数理解析研究所講究録
第 696 巻 1989 年 1-11

骨組みを持つself-similar setについて

京都大学理学部　亀山敦

1.

ここではself-similar set (sss)の位相的な性質について考察する。sssとは

定義 1　$(X, \{f_i\}_{i=1}^N)$を完備距離空間とその上の縮小写像(i.e. Lipschitz定数 $Lip(f_i) < 1$)の組とする。すると、Xの空でないcompact部分集合Kが一意的に存在して、

$K = f_1(K) \cup f_2(K) \cdots \cup f_N(K)$　となる。このKを$(X, \{f_i\})$より定まるself-similar set (sss)という。

存在と一意性は[1], [2]。sssの位相的な性質についてWilliamsの次のような結果がある。[3]

定理　$\sum_{i=1}^N Lip(f_i) < 1$ ならば Kは位相次元0.

その他、[2]にいくつかの結果がある。

また、Kは記号力学系の商空間として次のように表わされ

る[2]。$S=\{1,2,\cdots,N\}$をN個の記号の集合とする。$\Sigma=S^{\mathbb{N}}$をSによる片側無限列の集合とし、shift map $\sigma:\Sigma\to\Sigma$とは$\sigma(x_1x_2\cdots)=x_2\cdots$となるものである。さらに各$i\in S$に対し、$\tilde{i}:\Sigma\to\Sigma$で、$\tilde{i}(x_1x_2\cdots)=ix_1x_2\cdots$という写像を表わす。全射$\pi:\Sigma\to K$を$\pi(i_1i_2\cdots)=\lim_{k\to\infty}f_{i_1}\circ f_{i_2}\circ\cdots\circ f_{i_k}(z)$と定義する。ただし$z$は距離空間$X$の点で、$\pi$は$z$によらず決まる。

次は可換。

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\tilde{i}"'] \arrow[d, "\pi"] & \Sigma \arrow[d, "\pi"] \\
K \arrow[r, "f_i"'] & K
\end{tikzcd}
$$

πは1-1とは限らない。Σ上の同値関係$\sim$を$\underline{x}\sim\underline{y}\iff\pi(\underline{x})=\pi(\underline{y})$と定める。$\Sigma$のトポロジーとして離散位相の積位相を考えておくと、Σの$\sim$による商空間$\Sigma/\sim$はKと同相になる。

次に、sssを一般化したものとして次を考える。

定義 2　Σ上の同値関係$\sim$で、$\underline{x}\sim\underline{y}$ならば$\tilde{i}\underline{x}\sim\tilde{i}\underline{y}$がすべての$\underline{x},\underline{y}\in\Sigma$, $i\in S$に対して成り立つものを考える。このとき、商空間$\Sigma/\sim$をself-similar symbolic space (SSSS)とよぶ。

自然数kに対し$W_k=S^k$は長さkの有限列の集合である。$W=\bigcup_{k\geq 0}W_k$。$w\in W$をwordという。

$\pi: \Sigma \longrightarrow S = \Sigma/\sim$ を自然な射影とする。$i \in \mathcal{S}$ に対し $i_*: S \to S$ は次が可換になるような写像である。

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\hat{i}"'] \arrow[d, "\pi"] & \Sigma \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[r, "i_*"'] & S \end{tikzcd} \qquad \text{for all } i \in \mathcal{S}$$

$w \in W$ に対し (w) を、w で始まる Σ の記号列全体の集合とし、$[w] = \pi((w))$ とおく。

定義3　S は ssss とする。$C_0 = \{x \in S;$ どんな $i \in \mathcal{S}$ についても $\pi^{-1}(x) \not\subset (i)\}$, $C_1 = \{x \in S;$ どんな $y \in S$ についても $\sigma(\pi^{-1}(x)) \neq \pi^{-1}(y)\}$ とおく。

$C = C_0 \cup C_1$ を S の connecting set とよぶ。

$\mathcal{A} = \{\pi^{-1}(x); x \in C\}$ とおくとこれは Σ の部分集合の族で、各 $A \in \mathcal{A}$ は $\sim$ の同値類である。同値関係 $\sim$ は $\mathcal{A}$ により、次のように記述される。

命題1　$A \subset \Sigma$ は $\sim$ による同値類とする。すると A は、一点か、あるいは一意的に $\hat{A} \in \mathcal{A}$ と $w \in W$ が存在して $A = \{\hat{w}\underline{x}\ ;\ \underline{x} \in \hat{A}\}$。ただし $\hat{w}: \Sigma \longrightarrow \Sigma$ とは $w = i_1 i_2 \cdots i_k$ に対し $\hat{w} = \hat{i}_1 \circ \hat{i}_2 \circ \cdots \circ \hat{i}_k$。

つまり $\mathcal{A}$ で ssss を表すことができる。この ssss を $S_{\mathcal{A}}$ と書くことがある。同じシンボル数を持つ ssss の間に順序を定め

ることができる。つまり $S_{\mathcal{A}} < S_{\mathcal{A}'}$ とは $\mathcal{A}$ が $\mathcal{A}'$ の組分であることである。このとき自然な射影 $S_{\mathcal{A}} \longrightarrow S_{\mathcal{A}'}$ が存在する。

2.

sss は常に ssss だが、その逆は必ずしも正しくない。ssss は距離づけ不可能な場合もある。

定理1　S は ssss。S が距離づけ可能なことは次と同値である。$\pi(C)$ に含まれる任意の収束点列 $\{x_n\}$ に対して、点列 $\{\pi(x_n)\}$ は $\pi(\lim_{n\to\infty} x_n)$ 一点に収束する。

系　$\mathcal{A}$ が有限集合とする。(すなわち C も有限) このとき $S_{\mathcal{A}}$ が距離づけ可能なことは、すべての $A \in \mathcal{A}$ が閉集合であることと同値である。

$[w] \cap [w'] \neq \phi$ のとき $w - w'$ と書くことにする。

定理2　次の4つは同値.

(1) $i, j \in \mathcal{S}$ に対し、$i_1, i_2, \cdots i_k \in \mathcal{S}$ を $i = i_1$, $j = i_k$, $i_l - i_{l+1}$ $(1 \leq l \leq k-1)$ と選ぶことができる。

(2) S は連結

(3) S は弧状連結

(4) S の2点 x, y に対し中への同相 $\rho : [0,1] \to S$ を $\rho(0) = x$, $\rho(1) = y$ となるようにとれる。

定理3　Sは距離化可能とする。$\# \mathcal{A} = \# C$が高々可算個であれば、Sの位相次元は0または1.

3.

この節では骨組みを持つssssについて調べる。骨組みは、sssのgeneratorのような役割をはたしている。

仮定A　Sは次をみたすssssとする。(1) $i \in \mathcal{S}$に対し、$i_*: S \to S$はすべて単射。(2) 異なる$i, j \in \mathcal{S}$に対し$[i] \cap [j]$は高々1点しか含まない。(3) $D = \bigcup_{k \geq 0} \pi \sigma^k \pi^{-1}(C)$とおくと、$\# D < \infty$。(4) Sは連結. (5) Sは距離づけ可能.

注) この仮定をみたせばconnecting set $C = \bigcup_{i \neq j} ([i] \cap [j])$であり$S$の位相次元は1。

定理4　仮定Aの下に、Σのsubshift Σ' (i.e. Σ'はcompactでσ不変 $\sigma(\Sigma') \subset \Sigma'$)があって$\pi(\Sigma') \supset C$ (すなわち$\pi(\Sigma') \supset D$) かつ$\pi(\Sigma') = \Sigma'/\sim$は グラフ(1次元単体複体)と同相になる。

$F = \pi(\Sigma') = \Sigma'/\sim$は次のような構造を持つ。

各$i \in \mathcal{S}$に対し$F_i = [i] \cap F$とおく。$F_i = \bigcup_{r=1}^{p_i} I_r^i$とかける。ただし$I_r^i$は閉区間と同相か1点で、異なる$I_r^i$は交わらないかその端点で交わっている。中への同相写像$\varphi_r^i : I_r^i \to F$が

$\varphi_r^i \circ \pi|\pi^{-1}(I_r^i) = \pi \circ \sigma|\pi^{-1}(I_r^i)$ となり φ_r^i は I_r^i の端点を、また端点にうつすように定まる。つまり $\varphi_r^i(I_r^i) = I_{r_1}^{i_1} \cup \cdots \cup I_{r_k}^{i_k}$。

定義3　このFをSの骨組みという。

F が subshift の商空間であるとかSの部分集合であるとかいうことを忘れても、上のFの構造だけからSに関する情報をすべてとりもどすことができる。実際、$x \in F$ に対して $\underline{x} = x_1 x_2 \cdots$ を、$x \in I_{r_1}^{i_1}$ なら $x_1 = i_1$，$\varphi_{r_1}^{i_1}(x) \in I_{r_2}^{i_2}$ なら $x_2 = i_2$，$\varphi_{r_2}^{i_2} \circ \varphi_{r_1}^{i_1}(x) \in I_{r_3}^{i_3}$ なら $x_3 = i_3$，… と決めていくことができる。ただしこの対応は一意的でない。$\Sigma' = \{\underline{x} \in \Sigma\,;\ $ある $x \in F$ が $\underline{x}$ に対応している$\}$，$\mathcal{A} = \{A \subset \Sigma\,;\ \# A \geq 2$，ある $x \in F$ に対し A は x に対応するもの全体$\}$ とすれば、SがFから構成されたことになる。よってSを S_F とかくこともある。

$(X, \{f_i\})$ により定まる sss K が骨組みFを持ったとすると、FはKの generator と考えることができる。つまり、KはFにFのミニチュアをどんどんつけ足していったものの閉包になっている。$K_0 = F$，$K_{\ell+1} = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(K_\ell)$ とすると $K = \mathrm{Cl}(\bigcup_{\ell=0} K_\ell)$。$\{K_\ell\}$ は増加列になっている。$\{\varphi_r^i : I_r^i \to F\}$ の情報は、FのミニチュアをFのどこにくっつけるかということを示している。つまり、Fの I_r^i の部分とFのミニチュアの $\varphi_r^i(I_r^i)$ の部分をくっつけるのである。Kが骨組みを持たなかったり

$\Sigma/\sim$ が骨組みのような構造を持つsubshift Σ' が存在しなかったりした場合、同じような方法でKをgenerateすることはできるが、くっつけ方が複雑になる。

次に、sssの縮小写像 f_i の Lipschitz定数と骨組みの関係について考える。Fから有向グラフ $G_F=(V,E)$ を次のようにつくる。$V=\{I_r^i\,;\,I_r^i$ は一点ではない$\}$, $E=\{(I_r^i, I_{r'}^{i'})\in V\times V\,;\ \varphi_r^i(I_r^i)\supset I_{r'}^{i'}\}$。$\alpha, \omega: E\to V$ を、$\alpha(I_r^i, I_{r'}^{i'})=I_r^i$, $\omega(I_r^i, I_{r'}^{i'})=I_{r'}^{i'}$ とする。$M=\#V$ とし、$V=\{x_m\}_{m=1}^{M}$ とおく。$A=A(X_1, X_2, \cdots X_N)=(a_{mn})$ を $M\times M$ 行列で、

$$a_{mn}=\begin{cases} X_i & x_m=I_r^i,\ \varphi_r^i(x_m)\supset x_n \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする。ここで $X_1, X_2, \cdots X_N$ は変数。

定義4　$G=(V,E)$ は有向グラフとする。$x, y\in V$ に対し x から y への有向道があるとは、$x=x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k=y$ となる V の元と、E の元 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}$ が $\alpha(a_l)=x_l$, $\omega(a_l)=x_{l+1}$ $(1\le l\le k-1)$ となるようにとれることである。

また、$x\in V$ の推移成分 $(V', E')\subset(V,E)$ とは $V'=\{y\in V\,;$ x から y への有向道があり y から x への有向道がある$\}$, $E'=\{a\in E\,;\,\alpha(a), \omega(a)\in V'\}$ である。

G は推移成分 $G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$, $\cdots$, $G_k=(V_k, E_k)$ にわかれ、G_l 間に順序を $x\in V_m$ から $y\in V_n$ への有向道があ

るとき $G_m < G_n$ と定義できる。

G_F を推移成分 $G_1=(V_1,E_1),\cdots\ G_k=(V_k,E_k)$ に分けたとき、$G_1,\cdots,G_q$ を極大成分とする。$M_l=\#V_l$ とし、$V_l=\{x_m^l\}_{m=1}^{M_l}$ とする。$A_l=(a_{mn}^l)$ を $M_l\times M_l$ 行列

$$a_{mn}^l=\begin{cases} X_i & x_m^l=I_r^i\ ,\ \varphi_r^i(I_r^i)\supset x_n^l \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする。すると

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} A_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & A_q & & & \\ \hline & & & A_{q+1} & & * \\ & * & & & \ddots & \\ & & & * & & A_k \end{array}\right)$$

$P_l=\det(E-A_l)$ とおく。（E は単位行列）P_l は N 変数多項式。$P_l(t,t,\cdots,t)=0$ の正の最小根を t_0 とする。G_l を力学系と考えるとその位相的エントロピーは $-\log t_0$ である。

さて、x_m の端点と端点の距離を d_m とする。すると $\varphi_r^i(x_m)$ の端点と端点の距離は $d_{n_1}+d_{n_2}+\cdots+d_{n_j}$ 以下である。ただし $x_m=I_r^i$, $\varphi_r^i(x_m)=x_{n_1}\cup x_{n_2}\cup\cdots\cup x_{n_j}$ とする。$x_m=f_i(\varphi_r^i(x_m))$ なので $\beta_i=\mathrm{Lip}(f_i)$ とおけば $d_m<\beta_i(d_{n_1}+d_{n_2}+\cdots+d_{n_j})$。ゆえに $(E-A(\beta_1,\cdots\beta_N))\begin{pmatrix} d_1\\ \vdots \\ d_m\end{pmatrix}\leq 0$.

定理 5　骨組み（とその構造）F と正数 $\beta_1,\cdots\beta_N$ が与えられたとする。その方程式 $P_l(\beta_1 t,\cdots,\beta_N t)=0$ の正の最小根

が、ある $1 \le \ell \le q$ について1より大きかったとしよう。すると、$Lip(f_i) = \beta_i$ である $(X, \{f_i\}_{i=1}^N)$ より定まるsss Kは骨組みとしてFを持たない。さらに、もし1節の最後における意味で $S_F < K$ であれば、自然な射影 $S_F \to K$ は $x_m^\ell \in V_\ell$ の2つの端点を同じ点にうつす。

証明　$P_\ell(\beta_1 t, \cdots \beta_N t) = 0$ の正の最小根が1より大きいということは $A_\ell(\beta_1, \cdots, \beta_N)$ の最大固有値が1より小さいということである。非負行列の理論より、非負ベクトル x が $(E - A_\ell(\beta_1, \cdots, \beta_N))x \le 0$ をみたすのは $x = 0$ のときに限る。定理の前の考察とあわせて、結果を得る。□

各 f_i が相似変換のときを考えてみよう。

定義5　距離空間の写像 $f: (X, d) \to (Y, d')$ が相似変換であるとは定数 $C > 0$ があって、任意の $x, y \in X$ に対し、$d'(fx, fy) = C \cdot d(x, y)$ となることである。

曲線 $\rho: [0,1] \to X$ が線分であるとは $x < y < z \in [0,1]$ に対し、$d(\rho(x), \rho(z)) = d(\rho(x), \rho(y)) + d(\rho(y), \rho(z))$ となることである。相似変換は線分を線分にうつす。

定理6　Kは $(X, \{f_i\}_{i=1}^N)$ によって定まるsssとする。ただし各 f_i は相似変換で、Lipschitz定数 $Lip(f_i) = \beta_i$ とする。Kは骨組みFを持つとする。このとき、もし V_ℓ の元がひとつ

でも線分であればV_ℓの他の元も線分であり，$G_\ell < G_{\ell'}$ となる$V_{\ell'}$の元もすべて線分である。

すべての $x \in V$ が線分なら，$(E - A(\beta_1, \cdots \beta_N))\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} = 0$ であり，逆も正しい。G_ℓを極大成分とする。V_ℓの元が線分であることは，方程式 $P_\ell(\beta_1 t, \cdots \beta_N t) = 0$の正の最小根が$1$であることと同値である。

証明　前半は明らか。

$(E - A(\beta_1, \cdots \beta_N))\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} = 0$ なら $x_m \in V$ は線分であることを示す。それには x_m の稠密な部分集合Qで $a < b < c \in Q$ なら，$d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$ となるものの存在をいえばよい。ただし"$<$"は x_m 上の自然な線型順序である。$x_m = L_1^n \cup L_2^n \cup \cdots \cup L_{r_n}^n$ と表わされる。ただし L_t^n はある $x \in V$ とある $w \in W_n$ に対して $f_w(x)$である。f_wとは $w = i_1 i_2 \cdots i_n$ に対し $f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_n}$ である。d_t^n で L_t^nの２端点の距離を表す。仮定より $d_m = d_1^n + d_2^n + \cdots + d_{r_n}^n$。$Q_n$ を L_t^n 達の端点全体の集合とする。$Q = \bigcup_{n \geq 1} Q_n$ とすればこれが求めるものである。のこりは簡単に示すことができる。□

以上２つの定理は，たとえKが骨組みを持たなくても，$\pi(\Sigma')$が骨組と同じような構造を持つsubshift Σ'があれば，示される。ただし，その場合，その構造から，再びKの位相的性質（ssssとしての性質）が復元されるとは限らない。

参考文献

[1] J.E. Hutchinson, Fractal and self-similarity. Indiana Univ. Math. J., 30 (1981), 713-747

[2] M. Hata, On the structure of self-similar sets. Japan J. Math., 2 (1985), 381-414

[3] R.F. Williams, Composition of contraction. Bol. Soc. Brasil. Mat., 2 (1971), 55-59

[4] G. de Rham, Sur quelques courbes défines par des equations fonctionnelles. Rend. Sem. Mat. Torino, 16 (1957), 101-113

[5] N. Bourbaki, Topologie générale, Éléments de mathématique, Hermann

[6] 亀山敦, 修士論文 (1989)