数理解析研究所講究録
第 693 巻 1989 年 23-40

交叉cohomology — L^2理論と混合Hodge理論の交叉点

大沢健夫 (Takeo OHSAWA)

1、複素解析空間の性質のうち、Stein性および射影性は(層係数)cohomology群を用いて特徴付けられるので、これらの空間(Stein空間、射影的代数多様体)に付随する種々のcohomology群の研究は有用である。一つの方法論として、cohomology類を調和形式で代表させ、微分幾何的計算にのせるやり方があるが、最近この方法でHodge理論の一つの拡張が成されつつある。以下では特に、開多様体上のcohomology類を適当な計量に対して'調和化'する話——所謂L^2理論——をある程度一般的な形で示し、Kähler空間においてはCheeger-Goreski-MacPherson予想:

$$\text{交叉 cohomology} = L^2\ \text{cohomology} \left(\begin{array}{c}\approx \text{調和化可能} \\ \text{な cohomology}\end{array}\right)$$

が現在までの文献でどこまで解決に迫っているか報告する。また、CGM予想は例外集合の構造と関連している。その話を[10]にそって解説する。

2、L^2 cohomology

$(X,\ ds^2)$を連結Hermite多様体とする。$(0,1)$型複素外微分作用素を$\bar{\partial}$で表す。$L^{p,q}$ (resp. L^r) をds^2に関して二乗可積分なX上の(p,q)形式全体(r形式全体)のなすHilbert空間とする。$L^{p,q}$の元fに対し、$\bar{\partial}f$が(超関数の意味で) $L^{p,q+1}$に属するとき、fは$\bar{\partial}$の定義域に属すると言う。$L^{p,q}$における$\bar{\partial}$の定義域を$D_{\bar{\partial}}^{p,q}$と書く。

$$N_{\bar{\partial}}^{p,q} := \{ f \in L^{p,q}\ ;\ \bar{\partial}f = 0 \}$$

$$R_{\bar{\partial}}^{p,q} := \{ f \in L^{p,q}\ ;\ \exists g \in L^{p,q-1}\ \text{s.t.}\ \bar{\partial}g = f \}$$

$$H_{(2)}^{p,q}(X) := N_{\bar{\partial}}^{p,q} / R_{\bar{\partial}}^{p,q}$$

とおく。$H_{(2)}^{p,q}(X)$をXのds^2に関する(p,q)次L^2 cohomology群という。外微分作用素dに対するr次L^2 cohomology群$H_{(2)}^{r}(X)$の定義も同様。$H_{(2)}^{p,q}(X)$はコンパクト台の(p,q)次cohomology群$H_0^{p,q}(X)$と次の関係にある。(完全列で結ばれる。)

$$\cdots \to H_0^{p,q}(X) \to H_{(2)}^{p,q}(X) \to \lim_{K \subset\subset X} H_{(2)}^{p,q}(X \setminus \overline{K}) \to \cdots$$

ただし$\displaystyle\lim_{K \subset\subset X}$は制限写像系による帰納的極限．$H_{(2)}^{r}(X)$とコンパクト台の$r$次cohomology群$H_0^{r}(X)$にも同様の関係

がある。

注) $H_0^{p,q}(X)$ 或は通常の (p,q) 次 cohomology 群 $H^{p,q}(X)$ の定義は C^∞ 微分形式の範疇で行なうので、準同型 $\varinjlim_{K \Subset X} H_{(2)}^{p,q}(X \setminus K) \longrightarrow H_0^{p,q+1}(X)$ 等に関連して上の完全列について説明を補う必要がある。$L_{loc}^{p,q}$ を X 上の局所二乗可積分な (p,q) 形式全体のなす Frechet 空間とし、

$$N_{\bar\partial, loc}^{p,q} := \{ f \in L_{loc}^{p,q} ;\ \bar\partial f = 0 \}$$

$$R_{\bar\partial, loc}^{p,q} := \{ f \in L_{loc}^{p,q} ;\ \exists g \in L_{loc}^{p,q-1} \text{ s.t. } \bar\partial g = f \}$$

$$H_{loc}^{p,q}(X) := N_{\bar\partial, loc}^{p,q} / R_{\bar\partial, loc}^{p,q}$$

とおくと、Hörmander の定理により任意の Stein 多様体 S に対して

$$\begin{cases} H_{loc}^{p,q}(S) = \{0\} & \forall q \geq 1 \\ H_{loc}^{p,0}(S) = \{ S \text{ 上の正則 } p \text{ 形式} \} \end{cases}$$

であるから、層係数 cohomology の一般論より準同型 $H^{p,q}(X) \longrightarrow H_{loc}^{p,q}(X)$ は全単射である。同様に、$H_0^{p,q}(X)$ も局所二乗可積分形式の範疇で定義したものと一致するので上の完全列は意味をもつわけである。de Rham cohomology $H^r(X)$, $H_0^r(X)$ についても同様である。ただし Hörmander の定理は作用素 d については凸多様体上の消滅定理として読み直す必要がある。([11] 参照) 勿論 Poincaré の補題のよく知られた証明を注意深く読めば済むことではあるが。

よって我々は $H^{p,q}(X)$ を調和化するために、双対空間 $H_0^{n-p,n-q}(X)$ の調和化を経由することにする。ここで双対定理の条件に注意する必要があるが、Malgrange による Serre duality の一

般化によれば、$\dim H^{p,q}(X) < \infty$ ならば $(H^{p,q}(X))^*$ $\cong H_0^{n-p,n-q}(X)$ なので次の例においてはこの論法は正当である。($H^r(X)$ についても同様)

1) $\exists$ コンパクトな複素解析空間 $\overline{X}$ s.t. $\overline{X} \setminus X$ は余次元 k の解析的部分集合。このとき $q < k-1$ なる q に対して $\dim H^{p,q}(X) < \infty$

2) X は k-convex, 即ち $\exists \varphi : X \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ s.t. $\forall c \in \mathbb{R}$, $\varphi^{-1}((-\infty, c)) \Subset X$ & $\exists c_0 \in \mathbb{R}$, $X \setminus \varphi^{-1}((-\infty, c_0))$ 上 $\partial\bar{\partial}\varphi$ は少なくとも $n-k+1$ 個の正固有値をもつ。このとき $q \geq k$ ならば $\dim H^{p,q}(X) < \infty$.

注) 1-convex 多様体は特異点が孤立集合であるような Stein 空間の非特異モデルであり、その上の任意の解析的連接層を係数とする1次以上の cohomology 群が有限次元であるという性質で特徴付けられるので、射影多様体の場合と同じ意味でその"cohomology 的"性質が有用である。k-convex 多様体 ($k \geq 2$) については、その cohomological な特徴付けがなされていないので、Andreotti-Grauert [1] 以後顕著な結果は出ないようである。

よってとりあえず 1) 又は 2) の場合に $\varinjlim_{K \Subset X} H^{p,q}_{(2)}(X \setminus K)$, 或は $\varinjlim_{K \Subset X} H^{r}_{(2)}(X \setminus K)$ の消滅条件は如何という事になる。しかし case 2) については既にまったく異なる方法で満足すべき結果が得られているのでここでは触れないことにする。(cf.[8]) この方針で同じ結果が証明できないわけではない。([12]).

定義　複素解析空間 $\overline{X}$ 上の Hermite 計量とは、$\overline{X}$ の特異点集合の補集合上定義された C^∞ Hermite 計量 ds^2 で、次の意味で $\overline{X}$ 上に延長可能なものをいう。即ち、$\forall p \in \overline{X}$ に対し $\exists$ 近傍 $U \ni p$, $\exists$ 正則な埋めこみ $\tau : U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ $(N \gg 0)$ & $\exists$ $\tau(U)$ の近傍上の C^∞ Hermite 計量 $d\tilde{s}^2$ s.t. $(\tau|_{U \cap X})^* d\tilde{s}^2 = ds^2|_{U \cap X}$. また $\overline{X}$ 上の Hermite 計量 ds^2 について、各点 $p \in \overline{X}$ に対し $d\tilde{s}^2$ として Kähler 計量がとれるとき、ds^2 を $\overline{X}$ 上の Kähler 計量と言うことにする。

注) $\overline{X}$ 上の Hermite 計量 ds^2 が X 上の Kähler 計量なら、ds^2 は上の意味で $\overline{X}$ 上の Kähler 計量と言えるだろうか。これについては筆者は何も知らない。教えて頂ければ幸いである。

定理　$\overline{X}$ をコンパクトな n 次元既約複素解析空間, $\mathrm{Sing}\,\overline{X}$ を $\overline{X}$ の特異点集合, Y を $\mathrm{Sing}\,\overline{X}$ を含む k 次元解析的部分集

合とする。$\overline{X}$ がもし Kähler 計量をもてば、$X := \overline{X} \setminus Y$ 上の完備 Kähler 計量 ds_X^2 が存在して、(X, ds_X^2) に関して $p+q > n+k$ なる範囲で

$$\varinjlim_{K \subset\subset X} H_{(2)}^{p,q}(X \setminus K) = \{0\} .$$

上の場合 $\dim H^{p,q}(X) < \infty$ ($p+q < n-k-1$) が成り立つことを認めると（Andreotti-Grauert の有限性定理）次の系が得られる。

系　定理の条件の下に、$p+q < n-k-1$ の範囲で

$$H^{p,q}(X) \cong H_{(2)}^{p,q}(X).$$

証明についてだが、[6] によれば定理は次の消滅定理の特別な場合として示される。

定理1. (X, ds_X^2) を n 次元完備 Kähler 多様体とする。もし $\exists \varphi : X \xrightarrow{C^\infty} (-\infty, 0]$ s.t. $\varphi^{-1}((c, 0]) \subset\subset X$ $\forall c \in (-\infty, 0)$, & $\exists c_0 \in (-\infty, 0]$ s.t. "$\forall x \in \varphi^{-1}((-\infty, c_0))$ に対し

$$\begin{cases} |\partial\varphi(x)|^2 < \dfrac{1}{12} \\ |\partial\bar\partial\varphi(x)| < 2n \\ \partial\bar\partial\varphi(x) \text{ の固有値 } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \text{ につき、} \\ 1 \leq j \leq n-k \Rightarrow 1-\dfrac{1}{4n} < \lambda_j < 1+\dfrac{1}{4n} \\ n-k < j \leq n \Rightarrow -\dfrac{1}{4n} < \lambda_j . \text{”} \end{cases}$$

ならば

$$\lim_{K \subset\subset X} H^{p,q}_{(2)}(X \setminus K) = \{0\}, \quad {}^\forall p+q > n+k.$$

定理1の条件をみたす完備Kähler計量を構成するには、X上C^∞級の連続関数 $\varphi : \overline{X} \longrightarrow [-\infty, 0]$ で $Y = \{x \in \overline{X} ;\ \varphi(x) = -\infty\}$ をみたすものをうまくとって $ds_X^2 = ds^2 + \partial\bar\partial\varphi$ とおく。$\overline{X} \subset \mathbb{P}^N$ のときは、斉次座標を用いて φ を明示的に与えることも可能である(cf. [9])。定理1の証明には、小平-中野の技法の non-compact & non-Kähler 版を用いる。即ち、完備多様体上の Andreotti-Vesentini の理論及び cohomology 消滅定理を Riesz の補題に帰着させる Hörmander の方法を認めると、定理1は次の命題の系として導くことが可能である。

命題 $(X', ds^2_{X'})$ を n 次元 Hermite 多様体、ω をその基本形式とする。C^∞ 級の (p, q) 形式 u で $\mathrm{supp}\, u \subset\subset X'$ をみたすものについて、荷重関数 $\psi : X' \to \mathbb{R}$ に関する L^2 ノルムを $\|u\|_\psi$ とし (i.e. $\|u\|_\psi^2 := \int_{X'} e^{-\psi}|u|^2 dv$), $\|u\|_\psi$ に関する $\bar\partial$ の adjoint を $\bar\partial_\psi^*$ とする。このとき n にのみ依存する正数 β_n が存在して、もし $\exists F : X' \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0$ s.t., $\partial\bar\partial(F + \psi)$ の固有値 $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots \leq \gamma_n$ に対し

$$\sum_{i=1}^{p} \gamma_i + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$$

$$\geq \beta_n |d\omega|^2 + 3|\partial F|^2 + 2\varepsilon$$

ならば、$\mathrm{supp}\, u \subset\subset X'$ なる任意の C^∞ 級 (p, q) 形式 u に対して

$$\varepsilon \|u\|_\psi^2 \leq \|\bar\partial u\|_\psi^2 + \|\bar\partial_\psi^* u\|_\psi^2$$

が成立する。

証明については [8] を参照して頂きたい。

注) 命題を定理1に応用する場合、$F = \varphi$, $ds^2_{X'} = (A(c-\varphi)^{-2} + 1)ds^2_X + 2A(c-\varphi)^{-3}\partial\varphi\bar\partial\varphi$
$X' := \{x \in X ; \varphi(x) < c\}$, $c < 0$, 等となる。

さて $\lim_{K \subset\subset X} H_{(2)}^r(X \setminus K)$ についてだが、上で紹介した荷重関数つきのL^2理論が外微分作用素 d に関しては全然知られていないので、これに対する消滅定理を直接証明するのは困難である。そこで［6］では次のような方法を採った。$\overline{X}$ の Kähler 性をここでも用いるのである。まず、定理の条件がみたされるとし、ds_X^2 が完備な Kähler 計量であることを用いると、系は特に X 上の Frölicher スペクトル系列（或は Hodge スペクトル系列）の E_1 項が $p+q<n-k-1$ で退化することを示している。従って $r<n-k-1$ ならば

$$(\dagger) \qquad H^r(X) \cong \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(X)$$

である。再び Kähler 性を用いると、この範囲で $H_{(2)}^r(X) \cong \bigoplus_{p+q=r} H_{(2)}^{p,q}(X)$ となるから $H^{p,q}(X) \cong H_{(2)}^{p,q}(X)$ から $H^r(X) \cong H_{(2)}^r(X)$ が従う。

注）$H^r(X) \cong \oplus H^{p,q}(X)$ なる関係は Kähler 性抜きでは考えられない（cf.［14］）。しかし調和化自体は Kähler 性に無縁な現象であるべきで、その意味で上の証明は突っ込み不足である。なお（$\dagger$）については［2］に Deligne-Illusie の方法による別証がある。ベクトル束係数の cohomology 類の調和化については［7］に少し述べてある。

3、交叉(co-) homology　　層状擬多様体(stratified pseudo-manifold)とは、パラコンパクト Hausdorff 位相空間 $\overline{X}$ を始点とする閉集合による降下列

$$\overline{X} = X_n \supset X_{n-2} \supset X_{n-1} \supset \cdots \supset X_0 \supset X_{-1} = \phi$$

で次の性質をもつものを言う。ただしこの性質は n に関する帰納法により定義されるものである。

1) $X_n \setminus X_{n-2}$ は稠密、$X_i \setminus X_{i-1}$ は ϕ (空集合) 又は i 次元の位相多様体

2) $\forall x \in X_i \setminus X_{i-1}$ に対し、$\overline{X} \setminus X_{i-1}$ 内の x の近傍 U で、直積 $(U \cap X_i) \times C(L)$ と同相であるようなものが存在する。ここに

$$L = L_{n-i} \supset L_{n-i-2} \supset \cdots \supset L_0 \supset L_{-1} = \phi$$

はコンパクト $(n-i)$ 次元層状擬多様体であり、

$$C(L) = L \times [0,1) / R.$$

但し R は同値関係で、

$$(x,t)\, R\, (y,s) \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \text{`} x = y \wedge t = s \text{'} \text{ 又は } \text{`} t = s = 0 \text{'}$$

以下 $\overline{X}$ をコンパクト n 次元既約複素解析空間とし、$\overline{X} = X_{(n)} \supset X_{(n-1)} \supset \cdots \supset X_{(0)} \supset X_{-1} = \phi$ を Whitney 条件 B をみ

たす層系列（*stratification*）とする。これは層状擬多様体の一例になっている。

$$C_i(\bar{X}) := \{ (\mathbb{C}\text{係数}) i \text{次元鎖体} \}$$

$$IC_i(\bar{X}) \left(= IC_i(X_{(n)} \supset X_{(n-1)} \supset \cdots \supset X_{(0)} \supset \phi) \right)$$

$$:= \{ \xi \in C_i(\bar{X}) ; \dim |\xi| \cap X_{(n-j)} \leq i-j-1 \text{ かつ } \dim |\partial\xi| \cap X_{(n-j)} \leq i-j-2 \}$$

$$IH_i(\bar{X})$$

$$:= \{ \xi \in IC_i(\bar{X}) ; \partial\xi = 0 \} / \{ \partial\eta ; \eta \in IC_{i+1}(\bar{X}) \}$$

とおく。$IH_i(\bar{X})$は層系列によらぬ$\bar{X}$の位相不変量であることが示されており、$\bar{X}$のi次交叉*homology*群と呼ばれる。交叉*homology*群の顕著な性質としてPoincaré duality：

$$(IH_i(\bar{X}))^* \cong IH_{2n-i}(\bar{X})$$

が知られている。このような良い性質があるので、交叉*homology*には何らかの解析的対応物があると考えるのが自然であろう。Cheeger - Goreski - MacPhersonの予想は、$\bar{X}$上の*Hermite*計量に関して$H^q_{(2)}(\bar{X}) \left(:= H^q_{(2)}(\bar{X} \setminus \mathrm{Sing}\,\bar{X}) \right) \cong IH_{2n-q}(\bar{X})$ であろうというものである。これは

$\dim \overline{X} \leq 2$ の場合には肯定的に解決されている。(cf. [3])

注) $\overline{X}$ 上の Hermite 計量は $\mathrm{Sing}\,\overline{X} \neq \phi$ なる限り完備ではないので、L^2 cohomology の双対性は明白ではないが、知られている範囲では成立しているから不思議である。計量が完備でなければ u が調和形式であっても $*u$ が調和形式であるかどうか分らない。($*$ は Hodge の星作用素。) さらに Laplacian が本質的自己共役かどうかも微妙な問題になってしまう。

C-G-M 予想は $\dim \overline{X} > 2$ の場合、部分的にしか解決されていない。[4] によれば、$\dim \mathrm{Sing}\,\overline{X} = 0$ のとき、$q \neq n$, $q \neq n \pm 1$ に対しては予想は成立する。また残された場合が絶望的に困難だとは誰も思っていないようであるが、まだ解決されていないということはやはりこの問題が一つの challenge たる資格を有しているということになるであろう。所で、$\overline{X}$ 上の計量に関する L^2 cohomology よりも、$X = \overline{X} \setminus \mathrm{Sing}\,\overline{X}$ 上の完備な計量に関する L^2 cohomology の方が、あらかじめ duality が明白なので扱いやすいという利点がある。L. Saper 氏は、$\dim \mathrm{Sing}\,\overline{X} = 0$ の場合、$n = 2$ または $\overline{X}$ の特異点解消における例外集合として非特異負法束のものがとれる場合に $IH_{2n-q}(\overline{X}) \cong H^q_{(2)}(X)$ なる X 上の完備計量の例を与えている。(cf. [13])。また C-G-M 予想をこのように拡大解釈すれば、前節の定理の系、及びその帰結としての同型 $H^r(X) \cong H^r_{(2)}(X)$ を部分的解答と思うこともできよう。

4. 混合Hodge構造の純性　　広中の基本定理より、コンパクトな複素解析空間$\overline{X}$は常に非特異モデルをもつ。従って交叉homology群$IH_q(\overline{X})$を$\overline{X}$の非特異モデル上の諸量を用いて表現することによりその構造を明らかにしようという発想は自然である。特に$\dim \mathrm{Sing}\,\overline{X}=0$ならば

$$IH_{2n-q}(\overline{X}) \cong \begin{cases} H^q(X) & q<n \\ \mathrm{Im}\,(H_0^n(X)\to H^n(X)) & q=n \\ H_0^q(X) & q>n \end{cases}$$

であるから、Deligne-Frölicherスペクトル系列$\Longrightarrow$ $IH_*(\overline{X})$であり、これを上の方法で解析することは実際可能である。

定理2（Navarro Aznar [3']）$\dim \mathrm{Sing}\,\overline{X}=0$、かつ$\overline{X}$はKähler計量をもつと仮定する。このとき、$IH_{2n-q}(\overline{X})$の混合Hodge構造（:=（*）の右辺の混合Hodge構造）は純型（pure）である。

系　上の条件の下で

$$\dim IH_{2q-1}(\overline{X}) \equiv 0 \pmod 2$$

5. L^2理論と混合Hodge理論　周知のように、複素曲面の特異点解消に現われる例外曲線の交叉行列は負定値である。高次元の場合、これに当たる性質は次のようになる。即ち (U, x) を孤立特異点の芽、$\tilde{U} \xrightarrow{\pi} U$ を x における任意の特異点解消とすると、　(注) Uは既約とする。)

定理3.　自然準同型 $H_0^k(\tilde{U}) \longrightarrow H^k(\tilde{U})$ は、$k \geq \dim U$ のとき全射、$k \leq \dim U$ のとき単射である。

証明の概略　Blowing up による特異点解消に対して示せば十分なので最初からそう仮定しておく。必要なら x の近傍 U をより小さなものでおきかえることにより、Uはある射影的代数多様体 Y の開集合であるとしても構わない（M. Artinの定理）。$\mathrm{Sing}\, Y = \{x\}$ としても構わないから、Yの豊富因子 D で $|D| \not\ni x$ なるものをとれば、$Y \setminus D$ 上の C^∞ 級発散関数 φ で、$\forall y \in Y \setminus D \setminus \{x\}$ に対し $\partial\bar{\partial}\varphi(y) > 0$ かつ $\varphi(y) > \varphi(x)$ をみたすものが存在する。$\tilde{U} \longrightarrow U$ に対応する Y の特異点解消を $\tilde{Y}$ とすると、Morse理論より、制限写像 $H^q(\tilde{Y} \setminus D) \rightarrow H^q(\tilde{U})$ は $q \geq \dim U + 1$ のとき全単射、$q = \dim U$ のとき全射である。よって両者の混合Hodge構造を比較して

それらは $q \geq n+1$ ($n := \dim U$) のとき純型であり、全射性より $H^n(\tilde{U})$ の混合Hodge構造は純型であると言える。従って制限写像 $H^q(\tilde{Y}) \longrightarrow H^q(\tilde{U})$ は、$q \geq n$ のとき全射である。$q > n$ ならば $\tilde{Y}$ の q 次 cohomology class は非原始的 (non-primitive) なので、Hodge計量の基本形式 ω を用いて $\omega \wedge \eta$ なる形に書ける。Hodge計量を定める直線束として、$D +$ (例外集合に台をもつ因子) なる形の因子で定まるものをとれば、ω は $Y \setminus D \setminus \{x\}$ 上 d-完全 (d-exact) であり、従って $\omega \wedge \eta$ もそうだから、これで $H_0^q(\tilde{U}) \longrightarrow H^q(\tilde{U})$ の全射性が $q > n$ に対して言えたことになる。次に $q = n$ の場合は $\dim H_0^n(\tilde{U}) = \dim H^n(\tilde{U})$ なので、全射性を言うには単射性を言えばよい。v を $\tilde{U}$ 上定義された台がコンパクトな C^∞ 級閉 n 形式とせよ。仮に、$\tilde{U}$ 上の C^∞ 級 $(n-1)$ 形式 u が存在して $du = v$ であったとする。このとき、先ず v の定める $\tilde{Y}$ 上の cohomology 類が 0 であることを言うために、v_h を $\tilde{Y}$ における v の調和代表元 (調和化) とする。もし $v_h = 0$ が言えれば、上に述べたことから $H_0^n(\tilde{U}) \longrightarrow H^n(\tilde{Y})$ が単射であることが言えているので v は 0 に cohomologuous ということが導かれる訳である。$v_h = 0$ の証明は以下に述べる通りである。

$v_n = 0$ の証明

$$v_h = v_p + \omega \wedge v_n$$

を原始部分 v_p と非原始部分 $\omega \wedge v_n$ への直交分解とすれば，

$$\int_{\tilde{Y}} v_h \wedge \bar{*} v_h = \int_{\tilde{Y}} v \wedge \bar{*} v_h$$

$$= \int_{\tilde{U}} v \wedge \bar{*} v_p + \int_{\tilde{U}} v \wedge \bar{*}(\omega \wedge v_n)$$

$$= \int_{\tilde{U}} v \wedge \bar{*} v_p + \int_{\tilde{U}} v \wedge \omega \wedge w .$$

但し w は或る閉 $(n-2)$ 形式（∵ 原始 r 形式 a に対し、$*(\omega^p \wedge a) = \mathrm{const} \cdot C(\omega^{n-r-p} \wedge a)$ なる一般式がある。ここに C は Weil の作用素 $\sum i^{p-q} \Pi_{p,q}$，ただし $\Pi_{p,q}$ は (p,q) 成分への射影）。ω を前頁のようにとっておけば

$$\int_{\tilde{U}} v \wedge \omega \wedge w = 0 \qquad (\text{容易})$$

$v_p \perp (\omega \wedge v_n)$ だから

$$\int_{\tilde{Y}} v_h \wedge \bar{*} v_h = \int_{\tilde{Y}} v_p \wedge \bar{*} v_p .$$

$\therefore \quad \omega \wedge v_h = 0.$

v_p は調和形式だから $\partial v_p = \bar{\partial} v_p = 0$。 従って、例外集合 E が正規交叉因子であるように予め特異点解消 $\tilde{U}$ を選んでおくと、E 上の Deligne スペクトル系列が C と同伴的 (compatible) なことに注意すると $v_p | \tilde{U}$ の d-完全性から $Cv_p | \tilde{U}$ の d-完全性が導かれる。従って

$$\int_{\tilde{U}} v \wedge \overline{Cv_p} = 0.$$

よって

$$\int_{\tilde{Y}} v_h \wedge \bar{*} v_h = \int_{\tilde{U}} v \wedge \bar{*} v_p = \mathrm{const} \int_{\tilde{U}} v \wedge \overline{Cv_p}$$

$= 0 \qquad \therefore \quad v_h = 0. \qquad$ q.e.d.

References

[1] Andreotti,A.and Grauert,H., Bull.Soc.Math.France,90,193-259 (1962)

[2] Kosarew,S. and Bauer,I., Schriftenreihe SFB Göttingen 49 (1988)

[3] Nagase,M., J.Math.Soc.Japan 41,97-116 (1989)

[3'] Navarro Aznar,V., Astérisque 130,272-307 (1985)

[4] Ohsawa,T., Publ.RIMS 23,265-274 (1987)

[6] _______, Publ.RIMS 23,613-625 (1987)

[7] _______, Publ.RIMS 23,881894 (1987)

[8] _______, Math.Z. 197,1-12 (1988) (joint with K.Takegoshi)

[9] _______, 数理研講究録 639,130-140 (1988)

[10] _______, Publ.RIMS 24,253-263 (1988)

[11] _______, Preprint

[12] _______, in preparation

[13] Saper,L., Invent.math. 82,207-255 (1985)

[14] Pittie,H.V., Bull.AMS,19-22 (1989)