数理解析研究所講究録
第 693 巻 1989 年 1-11

Quasi-Gorenstein Fano 3-folds with isolated non-rational singularities

九大理 石井志保子 (Shihoko Ishii)

Quasi-Gorenstein Fano n-fold とは n 次元の normal projective variety X で anticanonical divisor $-K_X$ が ample Cartier divisor であるものを意味する。
X 上の non-rational locus Σ_X を $\Sigma_X := \{ x \in X \mid x$ は non-rational な singular point i.e. $(Rf_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_x \neq \mathcal{O}_{X,x}$ for a resolution $f : \tilde{X} \to X \}$ と定義すると Σ_X は X の closed subset になる。 ここで quasi-Gorenstein Fano n-fold X で $\Sigma_X \neq \phi$, $\dim \Sigma_X = 0$ なるものを すべて決定する という問題を考える。 例えば abelian surface 上の projective cone や normal K3-surface 上の projective cone は そのような X の例になっている。逆に quasi-Gorenstein Fano 3-fold で $\Sigma_X \neq \phi$ $\dim \Sigma_X = 0$ なるものはすべて上の例で与えられる というのが この小稿の主張である。

定理. Xを quasi-Gorenstein Fano 3-fold with $\Sigma_X \neq \phi$ $\dim \Sigma_X = 0$ とすると. 次が成立

(i) 高々 rational singularities しかもたない normal surface S で $\mathcal{O}(K_S) \cong \mathcal{O}_S$ を満たすもの が存在し. さらに. S 上の ample invertible sheaf $\mathcal{L}$ が存在して. X は S 上の projective cone w. r. to $\mathcal{L}$ になっている. (i.e. X は $\mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L})$ の negative section の contraction)

(ii) さらにこのとき.

X : Gorenstein $\Leftrightarrow$ Sは normal K3-surface.

($\underset{def}{\Leftrightarrow}$ Sは normal surface で $\mathcal{O}(K_S) \cong \mathcal{O}_S$ $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$, S の minimal resolution が K3-surface)

X : non-Gorenstein $\Leftrightarrow$ S は Abelian surface.

定理は次の基本的な命題から導かれる.

命題. Xを quasi-Gorenstein Fano n-fold with $\Sigma_X \neq \phi$ $\dim \Sigma_X = 0$ とする. さらに X の a resolution $f: \hat{X} \to X$ に対し. $\bigoplus_{m \geq 0} f_* \mathcal{O}_{\hat{X}}(mK_{\hat{X}})$ が有限生成 $\mathcal{O}_X$-algebra になると仮定すると. 高々 rational singularity しかもたない $(n-1)$-fold S で $\mathcal{O}(K_S) \cong \mathcal{O}_S$ を満たすものが存在し. さらに

S 上の ample invertible sheaf $\mathcal{L}$ が存在して、
X は S 上の projective cone w.r.to $\mathcal{L}$ になっている。

[定理の証明] 命題の条件は、minimal model conjecture が正しければ、必然的に成立する。$n=3$ の場合は、森氏、川又氏、Shokurov 氏らによって(最終的には森氏[M]によって) minimal model conjecture が肯定的に解決されたので定理の(i)が従う。
(ii)については、$\mathcal{O}_S(K_S) \cong \mathcal{O}_S$ を満たす normal surfaces の分類が [U] でなされ、その中で高々 rational singularities を持つものは、Abelian surface か normal K3-surface であることが示されている。$g: \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L}) \to X$ として、$R^1 g_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L})}$ を考えてやると、S が Abelian の場合 $\neq 0$ となり、normal K3 の場合 $= 0$ になるのでそれぞれ、not Gorenstein 又は、Gorenstein になる。

命題の証明に入る前に、証明に必要な Lemma を準備する。
Lemma の証明は、[M. §1] と、同じなのでここでは省略する。

Lemma. Y: 高々 canonical singularities しか持たない projective n-fold ($n \geq 2$)

$R \subset \overline{NE}(Y)$ extremal ray s.t. φ_R : birational
D : φ_R の exceptional set
$\varphi_R|_D : D \to \varphi_R(D)$ の任意の fiber の次元が 1.
$D \not\subset$ (Y の non-quasi-Gorenstein locus)
の仮定のもとに次が成立する.
(i) $\varphi_R|_D$ の各 fiber は $\mathbb{P}^1$ の tree
(ii) ℓ を general fiber の component とすると. $K_Y \cdot \ell \leqq -1$.

[命題の証明] 命題の仮定により. $Y = \mathrm{Proj} \bigoplus_{m \geq 0} f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}})$ は projective variety になり. $g : Y \to X$ を canonical morphism とすると. 次が成立する.

(1) Y は高々 canonical singularities しかもたない.
(2) $E := g^{-1}(\Sigma_X)_{red}$ とすると. E は pure codimension 1 になり. $g|_{Y-E} : Y - E \xrightarrow{\simeq} X - \Sigma_X$ isom.
(3) K_Y is relatively ample with respect to g
(4) $K_Y = g^* K_X - \Delta$ とおく. $E = \sum_{i=1}^{r} E_i$ と既約分解しておく. $\Delta = \sum_{i=1}^{r} a_i E_i$ ($a_i \in \mathbb{N}$) と表わされる.

さらに(3) は Δ を用いて次のように書き替えられる.
(3)′ 任意の irreducible curve $C \subset E$ に対して $\Delta \cdot C < 0$

<u>Claim 1</u> $\overline{NE}(Y)$ の中に extremal ray R で $\Delta\cdot R>0$ を満たすものが存在する.

(i) $\overline{NE}_{K_Y}(Y):=\{C\in\overline{NE}(Y)\mid K_Y\cdot C\geqq 0\}$ とおくと. 川又の cone theorem (cf. [K1]) により.

$$\overline{NE}(Y)=\sum_i R_i+\overline{NE}_{K_Y}(Y)$$

と表わされる. ここで R_i は extremal ray ($\forall i$).
Y 上の irreducible curve で E と交わり E に含まれていないもの C をとると. $\Delta\cdot C>0$ を満たしている.
一方 $\overline{NE}(Y)$ の中の C の class $[C]$ は $\sum l_i+a$ ($l_i\in R_i$ $a\in\overline{NE}_{K_Y}(Y)$) と表わされる. この表示を用いて. 次の不等式を得る.

(5) $0<\Delta\cdot C=\sum_i(\Delta\cdot l_i)+\Delta\cdot a$.

ここで a の定義により $0\leqq K_Y\cdot a=g^*K_X\cdot a-\Delta\cdot a$ だから. $-K_X$ が nef であることを用いて. $\Delta\cdot a\leqq 0$
したがって不等式(5)により. ある i が存在して $\Delta\cdot l_i>0$
この l_i の属する ray R_i を R とすれば良い.

<u>Claim 2</u> R を Claim 1 の extremal ray とする.
$\varphi_R: Y\to S$ を R の contraction とすると. 次が成立.

(6) $\dim S=n-1$

(7) $\Delta=E=E_1$ (i.e. Δ は irreducible reduced)

で $\varphi_R|_E : E \xrightarrow{\sim} S$ isom

(8) $\Sigma_X = \{x\}$ one point set であって. xを通らない $|-K_X|$ の member H が存在する.

(9) $\tilde{H} := g^*H$ とすると. $\varphi_R|_{\tilde{H}} : \tilde{H} \xrightarrow{\sim} S$ isom.

(i) (6)の証明: まず $\dim S \geq n-1$ を示そう.
E 上の任意の curve C をとると (3)' より. $\Delta \cdot C < 0$ よって $[C] \notin R$ i.e. C は φ_R によって点につぶれることはない. したがって $\varphi_R|_E : E \to \varphi_R(E)$ は finite morphism である. $\dim S \geq \dim \varphi_R(E) = n-1$ より. ok.
次に $\dim S = n$ として矛盾を出そう. この場合 φ_R は birational になるので D を exceptional set とすると. $\varphi_R|_D : D \to \varphi_R(D)$ のすべての fiber は 1次元になる.
事実. 直前の議論より. 任意の $s \in \varphi_R(D)$ に対し. $\varphi_R^{-1}(s) \cap E$ は高々 finite points set になるので もし $\varphi_R^{-1}(s)$ の次元が 2 以上あれば これらの点を通らない curve $C \subset \varphi^{-1}(s)$ がとれる. この C は φ_R によって一点 s につぶれているのだから. $[C] \in R$ したがって $\Delta \cdot C > 0$ でなければならない. しかし C のとり方 ($E \cap C = \phi$) により $\Delta \cdot C = 0$ となり矛盾. よって $\varphi^{-1}(s)$ の次元は 1次元である. さて. Y の non-quasi-Gorenstein locus は

Eに含まれているので $D \not\subset$ (Yの non-quasi-Gorenstein locus) となる. したがって Lemma により irreducible curve $l \subset \varphi^{-1}(s)$ に対して $K_Y \cdot l \geqq -1$。
一方 $l \not\subset E$ だから $-K_X$ の ampleness により $g^*K_X \cdot l < 0$.
g^*K_X は Cartier divisor であるから. 上の intersection number は 整数でなければならない. よって $g^*K_X \cdot l \leqq -1$.
これと $\Delta \cdot l > 0$ とあわせて $K_Y \cdot l = g^*K_X \cdot l - \Delta \cdot l$ を評価してみると $K_Y \cdot l < -1$ となり. 上記に矛盾する. したがって $\dim S = n$ はおこらない.

(7)の証明: (6)により. φ_Rが relative dimension 1 の fiber 構造を与えることがわかった. 一般に. φ_Rが fiber 構造を与えるとき. general fiber は weak log-terminal で $-K$ が ample であることが示されている. したがって. 我々の場合. general fiber l は. $\mathbb{P}^1$ に同型となる. よって $-2 = K_Y \cdot l = g^*K_X \cdot l - \Delta \cdot l$.
ここで l は Δ の Cartier の部分で交わっているとしてよいので $\Delta \cdot l \geq 1$ また $g^*K_X \cdot l \leqq -1$ より. 上の等式は 2つの等式:

(10) $\Delta \cdot l = 1$. $g^*K_X \cdot l = -1$

を induce する. $\varphi_R : E \to S$ は finite surjection

だから、Eのすべてのcomponentとlは交わりをもつから、
$1 = \Delta \cdot l = \sum a_i E_i \cdot l \geqq \sum_{i=1}^{r} a_i \quad (a_i \in \mathbb{N})$ により、
$r=1,\ a_1 = 1$ が出る。すなわち $\Delta = E = E_1$。

(8)の証明：
Eがirreducibleになったので、その image Σ_X も irreducible すなわち一点になることが示された。
$\Sigma_X = \{x\}$ と書こう。求めるHが存在するためには、
$\Gamma(X, \mathfrak{m}_x \mathcal{O}(-K_X)) \subset \Gamma(X, \mathcal{O}(-K_X))$ が一致しないことを示せば十分。ここで$\mathfrak{m}_x$は点xの定義ideal sheafである。$K_Y = g^*K_X - E_1$ を移項にsheafをとれば $\mathcal{O}(K_Y) \otimes \mathcal{O}(-g^*K_X) = \mathcal{O}(-E_1)$ が得られる。右辺はreduced idealであるので$\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_Y$を含むことに注意しておく。$g$によるdirect imageをとれば

$$g_* \mathcal{O}(K_Y) \otimes \mathcal{O}(-K_X) = g_* \mathcal{O}(-E_1) = \mathfrak{m}_x$$

を得る。したがって $\mathfrak{m}_x \mathcal{O}(-K_X) = g_* \mathcal{O}(K_Y) \otimes \mathcal{O}_X(-2K_X)$。
ここでLeray spectral sequence：

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q g_* \mathcal{O}(K_Y - 2g^*K_X)) \Rightarrow H^{p+q}(Y, \mathcal{O}(K_Y - 2g^*K_X))$$

を考えると、trivial edge sequenceによりinjection

$$H^1(X, g_* \mathcal{O}(K_Y) \otimes \mathcal{O}(-2K_X)) \hookrightarrow H^1(Y, \mathcal{O}(K_Y - 2g^*K_X))$$

を得る。$-2g^*K_X$ は nef で big だから川又-Viehweg vanishing theoremにより、右側が消え、したがって左のcohomologyも消える

したがって、次のexact sequenceで

$$0 \to \Gamma(X, m_x\mathcal{O}(-K_X)) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(X, \mathcal{O}(-K_X)) \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}(-K_X)/m_x\mathcal{O}(-K_X) \to H^1(X, m_x\mathcal{O}(-K_X))$$

$$\mathcal{O}(-K_X)/m_x\mathcal{O}(-K_X) = \mathbb{C}, \quad H^1(X, m_x\mathcal{O}(-K_X)) = H^1(X, g_*\mathcal{O}(K_Y)\otimes\mathcal{O}(-2K_X))$$

右端 = 0 となる。よって β が surjective になるので、α は同型にならないことが示された。

(9)の証明：$H \in |-K_X|$, $x \notin H$, $\widehat{H} = g^*H$ とすると、φ_R の general fiber l に対して $\widehat{H}\cdot l = -g^*K_X\cdot l = 1$ (by (10)) したがって $\varphi|_{\widehat{H}} : \widehat{H} \to S$ は birational である。今、irreducible curve $C \subset \widehat{H}$ を $\varphi_R(C) = \text{one point}$ なるものとすると、$[C] \in R$ より $\Delta\cdot C > 0$ でなければならない。しかし $\widehat{H} \cap E = \phi$ であったので $\widehat{H}$ 上の curve C も $C \cap E = \phi$ よって $\Delta\cdot C = 0$ (矛盾) したがって $\widehat{H}$ の中で点につぶされているような curve は存在しない。すなわち、$\varphi|_{\widehat{H}}$ は finite morphism である。S は normal なので Z.M.T より finite な birational morphism $\varphi_R|_{\widehat{H}}$ は isomorphism になる。これで Claim 2 は証明しおわった。

さて次に $\varphi_R : Y \to S$ が実は S 上の $\mathbb{P}^1$-bundle になることを示そう。以後簡単のために φ_R を単に φ と書くことにする。$\mathcal{L} := \mathcal{O}_Y(\widehat{H})$ とすると、これは relatively ample w.r.to φ になる. 実際 C を φ による fiber の irreducible comp. とすると. $[C]\in R$ だから. $\Delta\cdot C>0$ よって $C\not\subset E$. したがって $\widetilde{H}\cdot C=-g^*K_X\cdot C>0$ これより $\mathcal{L}$ は. φ の各 fiber で ample であることがわかるので relatively ample w.r.to φ である. Y 上の exact sequence: $0\to\mathcal{O}_Y\to\mathcal{L}\to\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{H}}\to 0$ の φ による direct images をとって.

$$(11)\qquad 0\to \underset{\mathcal{O}_S}{\underset{\parallel}{\varphi_*\mathcal{O}_Y}}\to\varphi_*\mathcal{L}\to\varphi_*(\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{H}})\to \underset{0}{\underset{\parallel}{R^1\varphi_*\mathcal{O}_Y}}$$

を得る ここで 右端が消えるのは φ が extremal ray の contraction だからである. ([K2] Th 1.2).
$\widetilde{H}$ に制限すると. φ は同型であるから. $\varphi_*(\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{H}})$ は S 上の invertible sheaf になる. よって $\varphi_*\mathcal{L}$ は rank 2 の locally free sheaf になる.
可換図式:

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to & \mathcal{O}_Y & \to & \mathcal{L} & \to & \mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{H}} & \to 0\\
 & \parallel & \circlearrowleft & \uparrow\nu & \circlearrowleft & \uparrow & \\
 & \varphi^*\varphi_*\mathcal{O}_Y & \to & \varphi^*\varphi_*\mathcal{L} & \to & \varphi^*\varphi_*(\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{H}}) & \to 0
\end{array}$$

により. $\nu:\varphi^*\varphi_*\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ は surjective になる. すなわち. $\mathcal{L}$ によって. S 上の morphism $\Phi_{|\mathcal{L}|}: Y\to\mathbb{P}(\varphi_*\mathcal{L})$ が定義できる. $\mathcal{L}$ は relatively ample だったので $\Phi_{|\mathcal{L}|}$ は finite morphism である. また. general fiber $l=\varphi^{-1}(s)$ に対して. $\deg\mathcal{L}|_l=\widetilde{H}\cdot l=1$ だから. $\Phi_{|\mathcal{L}|}$ は birational

一方 $\mathbb{P}(\varphi_*\mathcal{L})$ は normal $(n-1)$-fold S 上の locally trivial $\mathbb{P}^1$-bundle だから normal である。したがって Z.M.T を使えば $\Phi|_U$ は isomorphism になる。ここで $Y \supseteq \mathbb{P}(\varphi_*\mathcal{L})$ に $\hat{H}$ と disjoint な section E が存在する (by (7).(8)) ので exact sequence (11) は split する。よって $Y = \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L}_S)$ ただし $\mathcal{L}_S = \varphi_*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\hat{H}})$. X は Y の negative section E をつぶして得られたものである。また S の singularity に non-rational なものがあると Σ_X の次元が 1 以上になってしまうので矛盾。これにより命題の証明が完了したことになる。

References.

[K1] Kawamata, Y.: The cone of curves of algebraic varieties, Ann. of Math. 119 (1984) 603–633.

[K2] ——: Crepant blowing-ups of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces.

[M] Mori, S.: Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. J of AMS, 1 (1988) 117–253.

[U] Umezu, Y.: On normal projective surface with trivial dualizing sheaf. Tokyo J. of Math. 4 (1981) 343–354