \times M$ から R への形式 a_0 , a_1 , b を

$$a_0(u, v) = 2 \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^m D_{ij}(u) D_{ij}(v) \right\} dx, \quad D_{ij}(v) = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) / 2,$$

$$a_1(b, u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \{ v_i \operatorname{div}(b u_i) - u_i \operatorname{div}(b v_i) \} / 2 \, dx,$$

$$b(v, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} v \, dx$$

で定義する。これらの記号を使って方程式(1)を弱形式に変換すると

$$(\partial u / \partial t, v) + a_1(u, u, v) + \nu a_0(u, v) + b(v, p) = (f, v), \quad v \in X$$

$$b(u, q) = 0, \quad q \in M$$

となる。 X , M のノルムを、それぞれ、

$$\|v\| = \{ a_0(v, v) \}^{1/2}, \quad \|q\| = \left\{ \int_{\Omega} q^2 \, dx \right\}^{1/2}$$

で定義する。 X , M の有限次元部分空間を X_h , M_h とする。要素分割は準一様でその代表要素サイズを h とする。 X_h , M_h の間には定常ストークス問題の可解性、収束性を考慮して、Inf-Sup条件[1]

$$\exists \beta > 0, \inf \{ \sup \{ b(v, q) / \|v\| \|q\| ; v \in X_h \} ; q \in M_h \} \geq \beta$$

の関係の存在を仮定する。ここに、 β は h に依存しない定数である。方程式(2c)は一階双曲型なので、数値的安定性を考慮した上流近似

$$a_1^h(b, u, v) = \sum_i \sum_{j=1}^m \{ v_j(P_i) \operatorname{div}_h(b u_j)(P_i) - u_j(P_i) \operatorname{div}_h^{\#}(b v_j)(P_i) \} m_i / 2$$

も使用する。ここに、 m_i は節点 P_i の周りの双対分割領域の体積、 div_h は保存型上流近似[2]、 $\operatorname{div}_h^{\#}$ は div_h に対応する下流近似である。

補題1. 任意の $b, u, v \in X_h$ に対して次式が成立する。

$$(i) \quad |a_1^h(b, u, v)| \leq c_1 \|b\|_{0,4} (\|u\|_{0,4} \|v\|_{1,2} + \|u\|_{1,2} \|v\|_{0,4}),$$

$$(ii) \quad 0 \leq a_1^h(b, u, u) \leq c_2 \|b\|_{0,\infty} \|u\|_{1,2}^2.$$

2. 安定性と収束性

次のスキームを考える。

Implicit-Implicit scheme:

$$((u^{n+1/2} - u^n)/\tau, v) + \nu a_0(u^{n+1/2}, v) + b(v, p^{n+1}) = (f^{n+1}, v), \quad v \in X_h \quad (4a)$$

$$b(u^{n+1/2}, q) = 0, \quad q \in M_h \quad (4b)$$

$$((u^{n+1} - u^{n+1/2})/\tau, v) + a_1^h(u^{n+1/2}, u^{n+1}, v) = 0, \quad v \in X_h. \quad (4c)$$

Implicit-Explicit scheme:

$$((u^{n+1/2} - u^n)/\tau, v) + \nu a_0(u^{n+1/2}, v) + b(v, p^{n+1}) = (f^{n+1}, v), \quad v \in X_h \quad (5a)$$

$$b(u^{n+1/2}, q) = 0, \quad q \in M_h \quad (5b)$$

$$((u^{n+1} - u^{n+1/2})/\tau, v) + a_1^h(u^{n+1/2}, u^{n+1/2}, v) = 0, \quad v \in X_h. \quad (5c)$$

Explicit-Implicit scheme:

$$((u^{n+1/2} - u^n)/\tau, v) + \nu a_0(u^n, v) + b(v, p^{n+1}) = (f^{n+1}, v), \quad v \in X_h \quad (6a)$$

$$b(u^{n+1/2}, q) = -b(u^n, q), \quad q \in M_h \quad (6b)$$

$$((u^{n+1} - u^{n+1/2})/\tau, v) + a_1^h(u^{n+1/2}, u^{n+1}, v) = 0, \quad v \in X_h. \quad (6c)$$

上のスキームで、時間微分項には質量集中化を行っているものとする。

定理 1.

(i) スキーム (4) は無条件 L^2 安定である。

(ii) スキーム (5) は

$$\tau \leq c_5 h^m \quad (7)$$

の下で L^2 -安定である。ここに、 c_5 は粘性係数 ν , 外力 f , 初期値に依存する正定数である。

(iii) スキーム (6) は

$$\tau \leq c_6 h^2 / \nu \quad (8)$$

の下で L^2 -安定である。ここに、 c_6 は領域 Ω の直径のみに依存する正定数である。

定理 2. $m = 2$ のとき、スキーム (5) の解 u_h は条件 (7) の下で厳密解 u に収束する。 $m = 3$ のときは、ある部分列が厳密解に収束する。

注意 1.

(i) スキーム (5) は最初の $u^{1/2}$ を除いて、 $u^{n+1/2}$ に関する一段スキームに書き直すことができる。スキーム (6) を一段スキームに書き直すことはできない。

(ii) スキーム (6) の前半は P P E (Pressure Poisson Equation) を用いて p のみの方程式で解くことができる。その可解性は Inf-Sup 条件で保証される。後半は u を成分ごとに分解して解くことができる。

3. 数値例

領域 Ω は 2 次元正方領域で、図 1 のように分割する。流速 u にはバブル関数付三角形一次要素、圧力 p には三角形一次要素 (図 2) を用いる。この組み合わせは Inf-Sup 条件を満たしている。双対分割は図 3 の 2 つを考える。定常厳密解として

$$u_i = x_i(x_i - 2x_{i+1})/2, \quad i=1, 2, \quad p = x_1^2 + x_2^2 - 2/3$$

を与えた。初期条件 0 から、Implicit-Explicit スキームを用いて時間発展で解き、得られた定常解と厳密解との誤差を両対数グラフに図示したのが図 4 である。横軸は 1 辺の分割数 N 、縦軸は誤差を示している。 $u(0, 2)$ は L^2 ノルムでの u の誤差を、 $p(0, 2)$ は L^2 ノルムでの p の誤差を意味している。 $E-1$ は 10^{-1} を示している。2-Decomp. (3-Decomp.) は図 3 で 2 分割型 (3 分割型) の双対分割を使ったことを表している。この要素を定常ストークス問題に用いたときの理論的収束オーダーから得られるグラフの傾きは u で -2 、 p で -1 である。概ねこれらの傾きが得られていることが観察できる。

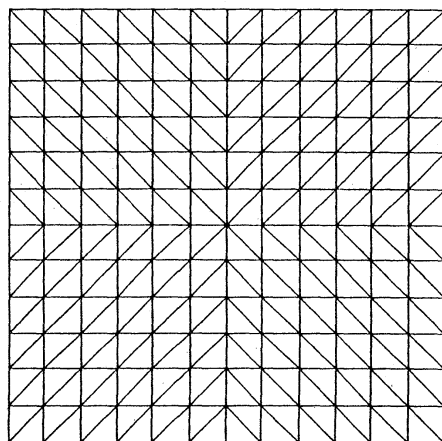


図 1 要素分割 ($N = 12$)

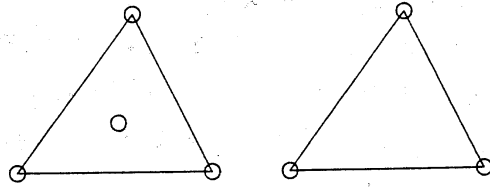


図2 速度と圧力の節点配置

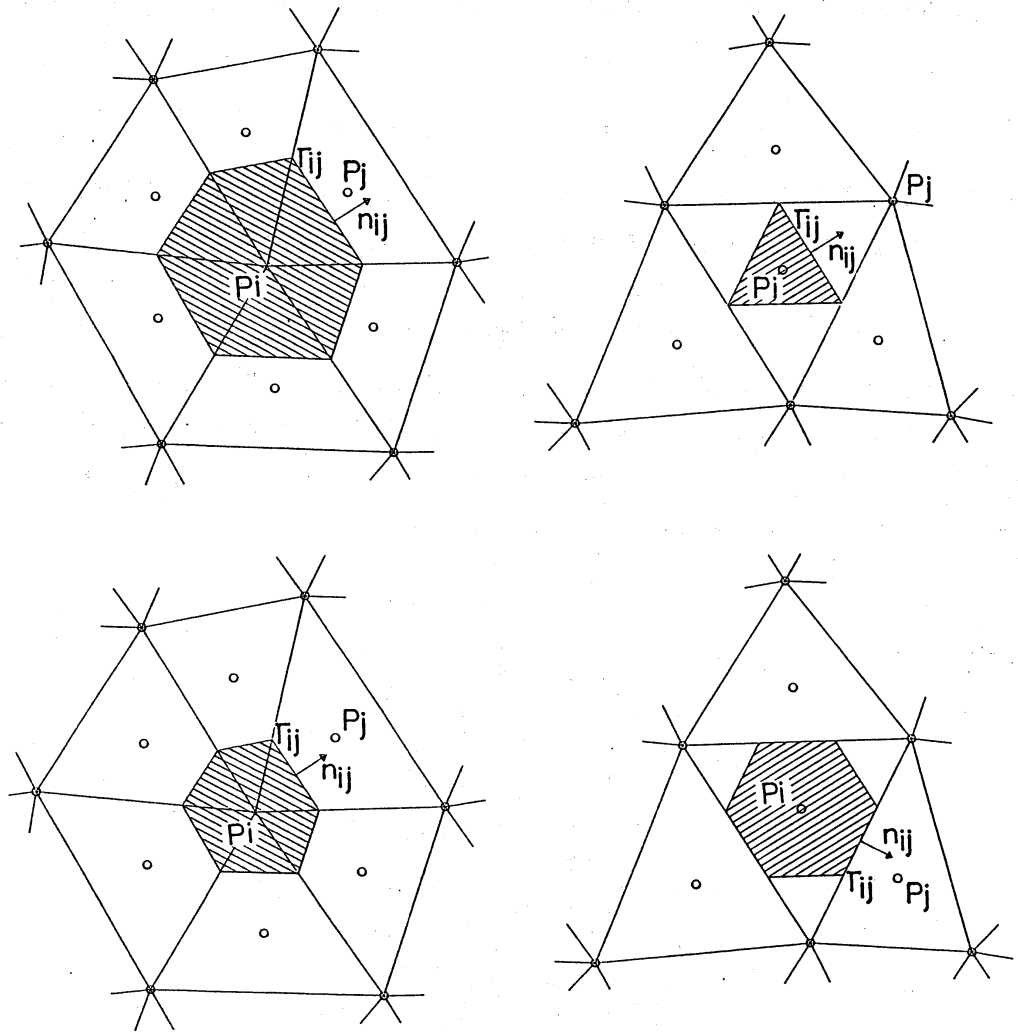


図3 双対分割. 2分割型(上), 3分割型(下)

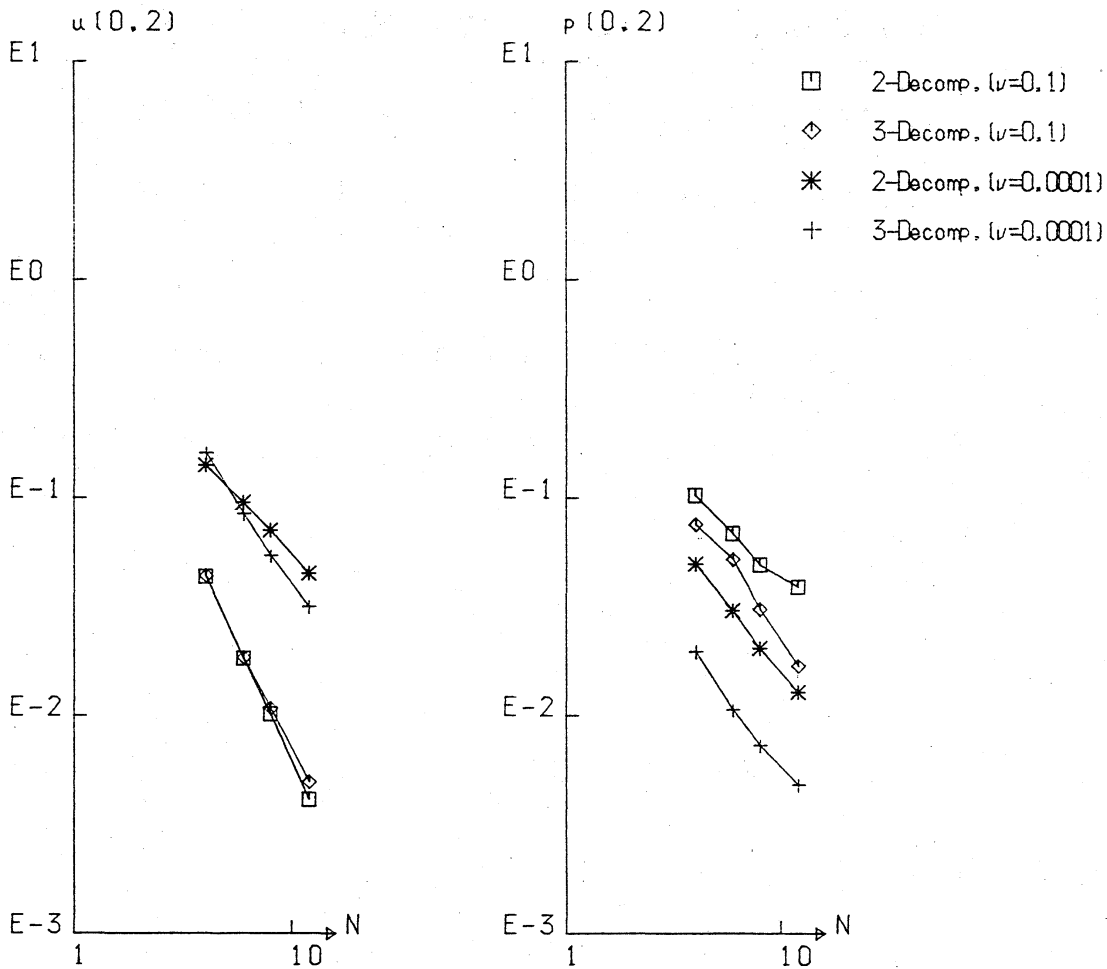


図4 流速と圧力の誤差 ($N = 4, 6, 8, 12$)

参考文献

- [1] Girault, V., Raviart, P. A.: Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Springer-Verlag, 1986.
- [2] Baba, K., Tabata, M.: On the conservative upwind finite element scheme for convective diffusion equations, R.A.I.R.O., Numer. Anal., 15(1981), 3-25.
- [3] 田端正久、守田明生: バブル関数付き三角形一次要素の保存型上流近似、電気通信大学学報、38(1987), 1-5.
- [4] Temam, R.: Navier-Stokes Equations, North-Holland, 1984.