数理解析研究所講究録
第696巻 1989年 92-97

The stability of positively expansive open maps

筑波大数学系　平出耕一 (Koichi Hiraide)

(X,d) はコンパクト距離空間とし，$f:X\to X$ は上への連続写像とする．f が正拡大的(positively expansive)であるとは，定数 $c>0$ が存在して任意の $x,y\in X$ に対し $d(f^i(x),f^i(y))\leqq c$ $(\forall i\geqq 0)$ ならば $x=y$ となるときをいう．ここで c は f の拡大定数と呼ばれる．正拡大性の概念は X の距離の取り方に依存しない(拡大定数は変わるかもしれないが)．また位相共役に関して不変である．X が閉位相多様体のとき，正拡大的写像 $X\to X$ は開写像である．しかし一般には正拡大的写像が開写像になるとは限らない．次のことが知られている．

“正拡大的写像 $f:X\to X$ が開写像であるための必要十分条件は f がPOTPをもつことである”

このことから，正拡大的開写像はある種の安定性をもつことが予想される．このノートでは，安定性に関連する次の問題を考える．

Q. 正拡大的開写像 $f: X \to X$ が与えられたとき，f に十分近い正拡大的開写像 $g: X \to X$ は f と位相共役か？

以下では次の３つの場合に上の問題に対する部分解を与える.

A. X は閉位相多様体

B. X はコンパクト連結局所連結距離空間

C. X はコンパクト連結距離空間

Case A. この場合，$\delta > 0$ を十分小さくとると，２つの連続写像 $f, g: X \to X$ に対し

$$* \qquad d(f, g) = \max\{d(f(x), g(x)) : x \in X\} < \delta$$

ならば，f と g はホモトピックである．ホモトピックな２つの正拡大的写像は位相共役であるから，問題Qは，* の距離に関して肯定的に解ける．

Case B. この場合は，さらに X が弱局所単連結である場合とそうでない場合に分かれる．X が弱局所単連結の場合，正拡大的開写像 $X \to X$ が存在すれば，X は閉位相多様体でなければならない ([5]). したがって X は弱局所単連結でないとしてよい．そのような X 上の正拡大的開写像の例は，複素力学系の理論の中に見い出せる ([2]):

(例) $P:\mathbb{C}\cup\{\infty\}\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, $P(z)=z^2-1$ とする．Pのジュリア集合をJとおく．そのとき $P^{-1}(J)=J=P(J)$ で $P|_J:J\to J$ は正拡大的開写像である．さらにJは連結かつ局所連結であるが，弱局所単連結でない．

問題Qに対する一つの答えとして，次が成り立つ．

定理1．Xはコンパクト連結局所連結距離空間で，$f:X\to X$ は正拡大的開写像とする．そのとき任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して，正拡大的開写像 $g:X\to X$ が

(1) $d(f,g)<\delta$

(2) $\deg f=\deg g$

を満たすならば，同相写像 $h:X\to X$ が（一意的に）存在して $d(h,id)<\varepsilon$, $f\circ h=h\circ g$ となる．ここで $\deg f$, $\deg g$ はそれぞれ f, g の被覆度である．

$f:X\to X$ が ε-locally expansive $(\varepsilon>0)$ であるとは，$0<d(x,y)<\varepsilon$ ならば $d(f(x),f(y))>d(x,y)$ となるときをいう．この概念は距離dに依存することに注意する．ε-locally expansive な写像 $f:X\to X$ は拡大定数 $\varepsilon/2$ をもつ正拡大的写像である．定理1より次が得られる．

系. (X,d) はコンパクト連結局所連結距離空間とし，$f_i : X \to X$ $(i=0,1,2,\cdots)$ は ε-locally expansive な開写像とする．f_i が f_0 に一様収束するならば，任意の $\varepsilon>0$ に対して $N>0$ が存在して $i \geqq N$ に対して同相写像 $h_i : X \to X$ が（一意的に）存在して $d(h_i, id) < \varepsilon$，$f_0 \circ h = h \circ f_i$ となる．

これは Hu－Rosen([6]) の結果一不動点の安定性一，Sakai ([7])の結果一周期点の安定性一を含んでいる．

Case C. X は局所連結でないとする．先ず，そのような X 上の拡大的開写像の例を上げる([1])：

（例）$\mathbb{Z} \subsetneqq \tilde{\mathbb{Q}} \subsetneqq \mathbb{Q}$，$2\tilde{\mathbb{Q}} \subsetneqq \tilde{\mathbb{Q}}$ となる部分群 $\tilde{\mathbb{Q}}$ をとる．S_1 を $\tilde{\mathbb{Q}}$ の双対とする．そのとき S_1 は局所連結でないコンパクト連結距離空間（ソレノイダル群）である．さらに１対１連続写像 $\psi : \mathbb{R} \to S_1$ と図式

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "x \longmapsto 2x"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\psi"] \\ S_1 \arrow[r, "f"'] & S_1 \end{tikzcd}$$

を可換にする $f : S_1 \to S_1$ が存在する．このとき f は正拡大的開写像である．

問題Qに対して次が成り立つ.

定理2. Xはコンパクト連結距離空間とする. $f:X\to X$ は正拡大的開写像とする. そのとき, 任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して, 正拡大的写像 $g:X\to X$ が

(1) $\max\{d(f,g),\ \max_{x\in X} H(f^{-1}(x), g^{-1}(x))\}<\delta$

(2) $\deg f=\deg g$

を満たせば, 被覆写像 $h:X\to X$ が(一意的に)存在して $d(h, id)<\varepsilon$, $f\circ h=h\circ g$ となる. ここで $H(\cdot,\cdot)$はハウスドルフの距離である.

上の定理で, hは同相写像にできないことに注意する.

References

[1] N. Aoki, Expanding maps of Solenoids, Mh. Math., 105(1988), 1-34.

[2] P. Blanchard, Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bull. Amer. Math. Soc., 11(1984), 85-141.

[3] E. M. Coven and W. L. Reddy, Positively expansive maps of compact manifolds, Lecture Notes in Math., 819, Springer, 1980, 96-110.

[4] K. Hiraide, Positively expansive maps and growth of fundamental groups, Proc. Amer. Math. Soc., 104 (1988), 934-941.

[5] ________, Positively expansive open maps of Peano spaces, preprint.

[6] T. Hu and H. Rosen, Locally contractive and expansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 86 (1982), 656-662.

[7] K. Sakai, Periodic points of positively expansive maps, Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985), 531-534.