

## 動的な点に対する Voronoi 図について

今井桂子

九州工業大学・情報科学センター

Keiko Imai

Information Science Center, Kyushu Institute of Technology

### 1. はじめに

平面上に与えられた  $n$  個の点に対する Voronoi 図や一般化された Voronoi 図は、与えられた点に対する平面上の任意の点の“近さ”を表わすものとして、多くの分野で応用され、特に計算幾何学の多くの基本的問題(例えば、郵便局問題(post-office problem)、与えられた点に対する最大空円を求める問題など)を効率的に解くために重要な概念である。平面上の与えられた  $n$  点に対する Voronoi 図は、 $O(n \log n)$  の手間、 $O(n)$  の記憶領域で構成できることが知られている [8].

Voronoi 図のロボティクス、グラフィックスなどへの応用を考えると、平面上の点が動いている場合について考慮する必要が生じてくる。このような平面上に与えられた  $n$  個の点が連続的に動いている場合の Voronoi 図については、まだあまり知られておらず、特殊な場合についての研究がされ始めたばかりである [9]. 本稿では、与えられた点が、点ごとに定まった一定の速度で異なる  $n$  本の直線上を動く場合、回転と平行移動によって動く場合などに対する Voronoi 図と Voronoi 図の一般化の 1 つである最遠点 Voronoi 図について議論を進める。

点が 1 つのパラメタに伴って動く場合の Voronoi 図を求めることは、 $n$  個の 3 変数関数の最小値をとる関数を求めることになる。 $n$  個の 1 変数あるいは 2 変数関数の最小値をとる関数を求めることは、近年の計算幾何学の中心的話題となっている。特に、1 変数の場合は Davenport-Schinzel 列という名の下で研究されている [1,2,3,4,5]. 3 変数関数に関する問題は、まだ殆ど調べられておらず、その点でも以下の議論は興味がある。

本稿では、 $n$  点が点ごとに定まった一定の速度で  $n$  本の直線上を動く場合、回転と平行移動で動く場合の Voronoi 図をそれぞれ  $O(n^2 \lambda_5(n) \log n)$ 、 $O(n^2 \lambda_7(n) \log n)$  の手間で構成するアルゴリズムを与える。ここで、 $\lambda_s(n)$  は  $s$  次の Davenport-Schinzel 列の最大長であり  $n$  に関して殆ど線形に近い関数である。

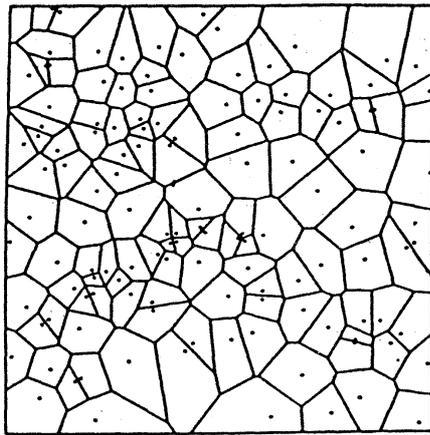


図 1. Voronoi 図

## 2. Voronoi 図について

平面上の  $n$  個の点  $p_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が与えられた時,  $d(p, p_i)$  を点  $p$  と  $p_i$  の Euclid 距離とすると

$$V(p_i) = \bigcap_{i \neq j} \{p \mid d(p, p_i) < d(p, p_j)\}$$

を点  $p_i$  に対する Voronoi 多角形という.  $V(p_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) によって平面の分割が得られ, それを Voronoi 図 (Voronoi diagram) と呼ぶ. 与えられた  $n$  個の点  $p_i$  を母点, Voronoi 多角形の頂点, 辺をそれぞれ Voronoi 点, Voronoi 辺という.

Voronoi 辺は, その辺を共有する 2 つの Voronoi 多角形  $V(p_i)$ ,  $V(p_j)$  の母点である  $p_i$  と  $p_j$  から等距離にある点の軌跡, つまり線分  $\overline{p_i p_j}$  の垂直二等分線の一部である.

平面上の点  $p_i$  の座標を  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) とし, 3 次元 Euclid 空間  $E^3$  において各  $i$  に対し

$$z = d(p, p_i)^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

のグラフを描く. 異なる 2 つの  $i, j$  に対し,  $z = d(p, p_i)^2$  と  $z = d(p, p_j)^2$  のグラフは  $E^3$  内の放物線で交わるが, この放物線を  $(x, y)$  平面に射影したものが, 線分  $\overline{p_i p_j}$  の垂直二等分線に他ならない. つまり,  $n$  個のグラフ  $z = d(p, p_i)^2$  の下側エンベロープ (lower envelope) を  $(x, y)$  平面に射影したものが  $n$  個の母点  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) に対する Voronoi 図となる.

また,  $n$  個のグラフ  $z = d(p, p_i)^2$  の上側エンベロープ (upper envelope) を  $(x, y)$  平面に射影すると最遠点 Voronoi 図 (furthest Voronoi diagram) が得られる. 最遠点 Voronoi 図とは, Voronoi 多角形  $V(p_i)$  を定義する “距離” を Euclid 距離ではなく,  $d(p, p_i) = \sqrt{-(x - x_i)^2 - (y - y_i)^2}$  を用いて定義したものである. 即ち,  $V(p_i)$  は Euclid 距離では  $p_i$  が最も近い母点となっているような点の集まりである.

### 3. 異なる $n$ 本の直線上を一定の速度で動く母点に対する Voronoi 図

方向ベクトルが  $t_i = (u_i, v_i)$  である直線上をパラメタ  $t$  で母点  $p_i$  が動いている場合の Voronoi 図を求めることを考える.  $t = 0$  の時の母点の位置は  $(x_i, y_i)$  とする.

$$p_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$$

$$x_i(t) = x_i + u_i t, \quad y_i(t) = y_i + v_i t$$

点  $p = (x, y)$  と  $p_i(t)$  の Euclid 距離の二乗をとる関数

$$f_i(t, x, y) = (x - x_i(t))^2 + (y - y_i(t))^2$$

を考える. 関数  $f_i(t, x, y)$  の最小値をとる関数

$$f(t, x, y) = \min_{i=1, \dots, n} f_i(t, x, y)$$

に対して, 4次元 Euclid 空間  $E^4$  内のグラフ  $z = f(t, x, y)$  を  $(t, x, y)$  空間に射影すると,  $(t, x, y)$  空間の分割が得られる. この分割を  $n$  個の関数  $f_i(t, x, y)$  の最小値図と呼ぶと, この最小値図と  $E^3$  内の超平面  $t = t_0$  の交わりは,  $t = t_0$  の時の点  $p_i(t_0)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を母点とする Voronoi 図を与えている. 従って, 母点が直線上を動く場合の Voronoi 図は,  $f_i(t, x, y)$  の最小値図を構成すれば得られることになる. 以下では簡単のため, 任意の  $t$  に対して,  $p_i(t)$  は全て相異なるとする. ある  $t$  に対し  $p_i(t)$  のうちいくつかが一致するということが起こっても, 少し議論が複雑にはなるが, 本質的には, 変わりはない. 任意の  $t$  に対して  $p_i(t)$  が全て相異なるという仮定のもとでは, 最小値図は, 3次元の領域とその2つの交わりで構成される面, 3つの交わりで構成される辺, 4つの交わりで構成される頂点より成る.  $f_i(t, x, y)$  の連立方程式を解くことにより, 4次元 Euclid 空間内での  $f_i(t, x, y)$  の交わりの性質がすぐわかる. (今後,  $f_i(t, x, y)$  の変数  $t, x, y$  は混乱が生じない限り省略して,  $f_i(t, x, y)$  を単に  $f_i$  と書くこともある.)

補題 1: (1) 任意の  $i \neq j$  に対して  $f_i(t, x, y) = f_j(t, x, y)$  は連結な  $E^4$  内の曲面となる.

(2) 任意の相異なる3つの添字  $i, j, k$  に対して,  $p_i(t), p_j(t), p_k(t)$  が一直線上になるような  $t$  が存在しなければ,  $f_i = f_j = f_k$  は  $t$  をパラメタとする曲線である. もし,  $p_i(t), p_j(t), p_k(t)$  が一直線上になるような  $t$  が存在したとすると, その  $t$  において曲線は不連続となるが, このような  $t$  は高々2つしかない.

(3) 任意の相異なる  $i, j, k, l$  に対して  $f_i = f_j = f_k = f_l$  は高々4点からなる.  $\square$

この補題により最小値図での頂点の数は  $O(n^4)$  であることがすぐわかるが, より良い上界が次のようにして得られる. 2つの添字  $i \neq j$  をとり, 固定する.  $k \neq i, j$  に対して, 関数  $g_k^+(t), g_k^-(t)$  を次のように定義する.  $p_i(t), p_j(t), p_k(t)$  の外心を  $q_k$  とし, そ

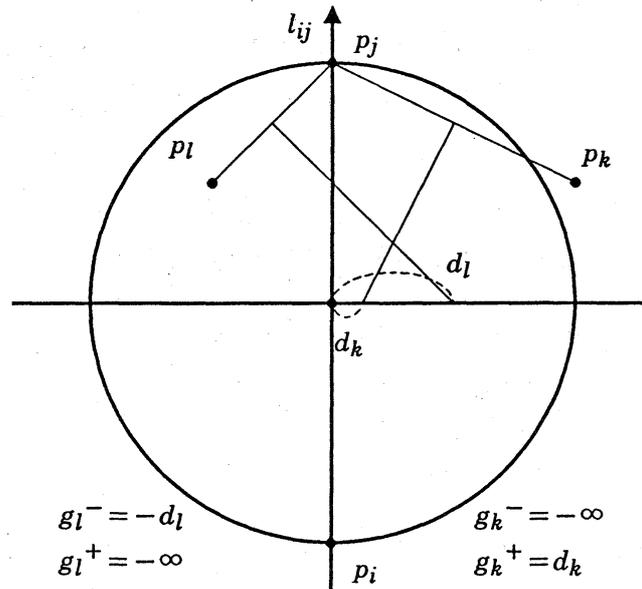


図 2.  $g_k^+$ ,  $g_k^-$  の定義

れと  $p_i(t)$  と  $p_j(t)$  の中点との距離を  $d_k$  とおく. また,  $l_{ij}(t)$  を  $p_i(t)$  から  $p_j(t)$  へ向かう有向直線とする.

Case 1:  $p_k(t)$  が有向直線  $l_{ij}(t)$  の右側にある:

$$g_k^+(t) = \begin{cases} +d_k & (q_k \text{ が } l_{ij}(t) \text{ の右側にある}) \\ -d_k & (q_k \text{ が } l_{ij}(t) \text{ の左側にある}) \end{cases}$$

$$g_k^-(t) = +\infty$$

Case 2:  $p_k(t)$  が有向直線  $l_{ij}(t)$  の左側にある:

$$g_k^+(t) = +\infty$$

$$g_k^-(t) = \begin{cases} -d_k & (q_k \text{ が } l_{ij}(t) \text{ の右側にある}) \\ +d_k & (q_k \text{ が } l_{ij}(t) \text{ の左側にある}) \end{cases}$$

Case 3:  $p_k(t)$  が  $l_{ij}(t)$  上にある (このような場合は高々 2 つの  $t$  の値に対して起こりうる):

$$g_k^+(t) = g_k^-(t) = \begin{cases} -\infty & (p_k(t) \text{ が線分 } \overline{p_i(t)p_j(t)} \text{ 上にある}) \\ +\infty & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

これらの  $g_k^+(t)$ ,  $g_k^-(t)$  に対して, さらに  $g^+(t)$ ,  $g^-(t)$ ,  $g'(t)$  を定義する.

$$g^+(t) = \min_{k \neq i, j} g_k^+(t),$$

$$g^-(t) = \min_{k \neq i, j} g_k^-(t),$$

$$g'(t) = \min\{g^-(t) + g^+(t), 0\}$$

これらの関数の持つ意味は次の補題によって明らかになる.

補題 2: (1) ある  $t$  に対し  $g^+(t)$  ( $g^-(t)$ ) を実現している関数を  $g_k^+(t)$  ( $g_k^-(t)$ ) とすると,  $l_{ij}(t)$  の右 (左) 側にある  $p_l(t)$  はすべて  $p_i(t)$ ,  $p_j(t)$ ,  $p_k(t)$  を通る円の内部にはない.

(2) ある  $t$  に対し,  $g'(t) = 0$  とし,  $g^+(t)$ ,  $g^-(t)$  を実現している関数をそれぞれ  $g_k^+(t)$ ,  $g_l^-(t)$  とする. この時,  $p_i(t)$ ,  $p_j(t)$ ,  $p_k(t)$  を通る円,  $p_i(t)$ ,  $p_j(t)$ ,  $p_l(t)$  を通る円はともにその内部に他の点を含まず, 2つの円の中心  $q_k$ ,  $q_l$  は Voronoi 点となり,  $q_k$  と  $q_l$  を結ぶ線分は  $V(p_i)$  と  $V(p_j)$  の共有する Voronoi 辺となる.  $\square$

関数  $g^+$ ,  $g^-$ ,  $g'$  は, 関数  $g_k^+$ ,  $g_k^-$ ,  $g_k^+ + g_k^-$ ,  $0$  のグラフの連結部分から構成されている. これらの関数  $g^+$ ,  $g^-$ ,  $g'$  の組合せ的複雑度 (combinatorial complexity) は, それを構成している連結部分の個数の最大値で定義されているので,  $g^+$  ( $g^-$ ,  $g'$ ) を実現する関数が  $t'$  の前後で変化するような  $t$  の値  $t'$  を区分値 (intersecting value) ということにすれば, 区分値の数はその関数の組合せ的複雑度を表わしている. 関数  $g^+$ ,  $g^-$ ,  $g'$  の組合せ的複雑度は次のようにして評価することが出来る.

補題 3:  $g^+$ ,  $g^-$ ,  $g'$  の組合せ的複雑度は  $O(\lambda_6(n))$  であり, これらの関数は  $O(\lambda_5(n) \log n)$  の時間で構成できる.

証明: 補題 1 の (1) より,  $f_i = f_j = f_k = f_l$  は高々 4 点で交わることから,  $g_k^+$  と  $g_l^+$  も高々 4 点で交わる. 各  $g_k^+$  は補題 1 の (2) より高々 2 点で不連続となる. 従って,  $g^+$  の組合せ的複雑度は  $O(\lambda_6(n))$  となる [1].  $g^-$  についても同様である.  $g^+ + g^-$  と  $0$  をとる関数は, 高々定数回しか交わらないので,  $g'$  の組合せ的複雑度は  $g^+$  や  $g^-$  のその定数倍にしかすぎない. よって, これも  $O(\lambda_6(n))$  である.

互いに高々 4 点で交わり, 高々 2 点で不連続である関数  $g_k^+$  から分割統治法によって  $g^+$  を構成するのは  $O(\lambda_5(n) \log n)$  で行える [6].  $g^-$  や  $g'$  についても同様である.  $\square$

定理 1:  $n$  関数  $f_i$  の最小値図のすべての頂点は  $O(n^2 \lambda_5(n) \log n)$  時間,  $O(n)$  の記憶領域で求められる. 従って, 直線上を動く母点に対する Voronoi 図も同じ計算時間, 記憶領域で求めることができる.

証明:  $E^4$  内の曲面  $f_i = f_j$  上にある最小値図の頂点の 1 つをとる. それが  $f_i$ ,  $f_j$ ,  $f_k$ ,  $f_l$  の交点であるとし, その時の  $t$  の値を  $t'$  とする. すると,  $p_i(t')$ ,  $p_j(t')$ ,  $p_k(t')$ ,  $p_l(t')$  の 4 点は同一円周上にあり, 他の点はすべてその円の内部に含まれない. 4 点  $p_i(t')$ ,  $p_j(t')$ ,  $p_k(t')$ ,  $p_l(t')$  の位置関係は次の 3 通りの場合がある.

- (a)  $p_k(t')$  と  $p_l(t')$  が共に有向直線  $l_{ij}(t')$  の右側にある.
- (b)  $p_k(t')$  と  $p_l(t')$  が共に有向直線  $l_{ij}(t')$  の左側にある.

(c)  $p_k(t')$  と  $p_l(t')$  のうちどちらか一方が有向直線  $l_{ij}(t')$  の右側にあり, もう一方が左側にある.

この3つの場合 (a), (b), (c) はそれぞれ  $g^+$ ,  $g^-$ ,  $g'$  の区分値に対応する. 特に, (c) は  $g^+ + g^- = 0$  の解に対応している. 従って,  $f_i = f_j$  上にある最小値図上の頂点は,  $g^+$ ,  $g^-$  の区分値か  $g^+ + g^- = 0$  の解に対応する. 逆も成り立つ. 従って, すべての任意の2点  $p_i(t)$  と  $p_j(t)$  の組に対し,  $g^+$ ,  $g^-$ ,  $g'$  を構成できれば, 最小値図上のすべての頂点が求まったことになるが, これは補題3より  $O(n^2 \lambda_5(n) \log n)$  の手間,  $O(n)$  の記憶領域で行える.  $\square$

ここまでの議論は,  $E^4$  内の最小値図に対して行なってきたが, それを少し修正して最大値図に適応してもほとんど同様の結果が得られ, 最遠点 Voronoi 図に対する次の定理が成り立つ.

定理2:  $n$  関数  $f_i$  の最大値図のすべての頂点は  $O(n^2 \lambda_5(n) \log n)$  時間,  $O(n)$  の記憶領域で求められる. 従って, 直線上を動く母点に対する最遠点 Voronoi 図も同じ計算時間, 記憶領域で求めることができる.  $\square$

#### 4. 回転と平行移動によって動く母点に対する Voronoi 図

母点が  $\theta$  回転 ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) された後,  $(u_i, v_i)$  平行移動されるとすると, 回転, 平行移動後の座標は

$$p_i(\theta) = (x_i(\theta), y_i(\theta))$$

$$x_i(\theta) = x_i \cos \theta - y_i \sin \theta + u_i$$

$$y_i(\theta) = x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + v_i$$

となる. 3節と同様に, 点  $p = (x, y)$  と  $p_i(t)$  の Euclid 距離の二乗をとる関数

$$f_i(\theta, x, y) = (x - x_i(\theta))^2 + (y - y_i(\theta))^2$$

を考える. 3節の母点が直線上を動く場合と異なるのは, 関数  $f_i$  の4つの交わりが高々6点からなるということだけである. 3節の議論を繰り返せば, 母点が上のような回転と平行移動によって動く場合の Voronoi 図と最遠点 Voronoi 図に対する定理が得られる.

定理3:  $n$  関数  $f_i$  の最小値図のすべての頂点は  $O(n^2 \lambda_7(n) \log n)$  時間,  $O(n)$  の記憶領域で求められる. 従って, 回転と平行移動によって動く母点に対する Voronoi 図も同じ計算時間, 記憶領域で求めることができる.  $\square$

定理4:  $n$  関数  $f_i$  の最大値図のすべての頂点は  $O(n^2 \lambda_7(n) \log n)$  時間,  $O(n)$  の記憶領域で求められる. 従って, 回転と平行移動によって動く母点に対する最遠点 Voronoi 図も同じ計算時間, 記憶領域で求めることができる.  $\square$

## 5. まとめ

本稿では、動的な点 (特に  $n$  点が  $n$  本の異なる直線上を一定の速さで動く場合, 回転と平行移動によって動く場合) に対する Voronoi 図, 最遠点 Voronoi 図を求める問題を, 3 変数関数の最小値図あるいは最大値図を求める問題に変換し, さらに 1 変数関数の最小値, 最大値をとる関数を求める問題に帰着して解くというアルゴリズムを与えた. 3 変数関数の最小値図や最大値図を求めるアルゴリズムは, この手法の他に線形化手法 (linearization technique) がある. これは,  $f_i$  の式で変数を増やし  $f_i$  を 1 次式とみなして高い次元での超平面を考え, それらの凸包を求め, その凸包と変数を増やしたために現われたいくつかの制約式を組み合わせて最小値図や最大値図を求めるものである.

また, 本稿で扱った問題のうち回転と平行移動で動く点に対する最遠点 Voronoi 図は, 次のような 2 つの点集合の最適なあてはめを求める問題 (geometric fitting problem) と関係がある [7]. 1 対 1 対応のついた平面上の  $n$  点から成る二つの点集合  $S = \{s_i = (x_i, y_i)\}$ ,  $T = \{t_i = (u_i, v_i)\}$  が与えられたとき ( $s_i$  と  $t_i$  が対応する),  $S$  を  $\theta$  回転し  $(x, y)$  平行移動することにより対応する点同士の距離の最大値が最小になるようにするミニマックス問題を考える. このときの対応する点同士の距離は  $f_i$  に他ならないので, 最大値図が求まっていれば最大値図上の最小値を見つけることによってミニマックス問題も解けたことになる.

## 参考文献

- [1] M. J. Atallah: Some Dynamic Computational Geometry Problems. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol.11, No.12 (1985), pp.1171-1181.
- [2] H. Davenport and A. Schinzel: A Combinatorial Problem Connected with Differential Equations. *American Journal of Mathematics*, Vol.87 (1965), pp.684-694.
- [3] H. Edelsbrunner: The Upper Envelope of Piecewise Linear Functions: Tight Bounds on the Number of Faces. *Technical Report No. UIUCDCS-R-87-1396*, Department of Computer Science, University of Illinois at Urbana-Champaign, December 1987.
- [4] H. Edelsbrunner, J. Pach, J.T. Schwartz and M. Sharir: On the Lower Envelope of Bivariate Functions and Its Applications. *Proceedings of the 28th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 1987, pp.27-37.
- [5] S. Hart and M. Sharir: Nonlinearity of Davenport-Schinzel Sequences and of Generalized Path Compression Schemes. *Combinatorica*, Vol.6 (1986), pp.151-177.

- [6] J. Hershberger: Finding the Upper Envelope of  $n$  Line Segments in  $O(n \log n)$  Time. Preprint, 1988.
- [7] 今井桂子, 今井浩: 対応の与えられた点集合間のミニマックス近似問題について. 第37回情報処理学会全国大会講演論文集, 2D-6 (1988), pp.11-12.
- [8] F. P. Preparata and M. I. Shamos: *Computational Geometry: An Introduction*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [9] 徳山豪: 移動する点集合の Voronoi 図の変化. 情報処理学会アルゴリズム研究会資料, 88-AL-1 (1988).