

Lozi写像族の径数空間における周期解のコネクション

和大 経済 柴山健伸 (Kenshin Shibayama)

1. はじめに

Henon写像族 [H]:

$$H: (x, y) \rightarrow (1 - ax^2 + by, x)$$

の周期解の構造については、様々な数値的研究がなされている ([Mr], [U]). 径数 $b = 0$ の時に H は一次元単峰写像と同値で、その周期解は次のようにして定義される記号列によって特徴づけられる [CE].

定義 (記号列) 軌道 $\{x, Hx, H^2x, \dots\}$ に対し、記号列 $\underline{A}(x) = A_0 A_1 A_2 \dots$ は

$$A_i = \begin{cases} L & \text{if } H^i x \text{ の } x \text{ 座標 } < 0 \\ C & \text{if } H^i x \text{ の } x \text{ 座標 } = 0 \\ R & \text{if } H^i x \text{ の } x \text{ 座標 } > 0 \end{cases}$$

で定義される。

さて $b = 0$ の時にこの記号列によって区別される異なったタイプの周期解が、 $b \neq 0$ の範囲でつながるという現象が上記の数値研究の中で示されている。これを分岐理論的に捉え

たいというのが動機であるが、ここではHenon写像族のかわりに、取扱いの簡単なLozi写像族[L]:

$$L: (x, y) \rightarrow (1 - a|x| + by, x)$$

について調べることにする。Lozi写像族はHenon写像族を区分線型化したもので、次のような利点を持っている。

- a) Lozi写像族の数値実験をしてみたところ、Henon写像族の周期解の構造のかなりの部分が同様に確かめられる。
- b) 「折れ曲がる所」がはっきりしているので、具体的な計算が可能である。
- c) 分岐が集約された形になっていて、コネクションが起こる所を局所的に解析できる。

さらにLozi写像族における周期解のうち、ホモクリニックタンジェンシイに集積するタイプのものに注目する。コネクションが起こる所の周期解の形状は、ホモクリニックタンジェンシイの起こる所の近くでのホモクリニックポイントの形状を見ることによって理解し易くなる。

2. 周期解のシートの形状

この節では、コネクションが起こる所の近くでの周期解の形状を調べる。そのためにいくつかの準備をする。以下の性質がLozi写像族のある径数領域で成立している[Ms].

a) $L|_{(x>0)}, L|_{(x<0)}$ は線型写像で $L(\{x=0\}) = \{y=0\}$

b) (双曲性) $\mathbb{T}\mathbb{R}^2$ 上に連続な安定, 不安定セクタ

$$S^s(x, y) = \{(x, y; u, v) \mid |u| < c|v|\}$$

$$S^u(x, y) = \{(x, y; u, v) \mid |v| < c|u|\}$$

が存在して, 微分が存在する所では

$$DL^{-1}(x, y)S^s(x, y) \subset S^s(L^{-1}(x, y))$$

$$|DL^{-1}(u, v)| > |(u, v)| \quad (u, v) \in S^s$$

$$DL(x, y)S^u(x, y) \subset S^u(L(x, y))$$

$$|DL(u, v)| > |(u, v)| \quad (u, v) \in S^u$$

となっている。微分の存在しない所では,

$$\lim_{y \rightarrow 0} DL^{-1}(x, y)S^s(x, 0) \subset S^s(L^{-1}(x, 0))$$

等の形になっているが, $(u, v) \in S^s(x, 0)$ に対し,

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} DL^{-1}(x, y)(u, v), \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} DL^{-1}(x, y)(u, v)$$

の v 成分は異符号になっている。 $\{x=0\}$ における DL について

も同様である。各点の近傍での L は次図のようになっている。

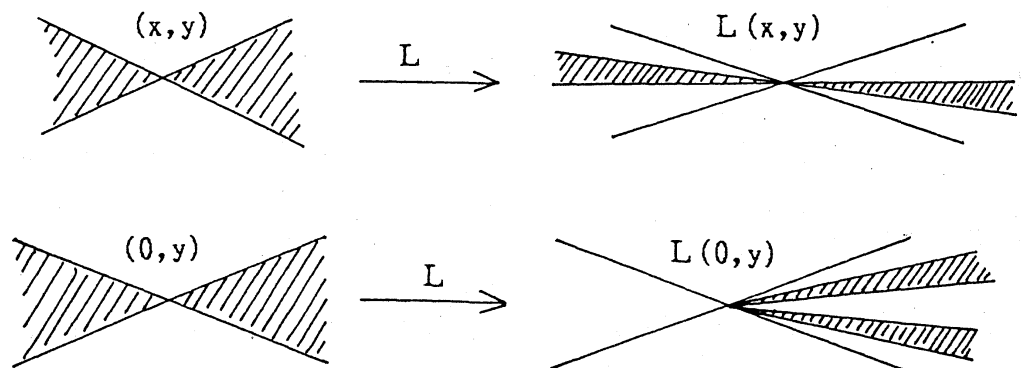


図 2.1

c) (双曲型不動点) L の不動点 X が存在し, 上で述べた双曲性の条件によつて, 点 X は双曲型になる. その安定, 不安定多様体 $W^s(X)$, $W^u(X)$ は区分線型である. 簡単のために点 X での固有値は $0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u$ とし, $W^s(X)$, $W^u(X)$ を点 X の片側の, それぞれ $\{y=0\}$, $\{x=0\}$ と交叉する方向のみを考える.

$$L^{-1}(W^s(X) \cap \{y=0\}), \quad L(W^u(X) \cap \{x=0\})$$

が安定, 不安定多様体の折れ曲がる所となる (図 2.2). 特に最初に $\{y=0\}$, $\{x=0\}$ と交叉する点をそれぞれ Y , Z と置き,

$$L^{-1}(Y) = Y_1, \quad L(Z) = Z_1,$$

$$W^{s, \text{lin}}(X) = \overline{XY_1}, \quad W^{u, \text{lin}}(X) = \overline{XZ_1}$$

と置く.

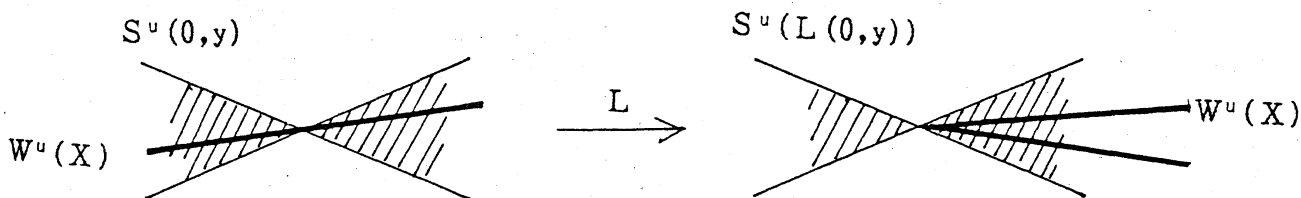


図 2.2

定義 (ホモクリニックタンジェンシイ) ここで扱う区分線型写像族においては, 安定, 不安定多様体のうち片方の折れ曲がり点がお互いの多様体上に乗るときに, 写像 L はホモクリニックタンジェンシイを持つという. さらに両多様体の折れ曲がり点が一一致するとき, 退化ホモクリニックタンジェンシイを

持つという。

ここでは簡単のために $k, h > 0$ に対して,

$$L^{-h}(Y) = L^k(Z)$$

の形の退化ホモクリニックタンジェンシイが存在することを仮定する (図 2.3)。さらに径数 (a, b) を動かしたとき, このホモクリニックタンジェンシイが壊れることを仮定する。

$$\det \frac{\partial}{\partial (a, b)} (L^{-h}(Y) - L^k(Z)) \neq 0$$

また, (x, y) 平面を (線型) 座標変換して, $X = (0, 0)$,

$$W^s_{\text{lin}}(X) \subset \{x=0\}, \quad W^u_{\text{lin}}(X) \subset \{y=0\}$$

となるようにする。

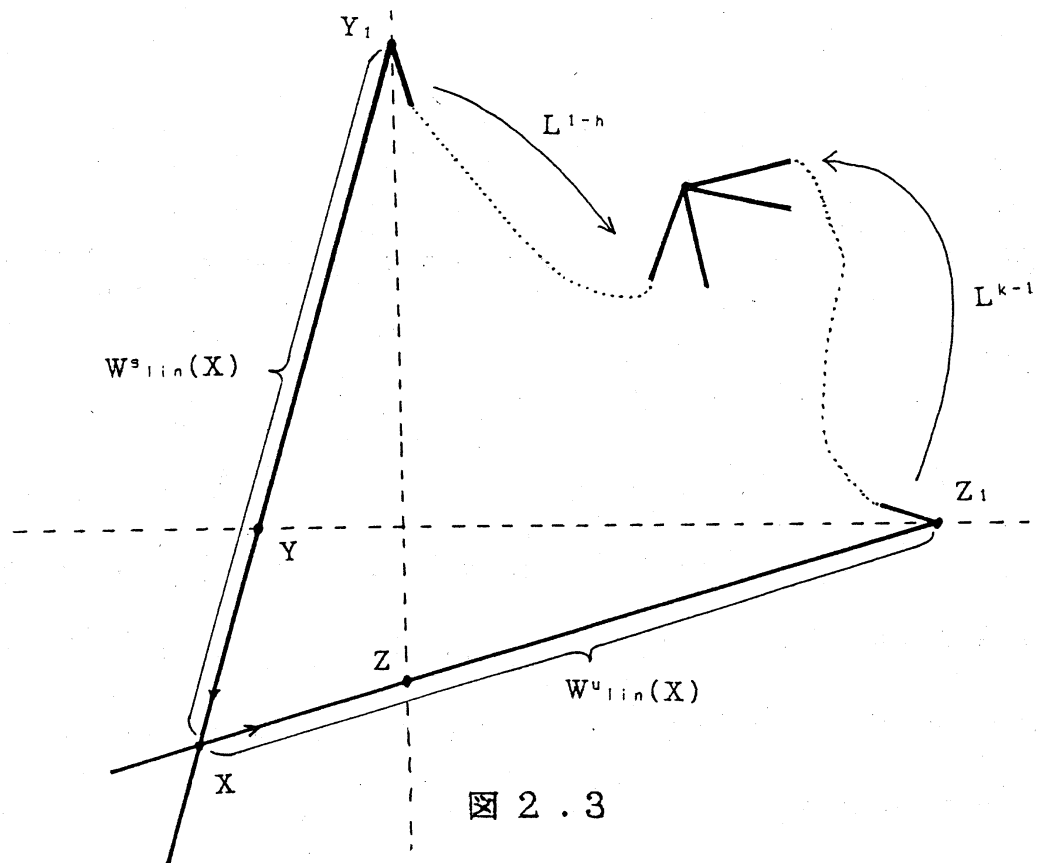


図 2.3

ここでホモクリニック点のシートを

$$HS = \{ (x, y; a, b) \mid \begin{array}{l} L^h(x, y) \in U(Y) \cap W^{s, \text{lin}}(X), \\ L^{-k}(x, y) \in U(Z) \cap W^{u, \text{lin}}(X) \end{array} \}$$

で定義する。 $U(Y), U(Z)$ は Y, Z の小さな近傍とする。

z_0 : $L^{-k}(x, y)$ の x 座標 y_0 : $L^h(x, y)$ の y 座標

とすれば, 区別 C^r 写像

$$(a, b) = g(z_0, y_0)$$

が存在して,

$$HS = \{ (L^k(z_0, 0); g(z_0, y_0)) \}$$

となる。ここで写像 g は図 2.4 で与えられるような形をしている。図 2.5 の分岐図を見れば, ホモクリニック点のシート HS の形状が理解し易いであろう。

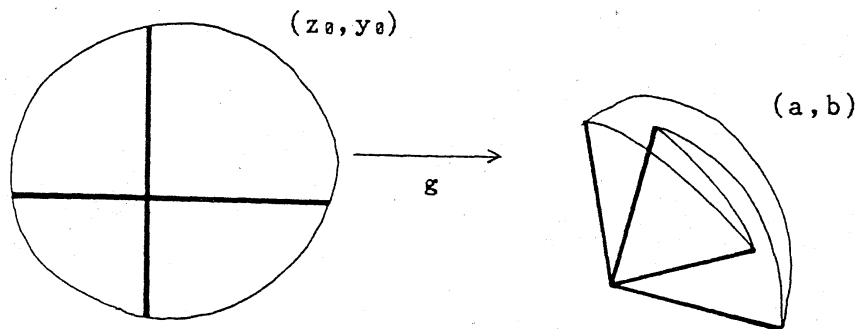


図 2.4

次にこのホモクリニックタンジェンシイに集積するタイプの
の周期解のシートを考える。

$$P S_n = \{ (x, y; a, b) \mid L^h(x, y) \in U(Y), L^{-k}(x, y) \in U(Z),$$

$$\left(\begin{array}{cc} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{array} \right)^n L^h(x, y) = L^{-k}(x, y) \quad \}$$

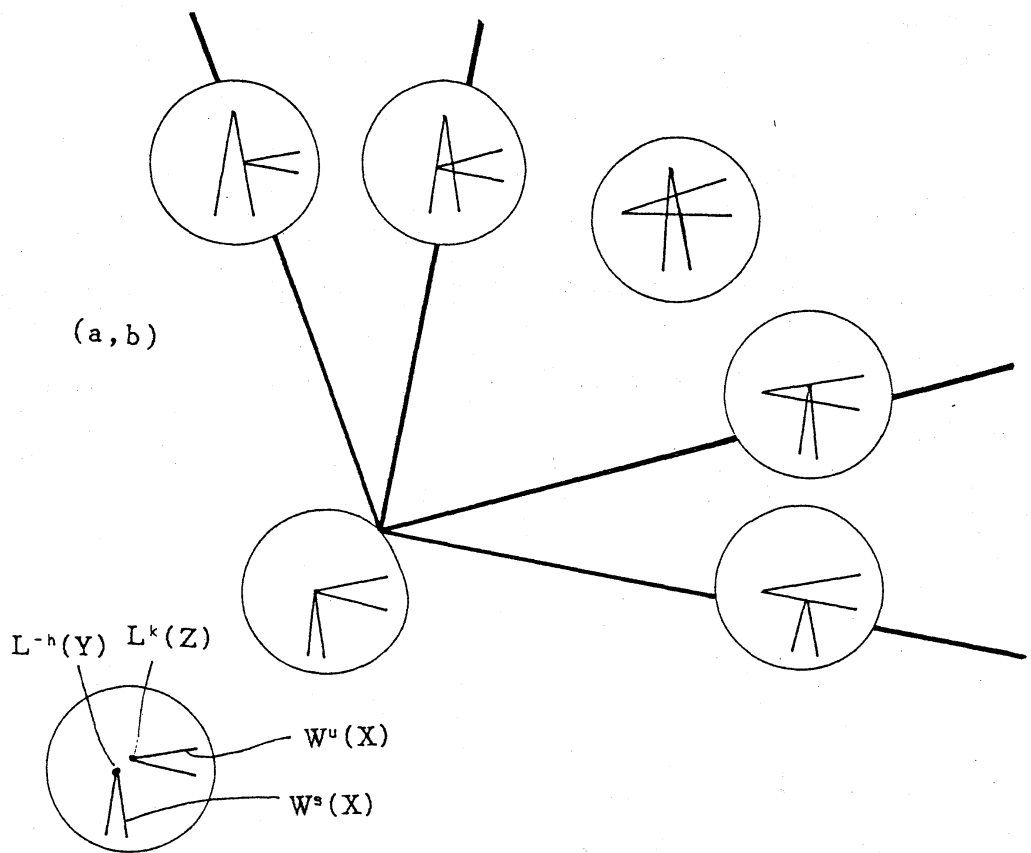


図 2.5

この $P S_n$ も区分 C^1 写像

$$(a, b) = g_n(z_0, y_0)$$

によって

$$P S_n = \{ (L^k(z_0, \lambda_s^n y_0), g_n(z_0, y_0)) \}$$

となる。 $g_n \rightarrow g$ ($n \rightarrow \infty$) であるので、この周期解のシートの形状はホモクリニク点のシートの形状と同様になる。

PS_n に属する周期解を記号列で表現してみる。

$$\begin{aligned} L(\lambda_u^{-n} z_a, y_a), \dots, L^{-2}(z_a, \lambda_s^n y_a) & : \underline{A} \\ (z_a, \lambda_s^n y_a), \dots, L^{-1}(\lambda_u^{-n} z_a, y_a) & : \underline{B} \end{aligned}$$

で $\underline{A}, \underline{B}$ は R, L からなる記号列であり、考えている範囲の径数値では変わらない。

$$L^{-1}(z_a, \lambda_s^n y_a), (\lambda_u^{-n} z_a, y_a)$$

の2点が径数値によって R, L, C のどれかに対応するが、一例として分岐図 2.6 のようになる。

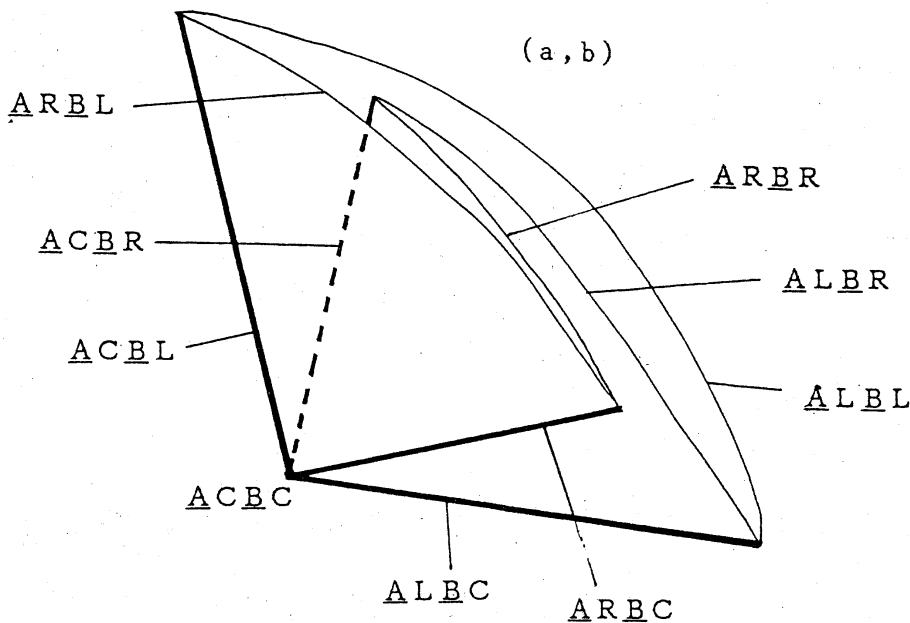


図 2.6

3. コネクションの例

この節ではLozi写像族の中で一番単純と思われる退化ホモクリニックタンジェンシイを考え、その近くの径数値を通して $b = 0$ での異なったタイプの周期解がつながることを実際に見てみよう。考える退化ホモクリニックタンジェンシイは図3.1のようなものである。このホモクリニックタンジェンシイ点の記号列表現をすると、 $R^{\circ}CRLCR^{\circ}$ となる。

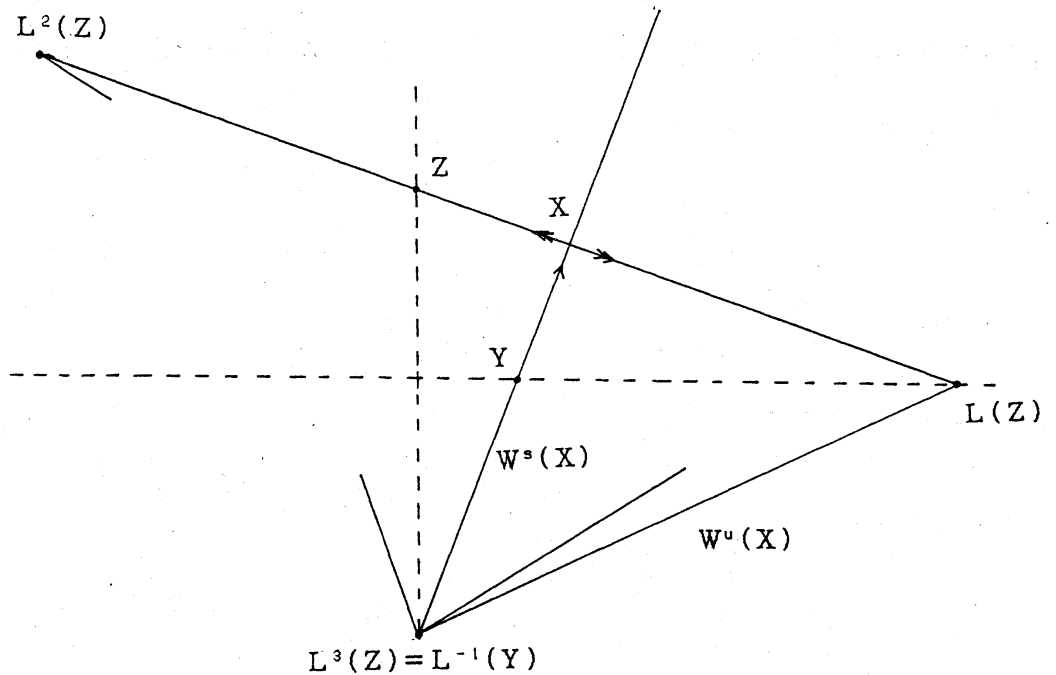


図3.1

これは $L^3(Z) = L^{-1}(Y)$ 即ち $h=1, k=3$ の場合である。さて、 $L^3(Z), L^{-1}(Y)$ の座標は径数 a, b を使って具体的に書け、

$$L^3(Z) = \left(\frac{\{2+4a-a^3-ab-(a^2-b)\sqrt{a^2+4b}\}}{2(1+a-b)}, \frac{\{2-2b-a^2-a\sqrt{a^2+4b}\}}{2(1+a-b)} \right)$$

$$L^{-1}(Y) = (0, \quad \{2b-a-\sqrt{a^2+4b}\}/2b(1+a-b))$$

となる。

これから $L^3(X) = L^{-1}(Y)$ を解いて、図 3.1 のようなホモクリニックタンジェンシイが存在する径数値 (\bar{a}, \bar{b}) を求めることができる。(数値計算では $\bar{a} \doteq 1.5195$, $\bar{b} \doteq 0.5491$)
 また、これらが前節の径数に関する条件を満たしていることも示されるので、 (\bar{a}, \bar{b}) の近くで次の分岐図で与えられるようなホモクリニックタンジェンシイの分枝が存在する。

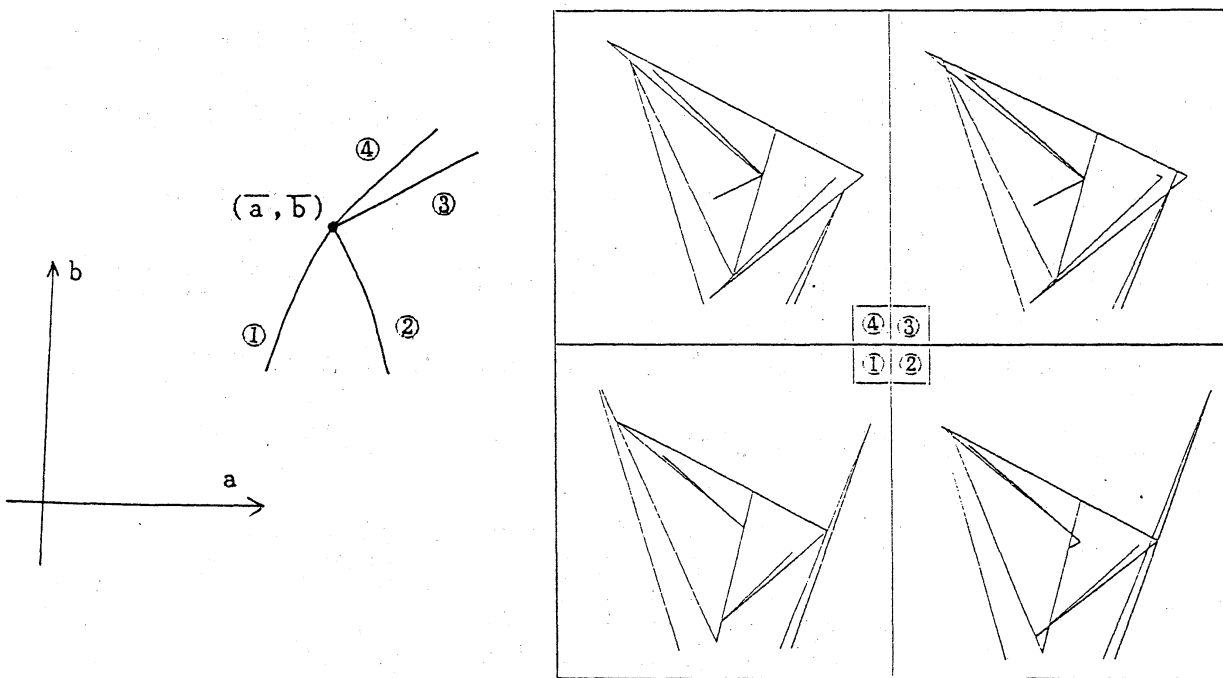


図 3.2

各分枝におけるホモクリニックタンジェンシイ点には表 3.3 のような記号列表現が対応する。

①	R [*] C R L R R [*]
②	R [*] C R L L R [*]
③	R [*] R R L C R [*]
④	R [*] L R L C R [*]

表 3.3

これらの分枝のうち①②については、それぞれ

$$L^3(Z) \subset W^{\text{sing}}(X), L^4(Z) \subset W^{\text{sing}}(X)$$

を解くことになるが、実際には大域的、即ち $b = 0$ まで①, ②の分枝が延長できることが示される。

さて前節の議論によれば十分大きな n に対して (\bar{a}, \bar{b}) の近くに径数値 (\bar{a}_n, \bar{b}_n) が存在して、そこに4本の周期解のサドルノード分岐の分枝が集まっている。これらの分枝のうち図 3.2 の①, ②に沿っているものについては、 n が十分大きければ $b = 0$ まで延長されることが示される。よって図 3.4 のような分岐図が得られる。各分枝における周期解には表 3.5 のような記号列表現が対応する。

① n	R L R R ⁿ C
② n	R L L R ⁿ C
③ n	R L C R ⁿ R
④ n	R L C R ⁿ L

表 3.5

特に図 3.2 の①, ②の分枝に沿って、 $b = 0$ まで延長される分枝について見ると次の結論が得られる。

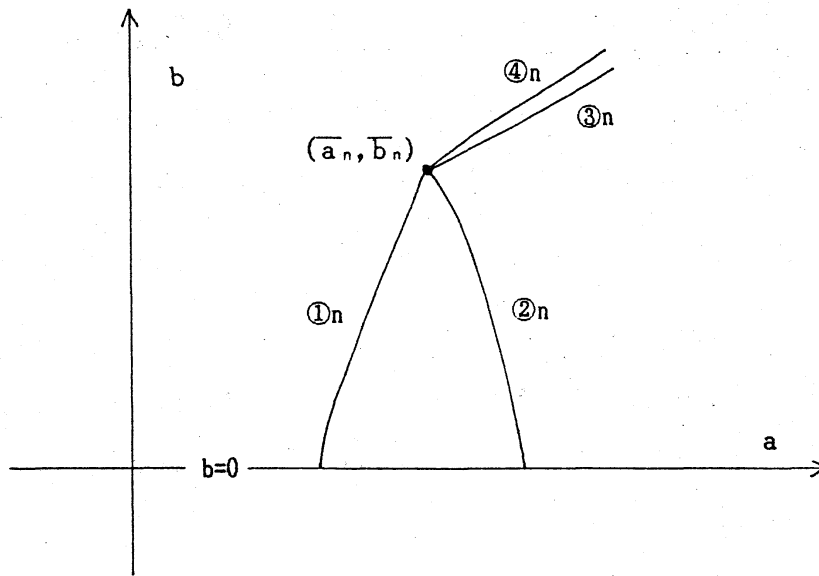


図 3.4

定理 Lozi写像族において十分大きな n に対し, $R L R^{n+1} C$ のタイプと $R L L R^n C$ のタイプの周期解は, 径数空間 (a, b) の $b > 0$ の中でつながっている.

このタイプの周期解のコネクションを実際に数値実験で調べたのが次の図 3.6 であり, 図中でつながっている周期解の記号列表現を与えたのが表 3.7 である. 図 3.6 に現れる分枝のうち b の減少方向に延びているものは実際に $b = 0$ まで延びている.

Reference

[CE] P.Collet and J.P.Eckmann, "Iterated maps on the interval as dynamical systems", Progress in Physics 1, Birkhauser, (1980).

[H] M.Hénon, "A two-dimensional mapping with a strange

attractor", Commun. Math. Phys. 50 (1976).

[L] R.Lozi, "Un attracteur étrange? du type attracteur de Hénon", J.Phys. (Paris) 39 (C5) (1978).

[Mr] C.Mira, "Chaotic Dynamics", World Scientific, (1987).

[Ms] M.Misiurewicz, "Strange attractor for the Lozi mappings" in "Nonlinear dynamics", Annals N.Y.Acad. Sci. 357 (1980).

[U] S.Ushiki, "Fine structure of bifurcation branches in Hénon's family of mappings" in "力学系理論の総合的研究昭和56年度記録集", (1982).

記号列	コネクション
R L R R ⁶ C	
R L R R ⁸ C	
R L R R ¹⁰ C	
R L R R ¹² C	
R L R R ¹³ C	
R L R R ¹¹ C	
R L R R ⁹ C	
R L R R ⁷ C	
R L L R ⁷ C	
R L L R ⁹ C	
R L L R ¹¹ C	
R L L R ¹³ C	
R L L R ¹² C	
R L L R ¹⁰ C	
R L L R ⁸ C	
R L L R ⁶ C	

表 3.7

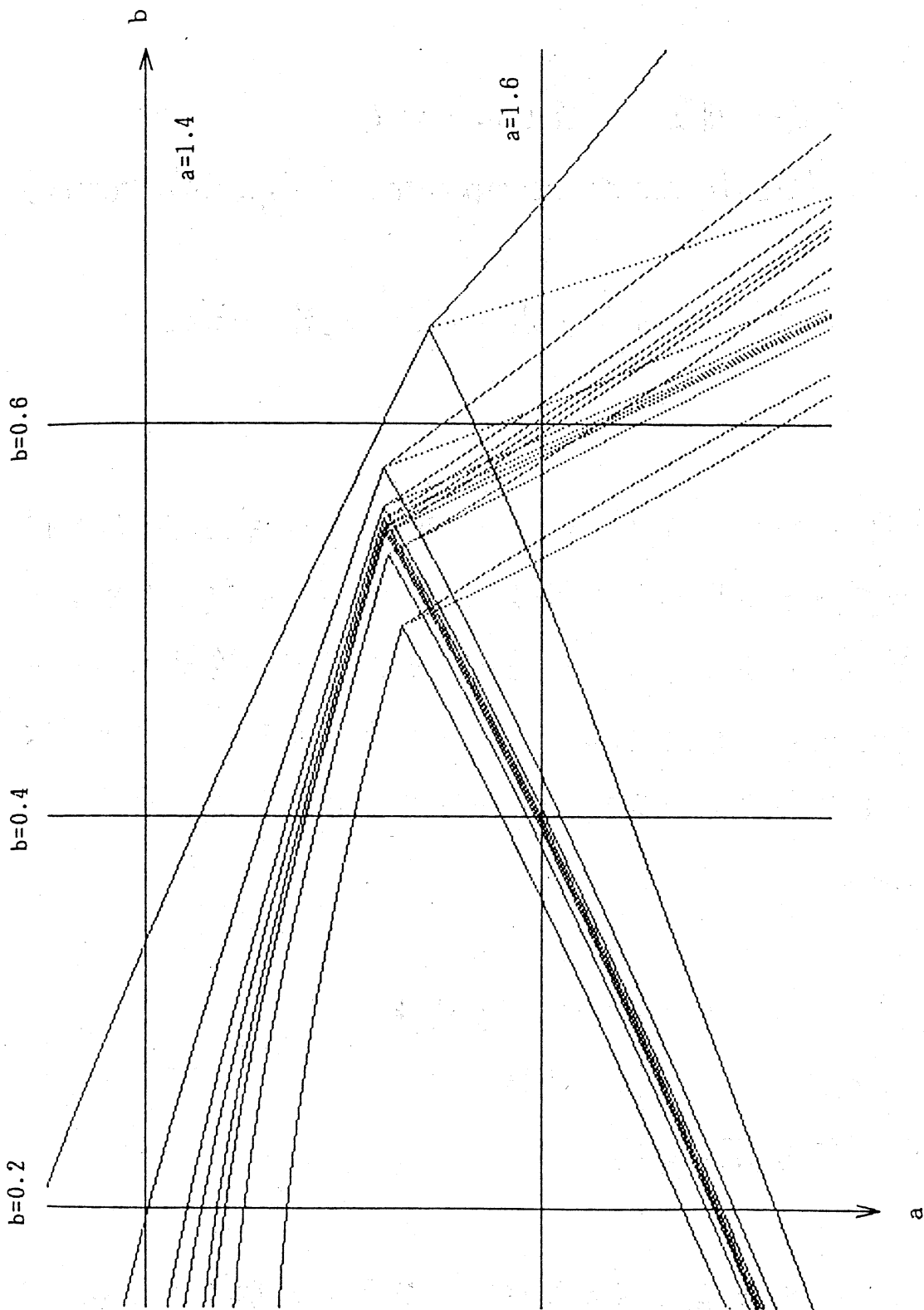


图 3.6