数理解析研究所講究録
第696巻 1989年 118-129

Perron-Frobenius 作用素のスペクトル

東大・教養　高橋 陽一郎 (Yoichiro Takahashi)
平田 雅樹 (Masaki Hirata)

§0. 序.

Perron-Frobenius 作用素は、数論的エルゴード理論では、連分数展開に附随した変換の不変測度等の研究を背景として、また、1960年代からは、1次元格子系統計力学における平衡状態に関連して研究されてきた。しかし、その性質は、対称でコンパクトな線型作用素などとは著しく異った特徴を持っている。

最近では、摂動された複素 Perron-Frobenius 作用素がさかんに研究され、区間上の Lasota-Yorke map に対する中心極限定理や局所極限定理を示すのに応用されている。また、1次元統計力学においては、相関関数の減衰の order の評価や、Ruelle-Artin-Mazur ζ-関数の性質を調べるのに用いられている。この小論では、まず Perron-Frobenius 作用素のスペクトルの性質について概観し、最後に、摂動された複素

Ruelle作用素 $\mathcal{L}_{u+i(v+tw)}$ (ただし、v は Pollicott の "a-関数") の絶対値最大固有値の作る曲線の $t=0$ での曲率がどのようになるか計算する。

以下、Lasota-Yorke map の Perron-Frobenius 作用素は、Symbolic Dynamics における Ruelle 作用素とパラレルに議論できることを考慮して、§2 以後では、話を Ruelle 作用素に限定して述べることにする。

§1. 定義、基本的性質.

$(X, \mathcal{B}, m)$ を確率空間とし、$T: X \to X$ を m-非特異変換とする。つまり、$m(T^{-1}(\cdot))$ が m に関し絶対連続とする。

このとき、T の Perron-Frobenius 作用素 $L: L^1(m) \to L^1(m)$ とは次のように定義される:

$$(Lf)(x) := \frac{d}{dm}\int_{T^{-1}(x)} f\, dm, \qquad f \in L^1(m).$$

今、作用素 $U: L^1(m) \to L^1(m)$ を $(Uf)(x) := f(Tx)$ と定義すれば、上の L は次のように特徴づけられる:

$$\int g(x)(Lf)(x)\, m(dx) = \int (Ug)(x) f(x)\, m(dx) \quad \text{for } {}^\forall g \in L^\infty(m)$$

<u>Rem.</u> もし、T が高々可算対1の写像であれば、次の関係を満たすような $g: X \to \mathbb{R}$ が存在する;

$$(\mathcal{L}f)(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}(x)} g(y) f(y).$$

このような g を "Jacobian" と呼ぶ。特に X が区間であり、T が区分的に滑らかであれば、$g(x) = 1/|T'(x)|$ となる。

以下、Perron-Frobenius 作用素の基本的性質をまとめておく。

(i) $h \in L^1(m)$, $\mathcal{L}h = h$ であれば、$d\mu := h\,dm$ は T-不変測度で、

$$\dim\{h \in L^1(m)\,;\, \mathcal{L}h = h\} = \#\{\text{ergodic components}\}$$

(ii) $\mathrm{Spec}\,\mathcal{L} \cap S^1 = \{\lambda \in \mathrm{Spec}\,\mathcal{L}\,;\, |\lambda| = 1\}$ と書くと、

$$\#(\mathrm{Spec}\,\mathcal{L} \cap S^1) = \#\{\text{mixing components}\}$$

(iii) U を $L^\infty(m)$ に制限して考えたもののスペクトル集合を $\mathrm{Spec}(U, L^\infty(m))$ と書くと、

$$\mathrm{Spec}\,\mathcal{L} \cap S^1 = \overline{\mathrm{Spec}(U, L^\infty(m))}$$

(iv) $\mathcal{L}1 = 1$ を仮定すると、$\mathcal{L}U = id.$, $U\mathcal{L} = T^{-1}\mathcal{B}$ への projection.

(v) T が injective でないなら、$\dim \ker \mathcal{L} = \infty$.

(vi) T が surjective で、かつ injective でないなら、$\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, |\lambda| < 1\}$ は $\mathrm{Spec}(\mathcal{L}, L^\infty(m))$ に含まれ、$|\lambda| < 1$ なる λ は固有値で、その多重度は ∞. かつ、Jorden block のサイズ $= \infty$.
(Takahashi [T])

(vii) 特に X が区間、T が Lasota-Yorke map の場合、$\mathrm{Spec}\,\mathcal{L} \cap S^1$ は有限集合であり、1 を含む。またこのとき、

$$BV := \{f \in L^1(m)\,;\, \text{bounded variation}\}$$

とすると、Lasota-Yorke の不等式([L])から、$L(BV) \subset BV$ となるので、L を BV に制限して考えると、

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, |\lambda| < e^{-h(T)}\} \subset \mathrm{Spec}(L, BV)$$

ただし、$h(T)$ = topological entropy of T.　(Keller [K])

以上のような Perron-Frobenius 作用素は、かなり特徴的な性質を持つ。序で述べたように以下、話を Ruelle 作用素に限定するが、上の BV はそこでは配置空間上の Lipschitz 連続関数のなす空間と対応している。

§2. Symbolic Dynamics と Ruelle 作用素

次のような Symbolic Dynamics を考えよう。以下の(　)内は1次元格子系統計力学としての解釈である。

$J = \{1, \cdots, r\}$ 有限集合　(粒子の種類を表わす集合)

$A = (A_{ij})_{i,j=1,\cdots,r}$　$A_{ij} = 1$ or 0. irreducible (構造行列)

$\Sigma_A^+ := \{x = (x_i)_{i=0}^\infty \in J^{\mathbb{N}} \,;\, A_{x_i x_{i+1}} = 1 \ \forall i \in \mathbb{N}\}$　(配置空間)

σ : shift変換 on Σ_A^+　i.e. $(\sigma x)_i = x_{i+1}$

$0 < \theta < 1$ を任意に固定し、Σ_A^+ 上に距離 d_θ を次のように入れる:

$$d_\theta(x, y) = \theta^n \quad \text{if } x_i = y_i \ \ i = 0, \cdots, n-1, \ x_n \neq y_n$$

$\mathcal{F}_\theta := \{d_\theta$ に関する Σ_A^+ 上の Lipschitz 連続関数全体$\}$

今、$f \in \mathcal{F}_\theta$ の Lipschitz constant を $\|f\|_\theta$ で表わすと、$|||\cdot|||_\theta = \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_\theta$ をノルムとして、$\mathcal{F}_\theta$ は Banach 空間になる。

さて、$u \in \mathcal{F}_\theta$ を Hamiltonian とし、Ruelle 作用素 $\mathcal{L}_u : \mathcal{F}_\theta \to \mathcal{F}_\theta$ を次のように定義する：

$$\mathcal{L}_u f(x) := \sum_{y \in \sigma^{-1}\{x\}} e^{u(y)} f(y) .$$

$\mathcal{L}_u$ は Σ_A^+ 上の適当な測度に関して、Perron-Frobenius 作用素の定数倍である。$\mathcal{L}_u$ については次の Ruelle の結果が基本的である。

定理 (Ruelle)

$\mathcal{L}_u$ は $e^{P(u)}$ ($P(u)$ は topological pressure) を simple な固有値としてもち、その固有関数は正値である。また $\exists \varepsilon > 0$ が存在して、他のスペクトルは半径 $(e^{P(u)} - \varepsilon)$ の円板内に含まれる。//

これは、非負行列に対する Perron-Frobenius の定理の拡張である。

Rem. topological pressure $P(u)$ は次の Gibbs 変分原理を満たす。

$$P(u) = \sup \{ h_\rho(\sigma) + \int u \, d\rho \ ; \ \rho \text{ は } \sigma\text{-不変確率測度 on } \Sigma_A^+ \}$$

ここで、$h_\rho(\sigma)$ は metrical entropy。

特に、$P(u) = h_\rho(\sigma) + \int u \, d\rho$ を満たす ρ は平衡状態と呼ばれる。上の設定の下では、平衡状態は一意に存在する（つまり相転移がない）ことが知られている。

§3、複素 Ruelle 作用素のスペクトル

Wielandt は、ある特別の複素行列に対して、非負行列に対する Perron-Frobenius の定理と同様の事実が成立するこ

とを示した([G], p.57)が、M. Pollicottは、Ruelleの定理についても同様の複素化ができることを示した。([P.1])
つまり、§2の設定で関数を$\mathbb{C}$-値とし、Lipschitz連続関数の空間を$\mathcal{F}_\theta^{\mathbb{C}}$と書くと、$u+iv \in \mathcal{F}_\theta^{\mathbb{C}}$ ($\Leftrightarrow u, v \in \mathcal{F}_\theta$)に対し、複素Ruelle作用素$\mathcal{L}_{u+iv} : \mathcal{F}_\theta^{\mathbb{C}} \to \mathcal{F}_\theta^{\mathbb{C}}$が$\mathbb{R}$-値のときと同様に定義できる。つまり、

$$\mathcal{L}_{u+iv} f(x) := \sum_{y \in \sigma^{-1}\{x\}} e^{u(y)+iv(y)} f(y).$$

このとき次の事実が成立する:

定理 (Pollicott)

$u+iv \in \mathcal{F}_\theta^{\mathbb{C}}$について、$^\exists w \in C(\Sigma_A^+)$, $^\exists a \in [0, 2\pi)$ s.t.

$v - a + w\circ\sigma - w \in C(\Sigma_A^+ \to 2\pi\mathbb{Z})$.

(このとき vは"a-関数"であるという)

$\Rightarrow e^{ia+P(u)}$ ($P(u)$はtopological pressure)は$\mathcal{L}_{u+iv}$のsimpleな固有値である。また、$^\exists \varepsilon > 0$が存在して、他のスペクトルは半径$(e^{P(u)} - \varepsilon)$の円板内に含まれる。//

(注: 実は一般に$\mathrm{Spec}(\mathcal{L}_{u+iv}) = e^{ia}\mathrm{Spec}(\mathcal{L}_u)$である。)

また、vが如何なる$a \in [0, 2\pi)$に対してもa-関数にならないとき、$\mathcal{L}_{u+iv}$の全てのスペクトルは半径$(e^{P(u)} - \varepsilon)$の円板内に含まれることもわかる。

さらに、スペクトルの型について、Pollicott [P.3] は、

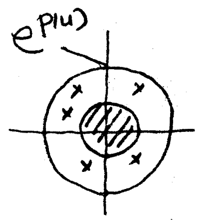
Nussbaum の essential spectral radius formula を用いて、次のことを示した。

定理 (Pollicott)

$\mathcal{L}_{u+iv}$ のスペクトルは次の2つの部分に分れる：

(i) 円板 $\{\lambda\in\mathbb{C} ; |\lambda|\le \theta e^{P(u)}\}$ 内の全ての点.

(ii) 円環 $\{\lambda\in\mathbb{C} ; \theta e^{P(u)}<|\lambda|\le e^{P(u)}\}$ 内の有限個の有限多重度の孤立した固有値. //



Rem. Ruelle [Ru] は、上の円環領域内の固有値に対応する $\mathcal{L}_{u+iv}^*$ への一般化された固有ベクトル（これは一般に signed-measure の空間より広い空間 $\mathcal{F}_\theta^*$ に属する）が、平衡状態の複素化された概念になっていることを示し、"Gibbs-distribution" と呼んでいる。

また、$\mathcal{L}_{u+itv}$ $(u, v\in\mathcal{F}_\theta, t\in\mathbb{R})$ に対し、（必要があれば、$e^{P(u)}$ に対応する $\mathcal{L}_u$ の固有関数を用いて規格化して）、$\mathcal{L}_u 1=1$ とする。このとき、

$$G[v] := \{(t,a,h) ; \mathcal{L}_{u+itv} h = e^{ia} h ,\ t,a\in\mathbb{R}, |h|=1\}$$

とおくと、これは群をなし、Morita [M] の分類は Ruelle 作用素の場合、次のように拡張される。

命題

$v\in\mathcal{F}_\theta$ かつ $\rho(v)=0$ とする。ここで ρ は Hamiltonian u に対する平衡状態。また、次の量を定義する：

$$\sigma(v)^2 := \lim_{n\to\infty} \int \left\{ \frac{S_n(v-\rho(v))}{\sqrt{n}} \right\}^2 d\rho$$

ここで $S_n f(\cdot) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma^k \cdot)$.

このとき、$G[v]$ は次のように分類できる。

(i) $\sigma(v)^2 = 0$

(ii) $G[v] \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ or $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}$ or

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ or $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ or

$\mathbb{Z}\times\{0\}\times\{0\}$ $(p,q>1)$ //

注; Morita [M] は上の分類を区間上の mixing Lasota-Yorke map の場合に示し、その map に対する局所極限定理の証明に応用している。

§4. 摂動された複素 Ruelle 作用素

以下、$\mathcal{L}_u 1 = 1$ と規格化して考えることにする。

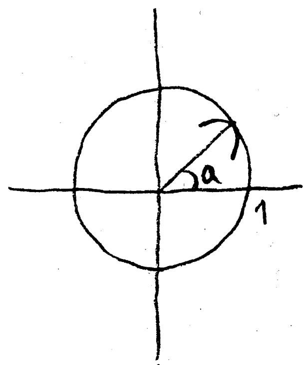
このとき、Hamiltonian u に対する平衡状態を ρ とすれば、Ruelle 作用素 $\mathcal{L}_u$ は ρ に関する shift σ の Perron-Frobenius 作用素であることがわかるから、この平衡状態に関する相関関数 $C_n(\varphi,\psi)$ は $\mathcal{L}_u$ を使って表わすことができる。つまり、

$$C_n(\varphi,\psi) := \int \varphi(\sigma^n x)\psi(x)\rho(dx) - \int\varphi\,d\rho\cdot\int\psi\,d\rho$$

$$= \int \varphi\cdot\mathcal{L}_u^n\psi\,d\rho - \int\varphi\,d\rho\cdot\int\psi\,d\rho .$$

Pollicott [P.2] は Special flow 上で、上のような相関関数の減衰の order を Hamiltonian の虚部を摂動した Ruelle-作用素 $\mathcal{L}_{u+itw}$ (ただし、w は Special flow の天井関数) を用いて評価している。

以上のような背景から、摂動された複素 Ruelle 作用素の性質、特にその絶対値最大の固有値の挙動について考えることは興味深い。さて、一般に $\mathcal{L}_{u+i(v+tw)}$ の絶対値最大の固有値 $\lambda(t)$ は simple であれば、ある範囲では t について analytic である。今、v が a-関数であれば、Pollicott の結果から、e^{ia} は $\mathcal{L}_{u+iv}$ の simple な絶対値最大の固有値である。よって、$\mathcal{L}_{u+i(v+tw)}$ の絶対値最大の固有値 $\lambda(t)$ は $t=0$ の近傍で、右図のような曲線を描くことが予想される。そこで、曲線 $\lambda(t)$ の e^{ia} での接し方、つまり曲率を計算してみると、それは、次のような量であることがわかる。



定理.

$$\text{曲率} = 1 + \frac{\sigma(w)^2}{\rho(w)^2}$$

ここで、ρ は u に対する平衡状態。$\sigma(w)^2$ は §3 の命題の中で定義された量である。//

<u>Rem</u>. ここに現われる量の意味を述べておこう。$\{w\circ\sigma^n\}$ を確率変数列と見れば、中心極限定理が成り立つ。$\rho(w)$, $\sigma(w)$ は、その極限として現われる正規分布の平均と分散である。(つまり、曲率は w には依存しない。). 証明は、Perron-Frobenius 作用素の基本的性質と Rousseau-Egele [Ro] の手法を用いて示される。(詳しくは平田 [H])

§5、終わりに

以上、Perron-Frobenius 作用素及び、その摂動された作用素のスペクトルについて述べてきたが、上で触れなかった重要なテーマとして、Artin-Mazur の ζ-関数及び Fredholm determinant との関係がある。これらについては、[P.P.], [P.3], [T] 等の文献がある。

References.

[G]. Gautmacher, F.R. "The Theory of Matrix, vol II" Chelsea, New York, 1974.

[H]. 平田 雅樹. "複素Ruelle-Perron-Frobenius 作用素のスペクトル" 東大・相関理化学・修士論文.

[K]. Keller, G. "On the rate of convergence of Equilibrium in 1-dimensional system", Commun. Math. Phys. 96, 181-193 (1984)

[L] Lasota, A. and York, J. "On the existance of invariant measures for piecewise monotonic transformations", Trans. Amer. Soc. 186, 481-488 (1973)

[M] Morita, T. "Generalized local limit theorem for Lasota-Yorke transformation", preprint.

[P.P.] Parry, W. and M. Pollicott "An analogue to the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows." Annals of Math. 118, 573-591 (1983).

[P.1] Pollicott, M. "A complex Ruelle-Perron-Frobenius theorem and two counter examples", Ergod. Th. & Dynam. Sys. 4, 135-146 (1984)

[P.2] ———, "On the rate of mixing of Axiom A flows", Invent. Math. 81, 413-426 (1985)

[P.3] ———, "Meromorphic extensions of generalized zeta functions", Invent. Math. 85, 147-164 (1986)

[Ro] Rousseau-Egele, J "Un théorème de la limite locale pour classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux", Annals of Prob. 11, 772-788 (1983)

//

[T] Takahashi, Y. "Fredholm determinant of unimodal linear maps", Sci. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo 30, 61-87 (1981).