数理解析研究所講究録
第 693 巻 1989 年 119-137

Abelian l-adic representations associated with Selberg integrals II.

東京大学理学部　織田孝幸
(Takayuki ODA)

§§0.A　Euler の積分, あるいは Beta 関数

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad (\mathrm{Re}\,\alpha>0,\ \mathrm{Re}\,\beta>0)$$

は次のような有限体上の類似物をもつ。

p を素数とし, $q=p^f$ (f は自然数) とし, $\mathbb{F}_q$ を q 個の元からなる有限体, $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\mathbb{F}_q$ から $\mathbb{C}^\times$ への乗法的指標とするとき,

$$J(\chi_1,\chi_2) = \sum_{m\in\mathbb{F}_q} \chi_1(m)\,\chi_2(1-m) \qquad (\text{但し } \chi_i(0)=0)$$

は Jacobi の和と呼ばれる。これは Gauss の和

$$G(\chi;\psi) = -\sum_{m\in\mathbb{F}_q} \chi(m)\,\psi(m)$$

($\psi : \mathbb{F}_q \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times$ は $\mathbb{F}_q$ の nontrivial additive character)

によって

$$(-1)\,J(\chi_1,\chi_2) = \frac{G(\chi_1;\psi)\,G(\chi_2;\psi)}{G(\chi_1\chi_2;\psi)} \qquad (\text{但し } \chi_1\neq 1,\ \chi_2\neq 1)$$

と表わされる。

この和は $q\equiv 1 \mod n$ のとき, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の Fermat 曲線

$$X^n + Y^n = 1$$

の合同 zeta 関数の根として現われ，円分体 $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/n))$ 上の Fermat 曲線 $X^n+Y^n=1$ の abelian l進表現に対応する Hecke 指標（A^0 型の量指標）に対応することはよく知られている。（cf. [W-1], [W-2], [D-1].）

さて，Selberg は1944年に，上のような積分の類似物として次のような積分公式を示した。

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 (u_1u_2\cdots u_N)^{\alpha-1}\{(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_N)\}^{\beta-1}|\Delta(u)|^{2\gamma}du_1\cdots du_N$$

$$=\prod_{\nu=1}^{N}\frac{\Gamma(\nu\gamma+1)\Gamma(\alpha+(\nu-1)\gamma)\Gamma(\beta+(\nu-1)\gamma)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha+\beta+(N+\nu-2)\gamma)}$$

（cf. [S-1]）

この積分は Tsuchiya - Kanie [T-K] の conformal field theory である役割を果す。また Aomoto [A-1] は de Rham cohomology の context でこういう積分の現われる理由をさぐっている。

さて，1980年ごろ Evans [E-1] はこの積分の有限体上の類似物を定義し，それを Gauss の和で書き表わす，上の Γ に積分の表示の類似の式を予想し，$N=2$ のときに初等的に証明した。以下この予想を簡単に説明しよう。

§0.B. Selberg の和と Evans の予想.

N を自然数とする。N 次元の Selberg 和は次のように定義さ

れる。pを奇素数とし，$q=p^f$，$\mathbb{F}_q$をq個の元からなる有限体とする。$\phi:\mathbb{F}_q^\times\longrightarrow\mathbb{C}^\times$で$\mathbb{F}_q$の乗法的な指標で位数2の唯一の指標を表わす。$\phi$が$q$に依存していることを特に示すとき$\phi=\phi_q$と書く。

<u>定義</u> (0.1)　χ_1,χ_2,χ_3を$\mathbb{F}_q^\times$の指標とし，$\chi_i(0)=0$とおく。($i=0,1,$ or 2)。このとき，χ_1,χ_2,χ_3に対するN次元のSelberg和を

$$S_q^N(\chi_1,\chi_2,\chi_3\phi)=\sum_{\substack{F\in\mathbb{F}_q[T]\\ N=\deg F,\ F\text{ は monic}}}\chi_1((-1)^N F(0))\,\chi_2(F(1))\,\chi_3\phi(D_F)$$

で定義する。

但し，ここでFは次数Nの$\mathbb{F}_q$係数のモニックな多項式を動きD_FはFの判別式とする。$N=1$のとき$D_F=1$と定義する。$N=1$のときは明らかにJacobi和と一致する。

上の形ではSelberg積分との類似が見にくいので少し説明する。

$$F(T)=\prod_{i=1}^N(T-\mu_i)\qquad(\mu_i\in\overline{\mathbb{F}_q})\text{ とする。すると}$$

$$(-1)^N F(0)=\mu_1\mu_2\cdots\mu_N,\qquad F(1)=(1-\mu_1)(1-\mu_2)\cdots(1-\mu_N),$$

$$D_F=\prod_{i<j}(\mu_i-\mu_j)^2,$$

となりSelberg積分と同じ形であるのがわかる。

Evansは論文[E-1]で上の和を定義し次の予想をした。

<u>予想</u>(0-2)　$\chi_1\chi_2\chi_3^{N-1+j} \neq 1$ が $0 \leqq j \leqq N-1$ となる j すべてについて成立すれば,

$$(-1)^N S_q^N(\chi_1,\chi_2\chi_3\phi) = \prod_{j=0}^{N-1} \frac{G(\chi_3^{j+1},\psi)\,G(\chi_1\chi_3^{j},\psi)\,G(\chi_2\chi_3^{j},\psi)}{G(\chi_3,\psi)\,G(\chi_1\chi_2\chi_3^{N-1+j},\psi)}$$

が成立する。

[E-1]では上の予想は $N=2$ のとき初等的な方法で示されたが $N \geqq 3$ では,特別な場合しか示されていないようである。(cf. [E-2])。

上の予想が正しければその系として次がいえる。

<u>予想</u>(0-3).　(0.2)と同じ仮定のもとで,

(i)　$\left| S_q^N(\chi_1,\chi_2,\chi_3\phi) \right| = q^{\frac{N}{2}}$

(ii)　m を自然数とし,　$\chi_i^{(m)} = \chi_i \circ N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}$ とする。ただし,ここで, $N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q} : \mathbb{F}_{q^m}^\times \to \mathbb{F}_q^\times$ はノルム写像。このとき

$$(-1)^N S_{q^m}(\chi_1^{(m)},\chi_2^{(m)},\chi_3^{(m)}\circ\phi_m) = \{(-1)^N S_q(\chi_1,\chi_2,\chi_3\phi)\}^m.$$

このノートの目的は予想(0-3)を示すことにある。すなわち

<u>定理</u>(0-4),　χ_1,χ_2,χ_3 についてもう少し強い仮定のもとで予想(0-3)は成立する。

証明の方針は円分体上定義されたN次元代数多様体のN次元 étale cohomology group に一次元の部分空間を構成し，そうして得られる abelian l-adic 表現の p に於ける Frobenius element の像が丁度求める $(-1)^N S_q^N(\chi_1,\chi_2,\chi_3\phi)$ になることを示す。すると (i) は Deligne の（Weil 予想に関する）定理から，(ii) は l進表現が一次元であることがわかる。

注意. 予想が正しければ，$(-1)^N Sq^N(\chi_1,\chi_2,\chi_3\phi)$ は χ_i が global なものから来ているとき，Jacobi の和のときと同様に A_0 型の量指標に対応していることがわかる。

N＝2 のときは既に [O-1] に結果をまとめて発表した。

以下N次元射影空間 $\mathbb{P}^N$ のある Kummer covering を考え，それの étale cohomology group のある subspace として一次元の l進表現をつくる。途中から de Rham 版である Tsuchiya-Kanie の構成（Selberg 積分の場合）と全く同様の議論になる。

§1. Kummer 拡大体.

n を自然数とする。k を標数が n と素な体で 1 の原始 n 乗根 $\sqrt[n]{1}$ を含むものとする。$u_1,\cdots,u_N$ を k 上独立な N 個の変数と

し，k上の有理関数体 $K_1 = k(u_1, u_2, \cdots, u_N)$ を考える。体K_1のアーベル拡大体K_Nを

$$K_N = K_1(\sqrt[n]{\alpha_i}, \sqrt[n]{1-u_i}, \sqrt[n]{u_i-u_j} \quad (1 \leqq i, j \leqq N))$$

で定める。K_N/K_1 は Kummer 拡大でその Galois 群 $Gal(K_N/K_1)$ を A と書くと，A は $\mu_n^{\oplus \frac{1}{2}N(N+3)}$ に同型である。但しμ_nはkの中の1のn乗根のなす群とする。

さてK_1のk上の model として，N次元射影空間$\mathbb{P}^N$をとる。そしてK_Nの model として，$\mathbb{P}^N$のK_Nに於る正規閉包をとる。すると$Y_n' \longrightarrow \mathbb{P}^N$という拡大$K_N/K_1$に対応する finite flat morphism を得る。Y_n'は normal であるが，smooth でないので，少々具合が悪い。そこで，2次元でやったときのように，$\mathbb{P}^N$を blow-up して$\hat{\mathbb{P}}^N$を定義し，それの正規閉包Y_nで，Y_nは smooth で$Y_n \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$が finite flat となるものを次の節で考える。

§2. Terada model.

Appell の超幾何関数の monodromy の問題と関連して，Terada [T-1] は$\mathbb{P}^N$の blow up を構成した。この構成の特別な場合を以下に復習しよう。§2 の結果はすべて[T-1]にある。

まず$N+2$個の数字からなる集合$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \cdots, N, N+1\}$を考える。$\mathcal{N}$の巾集合$\mathfrak{P}(\mathcal{N})$の部分集合$\mathfrak{N}$を

$$\mathfrak{N} = \{ I \mid I \subset \mathcal{N}, \# I \geqq 2 \}$$

で定める。$\mathfrak{N}$ の各元 I に対し #I−2 次元の射影空間 $\mathbb{P}_I$ を次のように定義する。(#I=2 のとき $\mathbb{P}_I$ は点である。)

いま #I 次元の affine 空間 $\mathbb{A}^I$ を考え、その点の座標を $(x_{I,i})_{i\in I}$ と書く。このとき $\mathbb{A}^I$ の2点に同値関係を

$$(x_{I,i})_{i\in I} \sim (y_{I,i})_{i\in I} \iff \begin{cases} \exists a \in k^\times,\ \exists b \in k,\ \text{s.t.} \\ y_{I,i} = a\, x_{I,i} + b \quad (\forall i \in I) \end{cases}$$

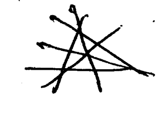
で定める。$\mathbb{A}^I$ から対角集合 $\Delta(\mathbb{A}_1)$ を除いた残りを上の同値関係で割って quotient をつくれば、それは (#I−2) 次元の射影空間 $\mathbb{P}_I$ となる。座標 $(x_{I,i})_{i\in I}$ を $\mathbb{P}_I$ の homogeneous coordinates with displacement という。

記号. $x_I(i,j) = x_{I,i} - x_{I,j}$ $(i,j \in I,\ i \neq j)$ と定める。

さて $\mathbb{P}_I$ たちの積 $\prod_{I\in\mathfrak{N}} \mathbb{P}_I \ni ((x_{I,i})_{i\in I})_{I\in\mathfrak{N}}$ に次の関係式で閉部分多様体 $\hat{\mathbb{P}}^N$ を定める。

$$\hat{\mathbb{P}}^N = \left\{ \hat{x} = ((x_{I,i})_{i\in I})_{I\in\mathfrak{N}} \;\middle|\; x_I(i,k)\, x_J(j,k) = x_I(j,k)\, x_J(i,k),\ \forall I \subset \forall J \in \mathfrak{N},\ \forall i,j,k \in I \right\}.$$

命題(2.1) $\hat{\mathbb{P}}^N$ は N 次元 smooth scheme over $\mathbb{Z}$.

例. $N=2$ のとき $\hat{\mathbb{P}}^N$ は $\mathbb{P}^2$ の line configuration  の4つの3重点での blow-up に外ならない。

各 $I \in \mathfrak{N} - \{N\}$ に対して $\hat{\mathbb{P}}^N$ の開部分scheme を

$$D_I = \{ \bigcap_{I \subsetneq J \in \mathfrak{N}} \bigcap_{i,j \in I} \{ \hat{x} \in \hat{\mathbb{P}}^N \mid x_J(i,j) = 0 \}$$

で定める。

命題 (2.2) 各 D_I は $\hat{\mathbb{P}}^N$ の irreducible smooth divisor.

$\hat{x} \in \hat{\mathbb{P}}^N$ に対して, $\mathcal{L}_{\hat{x}}$ を

$$\mathcal{L}_{\hat{x}} = \{ I \in \mathfrak{N} \mid \hat{x} \in D_I \}$$

とおくと, $\mathcal{L}_{\hat{x}}$ は次の(AR)条件をみたす.

Lemma ((AR)条件) $I, J \in \mathcal{L}_{\hat{x}}$ ならば, $I \cap J = \phi$, または $I \subset J$, または $I \supset J$.

さて次が成立する.

命題 (2.3). (i) $D_{I_1} \cap D_{I_2} \cap \cdots \cap D_{I_k} \neq \phi \Leftrightarrow \mathcal{L} = \{I_1, I_2, \ldots, I_k\}$ が(AR)条件をみたす.

(ii) $\hat{D} = \bigcup_{I \in \mathfrak{N} - \{N\}} D_I$ は $\hat{\mathbb{P}}^N$ の divisor with normal crossing.

以上によって $\hat{\mathbb{P}}^N$ の stratification を次のように定める。

◎ stratification of $\hat{\mathbb{P}}^N$.

記号. $\mathfrak{N}$ の巾集合 $\mathfrak{P}(\mathfrak{N})$ の集合集合 Σ を

$$\Sigma = \{ \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subset \mathfrak{N},\ \underset{N \in \mathcal{L}}{\mathcal{L}\text{ は (AR) 条件をみたす}} \}$$

で定める.

定義. 各 $\mathcal{L} \in \Sigma$ に対し, $F_{\mathcal{L}} = \bigcap_{I \in \mathcal{L} - \{N\}} D_I$ (特に $\mathcal{L} = \{N\}$ のとき, $F_{\mathcal{L}} = \hat{\mathbb{P}}^N$) と定め, $F_{\mathcal{L}}^{\circ}$ を

$$F_{\mathcal{L}}^{\circ} = F_{\mathcal{L}} - \bigcup_{\substack{\mathcal{L}' \in \Sigma \\ \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}'}} F_{\mathcal{L}'}$$

と定める。

命題(2, 4) (i) 各 $\mathcal{L}\in\Sigma$ に対し $F^{\circ}_{\mathcal{L}}$ は codimension $\#\mathcal{L}-1$ の $\hat{\mathbb{P}}^N$ locally closed subscheme.

(ii)
$$\hat{\mathbb{P}}^N = \bigcup_{\mathcal{L}\in\Sigma} F^{\circ}_{\mathcal{L}} \qquad (\text{disjoint}).$$

例. $N=2$, $F^{\circ}_{\{N\}} \cong \mathbb{P}^2 - \{\cancel{\ast}\}$, $F^{\circ}_{\{I,N\}} \cong \mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ ($\forall I\in\mathfrak{N}-$ $I\neq\{N\}$), $\underset{I\subsetneq J}{F^{\circ}_{\{I,J,N\}}} \cong$ 1点.

注意. $\hat{\mathbb{P}}^N - \bigcup_{\substack{I\in\mathfrak{N}\\ I\neq\{N\}}} D_I$ は次の scheme と自然に同型である。

$$U_N = PGL(1)\backslash F_{0,N+3}\mathbb{P}^1.$$

ここで $F_{0,N+3}\mathbb{P}^1$ は $(\mathbb{P}^1)^{N+3}$ の open subscheme

$$\{(z_1,\cdots,z_{N+3})\in(\mathbb{P}^1)^{N+3} \mid z_i\neq z_j,\ \text{if } i\neq j\},$$

で $PGL(1)$ は $F_{0,N+3}\mathbb{P}^1$ に diagonally に作用する。

$N+3$ 次対称群 S_{N+3} は U_N に自然に作用し $N\geqq 2$ ならばその作用は effective で ($N=1$ のとき $S_4/V_4\cong S_3$ を通して分解する…), この作用は $\hat{\mathbb{P}}^N$ に双正則に延長でき, 上の divisor configuration は完全に S_{N+3}-対称である。この対称性をもっと見易くするには D_I の index I を次のように変えればよい。$\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ とする。$\#I < \frac{N+3}{2}$ のとき $\tilde{I}=I$, $\#I > \frac{N+3}{2}$ のとき, $\tilde{I}=\mathbb{N}_\infty - I$ とおく。$\#I = \frac{N+3}{2}$ のとき, $\tilde{I}$ は I と $\mathbb{N}_\infty - I$ の組みを表わすと

する。こうして D_I も $D_{\tilde{I}}$ と書き直せば、$D_{\tilde{I}}$ は S_{N+3} に対して対称になっているのは明らかとなる。

$\# I \leqq \frac{N+3}{2}$ は $(\mathbb{P}^1)^{N+3}$ の $\mathcal{O}(2)$ に関する stability の条件で、実は $\hat{\mathbb{P}}^N$ から $PGL(1)\backslash(\mathbb{P}^1)^{N+3}_{sst}$ に自然な写像がある。

§3. Kummer 被覆とその分岐。

$k = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{-1})$ とおく。

定義 Y_n を $\hat{\mathbb{P}}^N/\mathbb{Z}$ の K_N/K_1 に関する normal closure とする。

命題 (3.1) Y_n は $\mathbb{Z}[\sqrt[n]{-1}, \frac{1}{n}]$ の smooth proper scheme である。

$A = \mathrm{Gal}(Y_n/\hat{\mathbb{P}}^N)$ とおく。Finite flat morphism $f: Y_n \to \hat{\mathbb{P}}^N$ の分岐を記述するため、A を次のように書く。

$\mathfrak{N}$ の部分集合 $\mathfrak{N}_2$ を $\mathfrak{N}_2 = \{I \in \mathfrak{N} \mid \# I = 2\}$ で定める。

$\Delta: \mu_n \longrightarrow \mu_n^{\oplus \mathfrak{N}_2}$ を対角写像とし、$A \cong \mu_n^{\oplus \mathfrak{N}_2}/\mu_n$ という同型を以下のように定める。$(X_i)_{i \in N}$ を $\mathbb{P}_N$ の homogeneous coordinates with displacement とし、$X(i,j) = X_i - X_j$ とする。$\sigma \in A$ に対し

$$\sigma\left(\sqrt[n]{\frac{X(i,j)}{X(k,l)}}\right) = \frac{\zeta_{ij}}{\zeta_{kl}} \sqrt[n]{\frac{X(i,j)}{X(k,l)}} \qquad (\zeta_{ij}, \zeta_{kl} \in \mu_n)$$

で $\mu_n^{\oplus \mathfrak{N}_2}$ の元 $(\zeta_{ij})_{\{i,j\} \in \mathfrak{N}_2}$ が定まる。$(\zeta_{ij})_{\{i,j\} \in \mathfrak{N}_2}$ は mod μ_n で定まる。よって $A \cong \mu_n^{\oplus \mathfrak{N}_2}/\mu_n$。$\# \mathfrak{N}_2 = \binom{N+2}{2}$。

よって $A \cong \mu_n^{\frac{1}{2}N(N+3)}$.

Terada model は各点の local coordinates も自然なものを explicit に構成できる。これをつかって $f: Y_n \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$ の分岐群は

以下のように記述される。

各 $I\in\mathfrak{N}_2$ に対して，$\tilde{\varphi}_I:\mu_n\longrightarrow\mu_n^{\oplus\mathfrak{N}_2}$ を $\zeta\in\mu_n$ に対し $\tilde{\varphi}_I(\zeta)$ は I-成分が ζ で他の $J\in\mathfrak{N}_2\,(J\neq I)$ に対して，J-成分は 1 となるように定義する。$\varphi_I:\mu_n\longrightarrow\mu_n^{\oplus\mathfrak{N}_2}/\mu_n=A$ を $\tilde{\varphi}_I$ と標準全射 $\mu_n^{\oplus\mathfrak{N}_2}\twoheadrightarrow A$ の合成定義する。φ_Iの像を A_Iと書く。$A_I\cong\mu_n$.

<u>命題</u> (3.1). 各 $I\in\mathfrak{N}_2$ に対して，A_Iは $f:Y_n\to\hat{\mathbb{P}}^N$ の D_Iに沿っての分岐群である。

<u>注意</u>. D_Iに沿っての惰性群 A_Iの位数は n で，$D_I\cong\hat{\mathbb{P}}^I\times\hat{\mathbb{P}}^{(N_\infty-I)}$ より，D_Iでの分解群を $\tilde{A}_I$とすると，相対次数 $f=\#(\tilde{A}_I/A_I)$ $=n^{\binom{\# I}{2}-1+\binom{N+3-\# I}{2}-1}$. $Y_n\to\hat{\mathbb{P}}^N$ の次数は $n^{\binom{N+2}{2}-1}$. よって $f^{-1}(D_I)$ の既約成分の個数は $g=n^{\binom{N+2}{2}-\binom{\# I}{2}-\binom{N+3-\# I}{2}}$.

Σ を $\hat{\mathbb{P}}^N$ の stratification の定義に現われた (AR) 条件をみたす集合 $\mathcal{L}$の集合とする。D_I $(I\in\mathfrak{N}_2)$ たちは，normal crossing で，各 D_I は $Y_n\to\hat{\mathbb{P}}^N$ で branch しているので，次がわかる。

<u>定義</u>. $A_{\mathcal{L}}=\langle A_I\mid I\in\mathcal{L}-\{N\}\rangle$ とおく。$A_{\{N\}}=\{1\}$。

<u>命題</u> (3.2). $A_{\mathcal{L}}$ は $Y_n\to\hat{\mathbb{P}}^N$ の，$F_{\mathcal{L}}$ の generic point，あるいは $F_{\mathcal{L}}^0$ での分岐群である。

<u>注意</u>. $f:Y_n\to\hat{\mathbb{P}}^N$ の ramification locus $R=f^{-1}(\hat{D})_{\mathrm{red}}$ はやはり normal crossing divisor in Y_n である。

§4. Euler 数

以下では Y_n の cohomology theory として次の2つのものを考える

(A). 係数体 $K=\mathbb{C}$ として, $k\subset\mathbb{C}$ によって Y_n を $\mathbb{C}$ 上で考え, $Y_n(\mathbb{C})^{an}$ で $Y_n(\mathbb{C})$ に associate する複素解析多様体とするとき, 特異 cohomology 群 $H^i(Y_n(\mathbb{C})^{an}, K)$ を考える.

(B) 係数体 $K=\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ として, $Y_n\otimes_k\bar{k}$ の étale cohomology 群 $H^i_{et}(Y_n\otimes\bar{k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を考える。

いずれの場合も単に $H^i(Y_n, K)$ と cohomology 群を記す。K^* に値をもつ A の指標群 $A^*=\mathrm{Hom}(A, K^*)$ を考える。$\alpha\in A^*$ とする。

定義 $\quad H^i(\alpha):=\{\gamma\in H^i(Y_n, K)\mid g^*(\gamma)=\alpha(g)\gamma\ ;\ \forall g\in A\}$.

但し g^* は $g\in A\subset \mathrm{Aut}(Y_n)$ が $H^i(Y_n, K)$ に引き起こす写像。

定義 $\quad e(\alpha):=\sum_{i=0}(-1)^i\dim H^i(\alpha)$. ここで和は $i\leq 2N$.

定理 (4.1) $\quad e(\alpha)=\sum_{\mathcal{L}\in\Sigma} e(F^0_{\mathcal{L}})\,\delta(\alpha|A_{\mathcal{L}})$.

但し $\mathcal{L}\in\Sigma$ は stratification Σ の各 stratum $\mathcal{L}$ を動く。$F^0_{\mathcal{L}}$ は §2 で定義した。$e(F^0_{\mathcal{L}})$ はその Euler 数. 最後に $\delta(\alpha|A_{\mathcal{L}})$ は次で与える。

$$\delta(\alpha|A_{\mathcal{L}}):=\begin{cases}1, & (\alpha|_{A_{\mathcal{L}}}\text{ が自明な指標});\\ 0, & (\alpha|_{A_{\mathcal{L}}}\text{ が }A_{\mathcal{L}}\text{ の自明でない指標}).\end{cases}$$

さらに $\alpha \in A^*$ について

定義　任意の $\mathcal{L} \in \Sigma$ に対して，$\delta(\alpha | A_{\mathcal{L}}) = 0$ のとき α を generic という。明らかに α generic $\Leftrightarrow$ $\delta(\alpha | A_I) = 0$, ${}^\forall I \in \mathfrak{M}$。

系　$\alpha \in A^*$ が generic ならば，$e(\alpha) = e(F^0_{\{N\}}) = (-1)^N N!$

（定理の証明）Open immersion $i: U_N \hookrightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$ と finite morphism $f: Y_n \to \hat{\mathbb{P}}^N$ の fibre 積を V とし，次の Cartesian diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & U_N \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ Y_n & \xrightarrow{f} & \hat{\mathbb{P}}^N \end{array}$$

を考える。ここで，k は open immersion, g は finite étale である。
$k_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ が Y_n 上で成立するから，$f_* k_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell = f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell = i_* g_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.
さて g は étale であるから，$g_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ は smooth で，A - linearized で

$$g_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{\alpha \in A^*} L_\alpha$$

と α - eigen parts L_α に分かれる。各 L_α は rank 1 の smooth $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sheaf on U_N である。こうして，$f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{\alpha \in A^*} i_* L_\alpha$.
一方 f_* は finite であるから acyclic で，$R^i f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \{0\}$ $(i > 0)$ であるから，$H^i_{et}(Y_n, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = H^i_{et}(\hat{\mathbb{P}}^N, f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{\alpha \in A^*} H^i_{et}(\hat{\mathbb{P}}^N, i_* L_\alpha)$.
A - module として構造比較より，$H^i(\alpha) = H^i_{et}(\hat{\mathbb{P}}^N, i_* L_\alpha)$ が各 α に対して成立する。$e(\alpha) = \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, i_* L_\alpha)$.
さて L_α は U_N 上 smooth であるから，$\sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(U_N, L_\alpha) = e(U_N)$.

これより，$e(U_N) = \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, Ri_* L_\alpha)$．但し $Ri_* L_\alpha$ は L_α の derived complex．よって

$$e(U_N) = e(\alpha) + \sum_{j=1}^{2N} (-1)^j \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, R^j i_* L_\alpha).$$

一方 Euler－Poincaré 標数の加法性より，

$$\sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, Ri_* L_\alpha) = \sum_{\ell\in\Sigma} \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(F_\ell^0, Ri_* L_\alpha).$$

よって

$$e(U_N) = \sum_{\ell\in\Sigma} \sum_{j=0} (-1)^j \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha).$$

ここで $R^j i_* L_\alpha$ が各 F_ℓ^0 上で smooth sheaf になることが示せて，

$$e(U_N) = \sum_{\ell\in\Sigma} \sum_{j=0} (-1)^j \operatorname{rank}\{(R^j i_* L_\alpha)_{x_\ell}\} e(F_\ell^0).$$

ここで，$(R^i i_* L_\alpha)_{x_\ell}$ は F_ℓ^0 のある点 x_ℓ での $R^j i_* L_\alpha$ の stalk である。次の補題は易しい。

<u>補題</u>．
$$\sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \operatorname{rank}\{(R^j i_* L_\alpha)_x\} = \begin{cases} 1, & \text{if } x\in U_N; \\ 0, & \text{if } x\notin U_N. \end{cases}$$

これより，$R^j i_* L_\alpha$ について E－P 標数の加法を使い，

$$\sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, R^j i_* L_\alpha) = \sum_{\ell\in\Sigma} \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha)$$

よって
$$\begin{aligned} e(U_N) - e(\alpha) &= \sum_{j=1}^{2N} (-1)^j \sum_{\ell\in\Sigma} \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha) \\ &= \sum_{\ell\in\Sigma} \sum_{i=1}^{2N} (-1)^j \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha) \\ &= \sum_{\ell\in\Sigma} \sum_{j=1}^{2N} (-1)^j \operatorname{rank}\{(R^j i_* L_\alpha)_{x_\ell}\} e(F_\ell^0) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\ell \in \Sigma} \left[\left\{ \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \operatorname{rank}\{(R^j i_* L_\alpha)_{x_\ell}\} \right\} e(F_\ell^\circ) - \operatorname{rank}(i_* L_\alpha)_{x_\ell} e(F_\ell^\circ) \right]$$

$$= (-1) \sum_{\substack{\ell \in \Sigma \\ \ell \neq \{N\}}} \operatorname{rank}\{(i_* L_\alpha)_{x_\ell}\} e(F_\ell^\circ) + e(U_N) - \operatorname{rank}(i_* L_\alpha)_{x_{\{N\}}} e(U_N).$$

ここで，$(i_* L_\alpha)_{x_N}$ が rank 1 であることに注意して，

$$e(U_N) = e(\alpha) + (-1) \cdot \sum_{\substack{\ell \in \Sigma \\ \ell \neq \{N\}}} e(F_\ell^\circ) \operatorname{rank}\{(i_* L_\alpha)_{x_\ell}\}.$$

つまり，$e(\alpha) = \sum_{\ell \in \Sigma} e(F_\ell^\circ) \operatorname{rank}\{(i_* L_\alpha)_{x_\ell}\}$。

ここで，L_α に対応する U_N の基本群の表現を考えると，それは $H_1(U_N, \mathbb{Z})$ or $H_1^{et}(U_N, \hat{\mathbb{Z}})$ を通して分解し，標準全射 $H_1(U_N, \mathbb{Z}) \longrightarrow A$ または $H_1^{et}(U_N, \hat{\mathbb{Z}}) \rightarrow A$ によって，A を通して分解し，指標 $\alpha : A \longrightarrow K^*$ に対応している。よって $(i_* L_\alpha)_{x_\ell}$ は x_ℓ での inertia group A_ℓ により定まり，表現 α による，A_ℓ の fixed part に他ならない。$\operatorname{rank}(i_* L_\alpha)_{x_\ell} = \dim K^{\alpha(A_\ell)} = \delta(\alpha | A_\ell)$.

（証明終り）

§ 5. generic symmetric characters and abelian l-adic representations

$\mathbb{N}$ を $\mathfrak{N}$ の元とみる。すると $U_N = F_{\mathbb{N}}^\circ$ は $\mathbb{A}^N$ の open subscheme とみなせる。$\mathbb{A}^N$ の座標の置換によって N 次対称群 S_N は $\mathbb{A}^N$ に作用し U_N はこの S_N の作用で安定である。しかも S_N は $S_{N+3} = \operatorname{Aut}(U_N)$ の部分群とみなせる。S_N は U_N の $H_1(U_N, \mathbb{Z})$，あるいは $H_1^{et}(U_N \otimes \bar{k}, \hat{\mathbb{Z}})$

に自然に作用し，A は $H_1(U_N, \mathbb{Z})/nH_1(U_N, \mathbb{Z})$ あるいは $H_1^{et}(U_N \otimes \bar{k}, \hat{\mathbb{Z}})/nH_1^{et}(U_N \otimes \bar{k}, \hat{\mathbb{Z}})$ と同一視できるから，A にも，従って A^* にも作用する。

<u>定義</u>　$\alpha \in A^*$ が symmetric とは，上の S_N の A^* への作用で α が不変に保たれているときをいう。

さて $\alpha \in A^*$ が generic であるとき $i_* L_\alpha = i_! L_\alpha$ が成立し，特に $H^i(U_N, L_\alpha) = H_c^i(U_N, L_\alpha)$ は pure で，U_N affine より，α^{-1} も generic であることを使って，

$$H^i(U_N, L_\alpha) = H_c^i(U_N, L_\alpha) \cong \begin{cases} \{0\} & (i \neq N \text{ のとき}); \\ K^{\oplus N!} & (i = N \text{ のとき}). \end{cases}$$

さらに α が symmetric であるとき，S_N は $H^N(U_N, L_\alpha)$ に作用する。

<u>命題</u>(5.1) $\alpha \in A^*$ が generic symmetric であるとき，S_N がすぐ上で述べた $H^N(U_N, L_\alpha)$ に引き起こす表現は正則表現である。

(証明)．S_N は U_N に固定点なしに作用することに注意し，Lefschetz の fixed point theorem を使う。

<u>系</u>．上と同じ仮定で $H^N(U_N, L_\alpha)$ の S_N-不変部分空間は一次元である。

S_N の作用が k 上定義されていることを使って $\bar{k}$ をとる。

<u>命題</u>(5.2) $k=\mathbb{Q}(\sqrt[n]{-1})$ とし, $K=\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ とする。$H^N_{et}(U_N\otimes\bar{k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の部分空間 $H^N(U_N,L_\alpha)^{S_N}$ は α が generic symmetric のとき $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上一次元で $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ の abelian ℓ-adic 表現を定める。

さて Henniart [H] は Waldschmidt の方法の p-進の類似物を考えることによって Serre の予想の証明に成功した。これにより次の命題から導かれる。

<u>定理</u>(5.3) ℓ-進表現

$$\rho_\alpha^{S_N}:\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)\longrightarrow \mathrm{Aut}\, H^N(U_N,L_\alpha)^{S_N}\cong\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\,*}$$

は k の量指標 (algebraic Hecke character) から得られるものと一致する。

さて $V_N=U_N/S_N$ とすると V_N は smooth affine scheme で, L_α は étale finite morphism $U_N\to V_N$ に対して, α が symmetric のとき descent して, rank 1 の smooth $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-sheaf M_α を定める。$H^N_{et}(U_N\otimes\bar{k},L_\alpha)^{S_N}=H^N_c(U_N\otimes\bar{k},L_\alpha)^{S_N}=H^N_c(V_N\otimes\bar{k},M_\alpha)$ となる。

p を素数とし, $2n$ と互いに素であるとする。すると U_N, V_N, L_α 等はすべて mod p で good reduction をもつことがわかる。よって $\rho_\alpha^{S_N}$ という ℓ-進表現は $\mathfrak{p}$ が p の上にある $k=\mathbb{Q}(\sqrt[n]{-1})$ の place であるとき $\mathfrak{p}$ では不分岐。よって $\mathfrak{p}$ での Frobenius の像を

決めることが次の目標になる。

§6. 有限体上で。

この節では U_N 等を reduction modulo $\mathfrak{q}$ して $\mathbb{F}_q$ 上で考える。但し，q は p の巾 p^f で $\mathbb{F}_{p^f}$ が $\sqrt[N]{1}$ を含む最小の巾。

Grothendieck - Deligne 公式（cf. SGA $4\frac{1}{2}$ [D-1]）によって，$\rho_\alpha^{S_N}$ による Frobenius の像の特性多項式は V_N の closed points における，M_α への Frobenius の作用をみれば，それを使って書き表され，特性多項式は exponential sum を係数とする多項式となる。

定理 (0.4) は $\alpha \in A^*$ が generic symmetric という仮定のもとでは Katz ([K]) の議論の類似を使って，この closed points の Frobenius の作用が Selberg 和の各項に対応する形になっていることを見ることで証明される。

§7. 未解決の点。

ℓ-進表現 $\rho_\alpha^{S_N}$ に対応する Grössen character の infinite type はまだ決っていない。weight は N であることは，構成より明らかであるが，infinite type が $H^2(U_N, \mathbb{C})$ の Hodge structure から決る，$H^2(U_N(\mathbb{C})^{an}, L_\alpha)^{S_N}$ の Hodge type と一致して，さらにこの Hodge type が α によってどのように explicit に表わされるかは不明である。

References

[W-1] A.Weil:Jacobi sums as "Grösseencharctere". Trans.Am.Math.Soc.,73 p.487-495(1952) (＝全集、巻II、１９５２ｄ)

[W-2] A.Weil:Sommes de Jacobi et caractères de Hecke.
(全集、巻III,１９７４ｄ、p.329-342)

[D-1] Deligne,P.:Applications de la formule des traces aux sommes trigonometriques. SGA (du Bois-Marie) 4+1/2; Lecture Notes in Math.569, p.168-232, Springer, 1977.

[S-1] A.Selberg:Bemeerkninger om et multipelt integral.
Norske Mat.Tidsskr 26,p.71-78 (1944)

[E-1] R.Evans:Identies for products of Gauss sums over finite fields.
Enseign.Math.,27(1981),197-209.

[E-2] R.Evans and W.Root.:Conjectures for Selberg character sums.
J.Ramanujan Math.Soc.3(1),p.111-128 (1988).

[O-1] Y.Oda:同じ題 I.
Contemporary Math 83, p.159-181 (1989)

[A-1] K.Aomoto:
Journal of the Math.Soc.Japan 1984

[T-K] A.Tsuchiya and Y.Kanie:Fock space representation of the Virasora a lgebra = Intertwining operators.
Publ. RIMS, Kyoto Univ. 22,p.259-327 (1986)

[T] T.Terada:Fonctions hypergéometriques F1 et fonctions automorphes I.
Journal of the Math.Soc.Japan, p.451-476 (1983).

[H] G.Henniart:Représentations ℓ-adiques abéliennes,
in "Seminaire de Theorie des Nombres, Paris 1980-81,"
Birkäuser Progress in Math., vol.22, 1982, pp.107-126.

[K] N.Katz:Crystalline cohomology, Diedonné modules and Jacobi sums.
Automorphic forms, representation theory, and arithmetic. p.165-246
(Bombay Colloqium, 1979),Springer, 1981.