数理解析研究所講究録
第 693 巻 1989 年 69-79

Complex analytic singular foliations

北大理 諏訪 立雄 (Tatsuo Suwa)

本論は [4], [6], [7] の概要である. 以下 X を連結な n 次元複素多様体とし, $\mathcal{O}_X$, Θ_X, Ω_X をそれぞれ X 上の正則関数, 正則ベクトル場, 正則 1 形式の芽の層とする.

§1. 複素解析的特異葉層構造.

一般に連接 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{S}$ に対し

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{S}) = \{x \in X \mid \mathcal{S}_x \text{ は } \mathcal{O}_{X,x}\text{-自由でない}\}$$

とおく. これは X の解析的集合である. $\mathrm{rank}\,\mathcal{S}$ を局所自由層 $\mathcal{S}|X - \mathrm{Sing}(\mathcal{S})$ の階数として定義する.

まずベクトル場を用いて特異葉層構造を定義する. 層 Θ_X の連接 $\mathcal{O}_X$-部分加群 E に対して, $\Theta_E = \Theta_X/E$, $S(E) = \mathrm{Sing}(\Theta_E)$ とおく. $S(E)$ は $\mathrm{Sing}(E)$ を部分集合として含み, 具体的には次のように表わされる. 小さな座標近傍 U 上の E の生成元 $v_1, \cdots, v_r$ をとり, U 上の局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ を用い

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad i = 1, \cdots, r$$

と表わしておくと,

$$U \cap S(E) = \{x \in U \mid \mathrm{rank}\,(f_{ij}(x)) \text{ が極大でない}\}$$

となる。

<u>定義(1.1).</u> X 上の(ベクトル場による)特異葉層構造とは、Θ_X の連接部分 $\mathcal{O}_X$-加群 E で積分可能条件

(*) $\qquad [E_x, E_x] \subset E_x, \qquad x \in X - S(E)$

をみたすもの。E が reduced であるとは、E が Θ_X の中で full つまり、X の任意の開集合 U に対し

$$\Gamma(U, \Theta_X) \cap \Gamma(U - S(E), E) = \Gamma(U, E)$$

であることをいう。

<u>注意(1.2).</u> 1°. $p = \mathrm{rank}\, E$ とすると上の E は $X - S(E)$ 上 p 次元の非特異葉層構造を定義する。

2°. E が reduced ならば (*) は X のすべての点で成りたつ。

次に1形式を用いて特異葉層構造を定義する。層 Ω_X の連接部分 $\mathcal{O}_X$-加群 F に対し、$\Omega_F = \Omega_X / F$, $S(F) = \mathrm{Sing}(\Omega_F)$ $(\supset \mathrm{Sing}(F))$ とおく。$S(F)$ の具体的表示はベクトル場のときと同様である。

<u>定義(1.3).</u> X 上の(1形式による)特異葉層構造とは、Ω_X の連接部分 $\mathcal{O}_X$-加群 F で積分可能条件

$$dF_x \subset (\Omega_X \wedge F)_x \quad , \quad x \in X - S(F)$$

をみたすもの。Fが reduced であるとは，FがΩ_Xの中で full であることをいう．

注意(1.4). $q = \operatorname{rank} F$ とすると上のFは $X - S(F)$ 上余次元 q の非特異葉層構造を定義する．

定義(1.1)と(1.3)は次のように関係する．次元pの特異葉層構造Eが与えられたとき，FをEの annihilator E^a とする．つまり

$$F_x = \{\omega \in \Omega_{X,x} \mid \langle v, \omega \rangle = 0 \quad , \quad {}^\forall v \in E_x\}$$

とすると，Fは余次元 $q = n - p$ の reduced な特異葉層構造で，$S(F) \subset S(E)$ である．逆に，余次元qの特異葉層構造Fが与えられたとき，EをFの annihilator F^a とすると，Eは次元 $p = n - q$ の reduced な葉層構造で，$S(E) \subset S(F)$ である．E又はFが与えられたとき，$(E^a)^a$ 又は $(F^a)^a$ をE又はFの reduction という．以後 reduced な葉層構造のみを考えるので定義(1.1)と定義(1.3)とは同値である．

§2. 特異点集合の構造

EをX上の reduced なp次元葉層構造とし，$F = E^a$ とお

く，X の各点 x に対し

$$E(x) = \{ v(x) \mid v \in E_x \}$$

とすると，これは x における X の接空間 $T_x X$ の部分ベクトル空間となる．$0 \leq k \leq p$ なる各整数 k に対し

$$S^{(k)} = \{ x \in X \mid \dim E(x) \leq p - k \}$$

とおくと，X の解析的集合の列

$$S^{(0)} \supset S^{(1)} \supset S^{(2)} \supset \cdots \supset S^{(p)}$$

を得る．$S^{(0)} = X$ で，$S^{(1)} = S(E)$ が E の特異点集合である．

一般に X の解析的集合 S の $x \in S$ における tangent cone を $C_x S$ で表わす．x が S の regular な点なら $C_x S = T_x S$ である．

<u>定理 (2.1)</u> (Tangency lemma). $0 \leq k \leq p$ なる任意の k と $S^{(k)}$ の任意の点 x に対し

$$E(x) \subset C_x S^{(k)}.$$

<u>注意 (2.2)</u>. $k=1$ で x が $S^{(1)}$ の regular な点のとき上の定理は P. Baum [2] によって証明されている．

定理 (2.1) の証明には次が key となる．

補題(2.3). $v \in E_x$ とし，$\{\varphi_t\}$, $\varphi_t = \exp tv$, をvで生成される1パラメタ局所変換群とすると

$$(\varphi_t)_* E_x = E_{\varphi_t(x)}$$

が0に近いすべてのtに対し成りたつ．つまりvはEの1パラメタ局所自己同型群をひきおこす．

定理(2.1)は次のように refine されている．

定理(2.4)(Mitera [4]). $0 \leq k \leq p$ なる任意のkに対し，$\mathcal{S}^{(k)} = \{S_\alpha\}$ を $S^{(k)}$ の自然な Whitney stratification とすると，任意の $S_\alpha \in \mathcal{S}^{(k)}$ と $x \in S_\alpha$ に対し

$$E(x) \subset T_x S_\alpha .$$

系(2.5). 各kに対し，$\mathcal{S}^{(k)}$を(2.4)と同様とすると，任意の $S_\alpha \in \mathcal{S}^{(k)}$ に対し E は $S_\alpha - S^{(k+1)}$ 上 $p-k$ 次元非特異葉層構造をひきおこす．

系(2.6). Xの複素部分多様体の族$\mathcal{L}$で次をみたすものが存在する．

(a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, $L_1 \neq L_2$ ならば $L_1 \cap L_2 = \phi$

(b) $X = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L$

(c) 任意の $L \in \mathcal{L}$ と $x \in L$ に対し $E(x) = T_x L$.

以上のことを用いると E の局所的構造に関し次が成りたつ

<u>定理(2.7)</u>. (Mitera [4]). x を $S^{(k)} - S^{(k+1)}$ の点とし(従って $\dim E(x) = p - k$), D を $T_x X$ 内で $E(x)$ に横断的な $n-p+k$ 次元小円板とすると, D 上の k 次元特異葉層構造 E' ($E'(0)=0$) および x の X 内の近傍 U が存在し, $E|U$ は U から D への submersion による E' のひきもどしに同型である.

<u>注意(2.8)</u>. $k=1$ で x が $S^{(1)}$ の regular な点の場合, この定理は P. Baum [2] による.

定理(2.7)は特異葉層構造の解析的な局所自明性に関するものであるが, 位相的局所自明性に関しては次のようなことが考えられる. つまり葉層構造は写像の一般化とみることが出来るので, いわば "third isotopy lemma" はいつ成りたつかという問題である. X の stratification $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}$ が次をみたすとき $\mathcal{S}$ を特異葉層構造 E の stratification と呼ぶことにする.

(2.9) E は各 S_α 上非特異葉層構造をひきおこす. つまり

S_α 上には非特異葉層構造が存在し，各 $x \in S_\alpha$ に対し L を x を通る葉とすると $E(x) = T_x L$．

E の stratification $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}$ に対し，次のような regularity 条件が考えられる：

(a_E) $x_0 \in S_\alpha \subset \overline{S_\beta}$，$\{x_i\}$ が S_β の点列で $x_i \to x_0$，$E(x_i) \to T$ ならば $E(x_0) \subset T$．

(w_E) X の任意の点 x_0 に対し，x_0 の近傍 U と定数 C が存在し，$S_\alpha \cap U$ の任意の点 x と $S_\beta \cap U$ の任意の点 y について $d(E(y), E(x)) < C|y-x|$．ここで，U は適当な複素ユークリッド空間の開集合とみて，$d(E(y), E(x))$ は２つの線型部分空間の距離である．

もちろん (w_E) は (a_E) より強く，(a_E) は常に成りたっている．(w_E)-条件があれば，各 stratum に沿っての局所位相的自明性が出るのではないかと思われる．これに関し，Kabila による余次元1，局所葉層構造で特異点集合が非特異の場合の研究がある（[3]）．

§3．特異葉層構造に付随した $\mathcal{D}_X$-加群

$\mathcal{D}_X$ を X 上の正則関数係数線型微分作用素の芽のなす層とする．X 上の p 次元特異葉層構造 E に対し，$\mathcal{D}_X E$ を E で生

成される$\mathcal{D}_X$の左ideal層とし，左$\mathcal{D}_X$-加群$\mathcal{D}_E = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X E$を考える．$(\mathcal{D}_k)_{k\geq 0}$を微分作用素の階数による$\mathcal{D}_X$の自然なfiltrationとすると$\mathcal{D}_X E$は$(\mathcal{D}_X E)_k = \mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_X E$でfilterされ，$\mathcal{D}_E$は$(\mathcal{D}_E)_k = \mathcal{D}_k/(\mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_X E)$でfilterされる．$\mathcal{D}_E$の特性多様体$\mathrm{Char}\,\mathcal{D}_E$は$\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X E$のradical $\sqrt{\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X E}$で定義される$T^*X$の部分解析空間である．$(U, x_1, \cdots, x_n)$を$X - S(E)$内の$E$のflat chartとする．つまり$U$は$X - S(E)$内の$(x_1, \cdots, x_n)$を座標とする座標近傍で，$U$上$E$は$\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_p}$で生成されるとする．$\xi_i = \sigma(\frac{\partial}{\partial x_i})$を$\frac{\partial}{\partial x_i}$のprincipal symbolとすると，$\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X E|_{\pi^{-1}U}$は$\xi_1, \cdots, \xi_p$で生成される．従って$\mathrm{Char}\,\mathcal{D}_E \cap \pi^{-1}(X - S(E))$は$\pi^{-1}(X - S(E))$の余次元$p$の部分多様体であることが分る．

<u>定義(3.1)</u>．Eがregularであるとは，Xの各点xに対し，E_xの生成元$v_1, \cdots, v_r$で，$\sigma(v_1), \cdots, \sigma(v_r)$が$\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_{X,x}$のregular sequenceとなるものが存在すること．

<u>注意(3.2)</u>．1°．Eがregularなら，Eは局所自由で$r = p$．
2°．Eが局所自由で$p \leq 2$ならEはregularである．

Eに属する微分作用素のprincipal symbolで生成され

る $gr\mathcal{D}_X$ の ideal 層を $\sigma(E)$ とし, $V(E)$ を $\sqrt{\sigma(E)}$ で定義される T^*X の部分解析空間とする. $V(E)$ を E の特性多様体と呼ぶことにする. 一般には $gr\mathcal{D}_X E \supset \sigma(E)$ であるので $\mathrm{Char}\,\mathcal{D}_E \subset V(E)$ である.

<u>定理(3.3).</u> E を p 次元 regular 特異葉層構造とすると $gr\mathcal{D}_X E = \sigma(E)$. 従って $\mathrm{Char}\,\mathcal{D}_E = V(E)$ で, これは T^*X の余次元 p の局所的完全交叉.

$\mathcal{L}$ を系(2.6)の通りとすると

$$V(E) = \bigcup_{L\in\mathcal{L}} T^*_X L, \qquad T^*_X L \text{ は } L \text{ の conormal 束}$$

と表わせるので, $\mathcal{S}(E)$ の構造から $V(E)$ の構造が分り, E が regular の場合は $\mathrm{Char}\,\mathcal{D}_E$ の構造も分る. なお $\mathrm{Char}\,\mathcal{D}_E$ 又は $V(E)$ 上には $\sqrt{gr\mathcal{D}_X E}$ 又は $\sqrt{\sigma(E)}$ に属する関数の Hamiltonian ベクトル場によって定義される葉層構造があり, これは X 上の葉層構造 E を lift するものである.

$\mathcal{D}_E$ の解複体 $Sol\,\mathcal{D}_E = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_E, \mathcal{O}_X)$ については次の"大域的指数定理"がある.

<u>定理(3.4).</u> X が compact のとき,

$$\chi(R\Gamma(X, Sol\, \mathcal{D}_E)) = (-1)^n \int_X ch(Li^* gr\, \mathcal{D}_E)\, td(T^*X).$$

ここで左辺は $Sol\, \mathcal{D}_E$ の hypercohomology の Euler-Poincaré 指標, $i: X \to T^*X$ は X の T^*X の 0 section としての埋め込み, Li^* は functor i^* の左導来 functor である.

特に E が regular のとき, (3.4) の右辺は

$$\int_X td(\Theta_E)\, c_p(E)$$

となる. $Sol\, \mathcal{D}_E$ に関する他の結果については [7] を参照.

$Sol\, \mathcal{D}_E$ の局所的性質を調べるのが今後の課題であり, そのためには $S(E)$, $Char\, \mathcal{D}_E$ の構造が必要となる.

References

[1] P. Baum and R. Bott, Singularities of holomorphic foliations, J. Differential Geom. 7 (1972) 279-342.

[2] P. Baum, Structure of foliation singularities, Adv. in Math., 15 (1975), 361-374.

[3] A. Kabila, Formes intégrables à singularités

lisses, Thèse, Université de Dijon 1983.

[4] 三寺芳樹, 複素解析的多様体上の特異点を持つ葉層構造の構造について, 北海道大学 修士論文 1989.

[5] T. Suwa, Unfoldings of complex analytic foliations with singularities, Japan. J. Math. 9(1983), 181-206.

[6] T. Suwa, Structure of the singular set of a complex analytic foliation, preprint.

[7] T. Suwa, $\mathcal{D}$-modules associated to complex analytic singular foliations, preprint.