数理解析研究所講究録
第 698 巻 1989 年 102-126

Banach空間における非線形発展作用素とその無限小生成作用素

広大理　大春慎之助 (Shinnosuke Oharu)
広大理　松本敏隆 (Toshitaka Matsumoto)

はじめに　本報告ではBanach空間における発展作用素の生成と無限小生成作用素による特徴付けについて最近得られた結果について報告する。

$(X,|\cdot|)$ をBanach空間とし、時間変数の区間 $[0,T]$ に対して X の部分集合族 $\mathcal{D}=\{D(s): s\in[0,T]\}$ を考える。X における作用素の族 $\mathcal{U}=\{U(t,s): 0\le s\le t\le T\}$ が次の2つの条件をみたすとき、この族を $\mathcal{D}$ 上の発展作用素という.

(E1)　$0\le r\le s\le t\le T$ に対して $U(t,s)$ は $D(s)$ を $D(t)$ に写し、任意の $x\in D(r)$ に対して

$$U(r,r)x=x \quad かつ \quad U(t,r)x=U(t,s)U(s,r)x$$

(E2)　任意の $x\in D(r)$ に対して $U(t,r)x$ は t に関して $[r,T]$ で連続。

発展作用素の一般的な性質を組織的かつ統一的に調べるためには $\mathcal{U}$ の連続性と時間変数 t に関する時間依存性によって発

展作用素を分類して適当なクラスを考える必要がある。ここでは文献[7]で導入された非線形発展作用素のクラス $\mathcal{E}(\mathcal{D},\omega,f)$ について考察する。即ち上記の(E1)と(E2)に加えて次の条件をおく.

(E3) 実数 ω とクラス $\mathcal{F}$ に属する $[0,T]\times[0,T]$ 上の実数値関数 f が存在して、$0\le r\le s\le T$, $0\le t\le T-s$, $x\in D(s)$, $y\in D(r)$ に対して

$$|U(t+s,s)x-U(t+r,r)y|\le e^{\omega t}|x-y|+\int_0^t e^{\omega(t-\xi)}f(\xi+s,\xi+r)\,d\xi$$

条件(E3)は非線形作用素の半群の準縮小性の条件を時間依存の場合に拡張したものである。

クラス $\mathcal{E}(\mathcal{D},\omega,f)$ の発展作用素は X における時間依存の発展方程式に対する初期値問題

$$(CP)\begin{cases} u'(t)\in A(t)u(t), & r<t<T \\ u(r)=x\in D(r), & 0\le r<T \end{cases}$$

の一般化された意味での解を与える作用素の族として現われる。初期値問題(CP)は多くの人々によって研究されて来た。とくに一般化された意味での解の存在を保障する十分条件については Crandall and Pazy [3], Evans [4], Kato [8], Kobayasi et al. [11], Pavel [13], Iwamiya et al [7] などにより多くの結果が得られている。非線形半群については線形理論に

おけるHille-Yosidaの定理の非線形半群の場合への拡張がKōmura [12] によりHilbert空間において得られた。その後、Kōmuraの定理はBaillon [1], Reich [14] によって"smooth"なBanach空間に拡張され、さらにKobayashi [9], Kobayashi and Oharu [10] 等によって局所的にLipschitz連続な作用素の半群の場合に拡張されている。

この報告ではクラス$\mathcal{E}(\mathcal{D},\omega,f)$の発展作用素に対するHille-Yosida型の定理を与えることについて論じる。証明にはKobayashi and Oharu [10] において用いられた手法を時間依存の場合に拡張したものを適用する。オ1節では非線形発展作用素のクラス$\mathcal{E}(\mathcal{D},\omega,f)$について述べる。オ2節では接触条件の下でクラス$\mathcal{E}(\mathcal{D},\omega,f)$の発展作用素を生成することについて論じる。オ3節では右微分係数の拡張として解釈される一般化された意味での無限小生成作用素(g.i.g.)を導入し、このような無限小生成作用素に対して一般のBanach空間において成り立つ性質について述べる。オ4節ではBanach空間を制限した上で、そこに与えられた発展作用素のg.i.g.が存在し、かつ接触条件をみたすことを示す。このためには発展作用素の定義域$\mathcal{D}$に制限を加える必要があるが、その条件は$\mathcal{D}$が非柱状領域になる場合を含んでいる。

1. 非線形発展作用素のクラス

$(X, |\cdot|)$ を Banach空間とする。$x, y \in X$ と $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$[x, y]_\lambda = \lambda^{-1}(|x+\lambda y| - |x|)$$

$$[x, y]_+ = \inf_{\lambda > 0} [x, y]_\lambda = \lim_{\lambda \downarrow 0} [x, y]_\lambda$$

$$[x, y]_- = -[x, -y]_+$$

と定める。汎関数 $[\cdot, \cdot]_+ : X \times X \to \mathbb{R}$ は上半連続で次の性質(i)〜(iv)をもつことが知られている。([4])

(i) $[x, \alpha x + y]_+ = \alpha |x| + [x, y]_+ \quad , \alpha \in \mathbb{R}$

(ii) $[x, \alpha y]_+ = \alpha [x, y]_+ \quad , \quad \alpha > 0$

(iii) $[x, y]_- - [x, z]_+ \leq [x, y-z]_- \leq [x, y]_+ - [x, z]_+$

$[x, y+z]_+ \leq [x, y]_+ + [x, z]_+$

(iv) $|[x, y]_+| \leq |y| \quad , \quad [x, x]_+ = |x|$

文献[ ]に従って次のような発展作用素の族を導入する。

$T > 0$ とし、発展作用素の時間依存度を定める関数の族 $\mathcal{F}$ は次の(i)(ii)をみたす関数 $f(s,t)$ から成っているとする。

(i) $f \in C([0,T] \times [0,T])$

(ii) $f(t,t) = 0 \quad , \quad f(t,s) = f(s,t) \geq 0 \quad , \quad 0 \leq s, t \leq T$

<u>定義 1.1</u> $\mathcal{D} = \{D(s) : s \in [0,T]\}$ を X の空でない部分集合族、$\omega \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}$ とする。X における作用素の族 $\mathcal{U} = \{U(t,s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$

が次の3条件をみたすとき$\mathcal{U}$はクラス$\mathcal{E}(\mathcal{D},\omega,f)$の発展作用素であるという：

(E1) $0\le r\le s\le t\le T$に対して $D(U(t,s))=D(s)$, $R(U(t,s))\subset D(t)$, $x\in D(r)$に対して

$$U(r,r)x=x\ ,\ U(t,r)x=U(t,s)U(s,r)x$$

(E2) $s\in[0,T]$と$x\in D(s)$に対して $U(\cdot,s)x\in C([s,T]:X)$

(E3) $0\le r\le s\le T$, $0\le t\le T-s$, $x\in D(s)$, $y\in D(r)$に対して

$$|U(t+s,s)x-U(t+r,r)y|\le e^{\omega t}|x-y|+\int_0^t e^{\omega(t-\xi)}f(\xi+s,\xi+r)\,d\xi$$

2. 生成定理

この節ではクラス$\mathcal{E}(\mathcal{D},\omega,f)$の発展作用素の生成定理を与える。$\mathcal{A}=\{A(t):0\le t\le T\}$をBanach空間$X$における作用素の族とする。集合$\{(t,x):t\in[0,T],x\in D(A(t))\}$の$[0,T]\times X$における閉包を$\mathcal{D}$で表わし、各$t\in[0,T]$に対して$D(t)=\{x\in X:(t,x)\in\mathcal{D}\}$とおく。$\mathcal{A}$に対して次のような条件(C)を考える。

(C) ある定数$\omega\in\mathbb{R}$と$f\in\mathcal{F}$が存在して次の4条件をみたす。

(C1) $s,t\in[0,T]$, $(u,v)\in A(s)$, $(x,y)\in A(t)$に対して

$$[u-x,v-y]_-\le\omega|u-x|+f(s,t)$$

(C2) $x\in D(t)$に対して $\liminf_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{-1}d(R(I-\lambda A(t+\lambda)),x)=0$

(C3) $t_n\in[0,T)$, $x_n\in D(A(t_n))$, $t_n\uparrow t\in(0,T]$, $x_n\to x\in X$ならば $x\in\overline{D(A(t))}$

<u>定理2.1</u>　作用素の族 $\mathcal{A}=\{A(t): 0\le t\le T\}$ が条件(C)をみたしているとする。このとき次の性質(2.1)(2.2)をもつクラス $\mathcal{E}(D,\omega,f)$ の発展作用素 $\mathcal{U}$ が存在する.

(2.1)　$0\le s<t\le T$ に対して $U(t,s): D(s)\to \overline{D(A(t))}\subset D(t)$.

(2.2)　$0\le s\le t\le T$, $0\le r<T$, $x\in D(s)$, $(z,w)\in A(r)$ に対して

$$|U(t,s)x-z|-|x-z|\le\int_s^t\left([U(\xi,s)x-z,w]_+ +\omega|U(\xi,s)x-z|+f(\xi,r)\right)d\xi$$

<u>証明</u>. $s\in[0,T)$ と $x\in D(s)$ を固定すると条件(C2)と f の連続性により、次の(2.3)をみたす $[0,T]$ の分割の列 $\{\Delta^n\}$, $(0,T]$ 上で定義された X-値階段関数の列 $\{\varepsilon^n(\cdot)\}$、及び $[0,T]$ 上で定義された X-値階段関数の列 $\{u^n(\cdot)\}$ が存在することが示される:

$$(2.3)\quad\begin{cases}\Delta^n=\{s=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_{N(n)}^n\le T\}\\ t\in(t_{k-1}^n,t_k^n] \text{ のとき } \varepsilon^n(t)=\varepsilon_k^n, & 1\le k\le N(n)\\ u^n(0)=x_0^n=x\\ t\in(t_{k-1}^n,t_k^n] \text{ のとき } u^n(t)=x_k^n, & 1\le k\le N(n)\\ (t_k^n-t_{k-1}^n)^{-1}(x_k^n-x_{k-1}^n)-\varepsilon_k^n\in A(t_k^n)x_k^n, & 1\le k\le N(n)\\ \lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le N(n)}(t_k^n-t_{k-1}^n)=0, \quad \lim_{n\to\infty}t_{N(n)}^n=T\\ \lim_{n\to\infty}\int_0^T|\varepsilon^n(t)|\,dt=0\\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N(n)}\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}|f(\xi,r)-f(t_k^n,r)|\,d\xi=0, & 0\le r\le T.\end{cases}$$

従って発展作用素の生成定理([11])を適用することにより、定理2.1が得られる。

証明終

3. 一般化された無限小生成作用素

クラス$\mathcal{E}(\mathcal{D},\omega,f)$の発展作用素$\mathcal{U}$に対して一般化された意味での無限小生成作用素(g.i.g.) $A^+=\{A^+(s): 0\leq s<T\}$を次のように定める。

定義3.1　$s\in[0,T)$, $h\in(0,T-s]$に対して$A_h(s)=h^{-1}(U(s+h,s)-I)$とおく。$(x,y)\in A^+(s)$を次で定める:

各$h\in(0,T-s]$に対して$(x_h,y_h)\in A_h(s)$が存在して

$X\times X$において　$\lim_{h\downarrow 0}(x_h,y_h)=(x,y)$.

注意　$A_0(s)x=\lim_{h\downarrow 0}A_h(s)x$とおくと定義から$A_0(s)\subset A^+(s)$が成り立つ。$A_0(s)$は通常$s$における無限小生成作用素とよぶから$A^+(s)$をこの意味で"一般化された"と呼ぶ。

命題3.2.　$\mathcal{U}$をクラス$\mathcal{E}(\mathcal{D},\omega,f)$の発展作用素、$A^+$を$\mathcal{U}$のg.i.g.とすると次が成り立つ:

$0\leq s\leq t<T$, $(x,y)\in A^+(s)$, $(\hat{x},\hat{y})\in A^+(t)$に対して

(3.1)　$[x-\hat{x},y-\hat{y}]_-\leq\omega|x-\hat{x}|+f(s,t)$

<u>証明</u>　$(x,y)\in A^+(s)$, $(\hat{x},\hat{y})\in A^+(t)$ とすると定義3.1より、$h\in(0,T-t]$ に対して $x_h\in D(s)$, $\hat{x}_h\in D(t)$ が存在して、

$$\lim_{h\downarrow 0}(x_h, A_h(s)x_h)=(x,y),\quad \lim_{h\downarrow 0}(\hat{x}_h, A_h(t)\hat{x}_h)=(\hat{x},\hat{y}).$$

$\mathcal{U}$ に対する仮定 (E3) により、$\lambda>0$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}&|(x_h-\hat{x}_h)-\lambda(A_h(s)x_h-A_h(t)\hat{x}_h)|\\ &=|(1+\lambda h^{-1})(x_h-\hat{x}_h)-\lambda h^{-1}(U(s+h,s)x_h-U(t+h,t)\hat{x}_h)|\\ &\geq (1-\lambda h^{-1}(1-e^{\omega h}))|x_h-\hat{x}_h|-\lambda h^{-1}\int_0^h e^{\omega(h-\xi)}f(\xi+s,\xi+r)\,d\xi.\end{aligned}$$

ここで $h\downarrow 0$ として

$$|x-\hat{x}-\lambda(y-\hat{y})|\geq(1-\lambda\omega)|x-\hat{x}|-\lambda f(s,t).$$

これより　$\lambda^{-1}(|x-\hat{x}|-|x-\hat{x}-\lambda(y-\hat{y})|)\leq\omega|x-\hat{x}|+f(s,t)$

となり、$\lambda\downarrow 0$ とすれば (3.1) が得られる。　　証明終.

次に後の議論のために次の補題を準備する。

<u>補題3.3.</u>　$\mathcal{U}$ をクラス $\mathcal{E}(\mathcal{D},\omega,f)$ の発展作用素とし, $h\in(0,T)$ $r,s\in[0,T)$ とする。このとき $nh\in(0,T-s]$ をみたす自然数 n と $x\in D(s)$ 及び $z\in D(r)$ に対して次の不等式が成り立つ:

$$|U(nh+s,s)x-z|-|x-z|$$

$$\text{(3.2)}\quad \leq h\sum_{k=1}^{n}\left([U(kh+s,s)x-z, A_h(r)z]_+ + h^{-1}(e^{\omega h}-1)|U((k-1)h+s,s)x-z|\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\int_0^h e^{\omega(h-\xi)}f(\xi+(k-1)h+s,\xi+r)\,d\xi.$$

(証明略。)

次の結果は発展作用素$\mathcal{U}$がその g.i.g. $\{A^+(t)\}$に対して作られた初期値問題

$$\begin{cases} u'(t) \in A^+(t)\,u(t) & , \quad s<t<T \\ u(s) = x \in D(s) & , \quad 0 \leq s < T \end{cases}$$

の integral solution になっていることを示している。

<u>命題3.4.</u>　$\mathcal{U}$をクラス$\mathcal{E}(\mathcal{D},\omega,f)$の発展作用素、$A^+$を$\mathcal{U}$の g.i.g. とすると次の不等式が成り立つ:

$0 \leq s \leq t \leq T$, $0 \leq r < T$, $x \in D(s)$, $(z,w) \in A^+(r)$ に対して

$$|U(t,s)x - z| - |x - z|$$
$$\leq \int_s^t \Big([\,U(\xi,s)x - z,\ w\,]_+ + \omega\,|U(\xi,s)x - z| + f(\xi,r) \Big)\, d\xi .$$

(証明略)

4. 接触条件

$\mathcal{U}$をクラス$\mathcal{E}(\mathcal{D},\omega,f)$の発展作用素、$A^+$を$\mathcal{U}$の g.i.g. とする。この節では Banach 空間と領域$\mathcal{D}$に対して条件を置き、この条件の下でA^+が接触条件をみたすことを示す。先ず Banach 空間のクラスを制限する。

定義4.1　Banach空間 $(X, |\cdot|)$ が次の(4.1)をみたすとき、一様にGâteaux微分可能なノルムをもつという：

$$(4.1)\quad \begin{cases} M>0,\ y\in X,\ \varepsilon>0 \text{ に対してある } \delta>0 \text{ が存在し、} \\ \lambda\in(0,\delta],\ |x|\leq M \text{ に対して次が成立する.} \\ (2\lambda)^{-1}\left(|x+\lambda y|^2+|x-\lambda y|^2-2|x|^2\right)\leq\varepsilon . \end{cases}$$

次に $\mathfrak{N}$ を $\mathbb{N}$ 上の超フィルターとし、$\nu : 2^{\mathbb{N}}\to\{0,1\}$ を

$$\nu(B)=\begin{cases} 1 & (B\in\mathfrak{N}) \\ 0 & (B\notin\mathfrak{N}) \end{cases}$$

で定めると ν は $\mathbb{N}$ 上の有限加法的測度となる。$\{a_n\}\in l^\infty$ に対して

$$\lim_{n}{}_{\mathfrak{N}}\, a_n=\int_{\mathbb{N}} a_n\, d\nu$$

とおくと $\lim_{\mathfrak{N}}$ は l^∞ 上の連続線形汎関数で次の性質(4.2)をもつ。([5]，[15])

$$(4.2)\quad \begin{cases} \lim_{n}{}_{\mathfrak{N}}\, a_n b_n=\lim_{n}{}_{\mathfrak{N}}\, a_n\cdot\lim_{n}{}_{\mathfrak{N}}\, b_n \\ \liminf_{n\to\infty} a_n\leq\lim_{n}{}_{\mathfrak{N}}\, a_n\leq\limsup_{n\to\infty} a_n \end{cases}$$

超フィルター $\mathfrak{N}$ を固定して次のような性質(※)を考える.

(※)　Banach空間 X の任意の弱相対コンパクト列 $\{x_n\}$ に対して次が成り立つ：

任意の $x\in X$ に対して

$$\lim_{n}{}_{\mathfrak{N}}\,|x_n-x|\geq\lim_{n}{}_{\mathfrak{N}}\,|x_n-a|$$

ただし a は任意の $y\in X^*$ に対して
$\lim_n \langle x_n - a, y\rangle = 0$ をみたす点とする。

例えば $l^p (1\le p<\infty)$ や Hilbert 空間は性質(*)をもつ。しかし $L^p (1\le p\le\infty, p\ne 2)$ はこの性質(*)を持たない。([6])

<u>定義4.2.</u> $s\in[0,T)$, $\lambda\in(0,T-s]$ に対して, $x\in R_\lambda(s)$ であることを次で定める:

$h\in(0,T-s-\lambda]$ に対して $x_h\in R(I-\lambda A_h(s+\lambda))$ が存在して

$$\lim_{h\downarrow 0} x_h = x.$$

定義からわかるように $R_\lambda(s)\supset R(I-\lambda A^+(s+\lambda))$ だから、A^+ が接触条件

(TC) $s\in[0,T)$, $x\in D(s)$ に対して

$$\liminf_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1} d(R(I-\lambda A^+(s+\lambda)), x) = 0$$

をみたせば次の(DC)が成り立つ:

(DC) $s\in[0,T)$, $x\in D(s)$ に対して

$$\liminf_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1} d(R_\lambda(s), x) = 0$$

定理4.3　$(X,|\cdot|)$ は性質(*)をもち、ノルムが一様にGâteaux微分可能な回帰的Banach空間であるとする。$\mathcal{U}$をクラス$\mathcal{E}(\mathcal{D},\omega,f)$の発展作用素とし、$\mathcal{A}^+$を$\mathcal{U}$のg.i.g.、各$s\in[0,T]$に対して$D(s)$は閉凸であるとする。このとき（DC）から（TC）が導かれる。

注意　定理4.3の仮定に加えてさらに条件

(4.3)　$t_n\in(0,T]$, $x_n\in D(A^+(t_n))$, $t_n\downarrow t\in[0,T)$, $x_n\to x\in X$ ならば $x\in\overline{D(A^+(t))}$

が成り立てば、$\overline{D(A^+(t))}=D(t)$ が得られる。

条件(DC)が成り立つための十分条件について考える。(DC)を書き換えると次のようになる：

（DC）　任意の$s\in[0,T)$, $x\in D(s)$, $\varepsilon>0$に対して、ある$\lambda\in(0,\varepsilon]$と$h(\lambda)\in(0,T-s-\lambda)$および$y_\lambda\in X$が存在して次の3条件をみたす。

(4.4)　$|y_\lambda-x|<\lambda\varepsilon$.

(4.5)　各$h\in(0,h(\lambda)]$に対して$y_{\lambda,h}\in X$が存在して $\lim_{h\downarrow 0} y_{\lambda,h}=y_\lambda$.

(4.6)　各$h\in(0,h(\lambda)]$に対して$x_{\lambda,h}\in D(s+\lambda)$が存在して

$$x_{\lambda,h}-y_{\lambda,h}=\lambda A_h(s+\lambda)x_{\lambda,h}$$

これより（DC）は方程式 $u-\lambda A_h(s+\lambda)u=x$ が近似的に

解けるための十分条件であることが分かる。

各 $w \in D(s+\lambda)$ に対して $\mathcal{F}_{\lambda,h} w = (\lambda+h)^{-1}[h y_{\lambda,h} + \lambda U(s+\lambda+h, s+\lambda) w]$ とおくと (4.6) より、$x_{\lambda,h} = \mathcal{F}_{\lambda,h} x_{\lambda,h}$。従って $\mathcal{F}_{\lambda,h}$ に不動点が存在するような条件を考えればよい。以下に述べる (D1)〜(D5) は (DC) が成り立つための十分条件である。

K を X の凸部分集合とし、$w \in K$ における tangent cone $T_K(w)$ を

$$v \in T_K(w) \iff \liminf_{t \downarrow 0} t^{-1} d(w+tv, K) = 0$$

によって定める。また (E3) より、$w, \hat{w} \in D(s+\lambda)$ に対して

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{\lambda,h} w - \mathcal{F}_{\lambda,h} \hat{w}| &= \lambda(\lambda+h)^{-1} |U(s+\lambda+h, s+\lambda) w - U(s+\lambda+h, s+\lambda) \hat{w}| \\ &\leq \lambda(\lambda+h)^{-1} e^{\omega h} |w - \hat{w}| \end{aligned}$$

となり、λ, h を十分小さくとれば $\mathcal{F}_{\lambda,h}$ は縮小写像になる。

(D1) (4.4)、(4.5) かつ任意の $h \in (0, h(\lambda)]$ と任意の $w \in D(s+\lambda)$ に対して

$$y_{\lambda,h} \in T_{D(s+\lambda)}(w) + (I - \lambda A_h(s+\lambda)) w$$

(D1) より (DC) が導かれる。実際、λ, h を十分小さくとって、$\lambda(\lambda+h)^{-1} e^{\omega h} < 1$ とすると $\mathcal{F}_{\lambda,h} - \lambda(\lambda+h)^{-1} e^{\omega h} I$ は $D(s+\lambda)$ 上で連続かつ消散的である。(D1) より任意の $w \in D(s+\lambda)$ に対して

$(\mathcal{F}_{\lambda,h} - I) w \in T_{D(s+\lambda)}(w)$ となり、$\mathcal{F}_{\lambda,h} - I$ はタイプ $\lambda(\lambda+h)^{-1} e^{\omega h} - 1$ の半群を生成する。$\lambda(\lambda+h)^{-1} e^{\omega h} - 1 < 0$ であり、$D(s+\lambda)$ は閉集合だから、ある $x_{\lambda,h} \in D(s+\lambda)$ が一意に存在して、$(\mathcal{F}_{\lambda,h} - I) x_{\lambda,h} = 0$.

(D2) (4.4)、(4.5) かつ、各 $h \in (0, h(\lambda)]$ に対して、$R(\Gamma_{\lambda,h}) \subset D(s+\lambda)$.

(D2)を仮定すると縮小写像の原理により、不動点が存在する。

注意　任意の $w \in D(s+\lambda)$ に対して　$D(s+\lambda) \subset T_{D(s+\lambda)}(w) + w$
が成り立つので、(D2) の方が (D1) より強い条件である。

(D3)　X の閉凸集合 D と関数 $\varphi \in C^1([0,T]:X)$ および関数
$p \in C^1([0,T])$ で $p(\cdot) > 0$ をみたすものが存在して
$D(s) = p(s)D + \varphi(s)$　とかける。

このとき、
$$y_{\lambda,h} = p(s)^{-1}\left(p(s+\lambda) - \lambda h^{-1}\left(p(s+\lambda+h) - p(s+\lambda)\right)\right)x + \varphi(s+\lambda) - \varphi(s) - \lambda h^{-1}\left(\varphi(s+\lambda+h) - \varphi(s+\lambda)\right)$$
とおけば、(D2) をみたす。

(D4)　任意の $s \in [0,T)$ に対してある $t_0 \in (s, T]$ が存在して、
$t \in [s, t_0]$ と $\theta \in [0,1]$ に対して
$$\theta D(s) + (1-\theta) D(t) \subset D(\theta s + (1-\theta)t).$$

このとき、$y_{\lambda,h} = x$ とおけば (D2) をみたす。

(D5) $s<t$ のとき $D(s)\subset D(t)$ かつ $x\in D(s)$ に対して、

$$\liminf_{h\downarrow 0} h^{-1} d(U(s+h,s)x, D(s)) = 0.$$

Brézis and Browder [2] の結果を用いると、任意の $t\in[s,T]$ に対して、$R(U(t,s))\subset D(s)$ となり、$y_{\lambda,h}=x$ とおけば (D2) をみたす。

L^p $(1<p<\infty, p\neq 2)$ は一様に Gâteaux 微分可能なノルムをもつ回帰的 Banach 空間であるが、性質(*)をもたないために定理4.3. は適用出来ない。そこで性質(*)をもつという条件を落とすために領域 $\mathcal{D}$ に対し、(DC) よりも強い条件をおく。

(D6) 任意の $s\in[0,T)$, $x\in D(s)$, $\varepsilon>0$ に対してある $\lambda\in(0,\varepsilon]$ と $h(\lambda)\in(0,T-s-\lambda)$ および $y_\lambda\in D(s+\lambda)$ が存在して次の4条件をみたす:

(4.7) $w\in D(s+\lambda)$ に対して $\displaystyle\liminf_{h\downarrow 0} h^{-1} d(U(s+\lambda+h,s+\lambda)w, D(s+\lambda))=0.$

(4.8) $|y_\lambda - x| < \lambda\varepsilon$

(4.9) 各 $h\in(0,h(\lambda)]$ に対して $y_{\lambda,h}\in X$ が存在して $\displaystyle\lim_{h\downarrow 0} y_{\lambda,h} = y_\lambda$.

(4.10) 各 $h\in(0,h(\lambda)]$ に対して $x_{\lambda,h}\in D(s+\lambda)$ が存在して

$$x_{\lambda,h} - y_{\lambda,h} = \lambda A_h(s+\lambda)x_{\lambda,h}.$$

明らかに (D5) ならば (D6) が成り立つ。

定理 4.4　$(X, |\cdot|)$ は一様に Gâteaux 微分可能なノルムをもつ回帰的 Banach であるとする。$\mathcal{U}$ をクラス $\mathcal{E}(\mathcal{D}, \omega, f)$ の発展作用素とし、A^+ を $\mathcal{U}$ の g.i.g.、各 $s \in [0, T]$ に対して $D(s)$ は閉凸であるとする。このとき (D6) から (TC) が導かれる。さらに、条件 (4.3) が成り立てば $\overline{D(A^+(t))} = D(t)$ が得られる。

定理 4.3、および定理 4.4、を証明するために次の2つの結果を用いる。

補題 4.5

$$\limsup_{\lambda \downarrow 0}\left(\limsup_{h \downarrow 0} |x_{\lambda,h} - x|\right) = 0$$

補題 4.6.　定理 4.3、又は定理 4.4、の仮定の下で極限

$$x_\lambda \equiv \lim_{h \downarrow 0} x_{\lambda,h}$$ が存在する。

定理 4.3、および定理 4.4、の証明、

(4.6) または (4.10) より、$x_{\lambda,h} - y_{\lambda,h} = \lambda A_h(s+\lambda) x_{\lambda,h}$ とかける。$h \downarrow 0$ とすれば定義 3.1、と補題 4.6、により、$x_\lambda \in D(s+\lambda)$ が存在して

$$x_\lambda - y_\lambda \in \lambda A^+(s+\lambda) x_\lambda$$

が成り立つ。$z_\lambda = \lambda^{-1}(y_\lambda - x)$ とおくと、$|z_\lambda| < \varepsilon$ かつ

$(I-\lambda A^{+}(s+\lambda))x_\lambda - x = \lambda z_\lambda$ となり (TC) が導かれる。 証明終

5. $u-\lambda A_h(t+\lambda)u = x$ の近似解 $x_{\lambda h}$.

この節では $u-\lambda A_h(t+\lambda)u=x$ の近似解を考える立場から、補題4.5. および補題4.6. を証明する。

補題4.5. の証明

$h\in(0,h(\lambda)]$ をとり、n を $nh\in(0,T-s]$ をみたす自然数とする。$k=1,2,\cdots,n$ に対して

$$P_{\lambda,h}(k) = U(kh+s,s)x - x_{\lambda h}$$
$$g_h(k) = U(kh+s,s)x - x$$
$$r_h(k) = \int_0^h e^{\omega(h-\xi)} f(\xi+(k-1)h+s,\ \xi+s+\lambda)\,d\xi$$
$$z_{\lambda,h} = \lambda^{-1}(y_{\lambda h}-x) \quad ,\ z_\lambda = \lambda^{-1}(y_\lambda - x)$$

とおくと補題3.3. により、次が成り立つ：

$$(5.1)\qquad |P_{\lambda,h}(n)| - |P_{\lambda,h}(0)| \le h\sum_{k=1}^{n}\left([P_{\lambda h}(k),\ A_h(s+\lambda)x_{\lambda h}]_+ + h^{-1}(e^{\omega h}-1)|P_{\lambda h}(k-1)|\right) + \sum_{k=1}^{n} r_h(k).$$

$[\cdot,\cdot]_+$ の性質と三角不等式から (5.2)〜(5.4) が得られる。

$$(5.2)\qquad [P_{\lambda,h}(k), A_h(s+\lambda)x_{\lambda h}]_+ \le \lambda^{-1}\left(2|g_h(k)| - |P_{\lambda h}(0)| + \lambda|z_{\lambda,h}|\right)$$

$$(5.3)\qquad |P_{\lambda,h}(n)| - |P_{\lambda h}(0)| \ge -|g_h(n)|$$

$$(5.4)\qquad |P_{\lambda,h}(k)| \le |g_h(k)| + |P_{\lambda,h}(0)|$$

また、f は連続だからある $M>0$ が存在して、$s,t\in[0,T]$ に対して $f(s,t)\le M$ が成り立つ。これより

$$(5.5)\qquad r_h(k) \le h e^{\omega^+ h} M \qquad (\text{ただし } \omega^+ = \max(0,\omega))$$

(5.1) に (5.2)〜(5.5) を代入して整理すると次が得られる。

$$\left(1-\lambda h^{-1}(e^{\omega h}-1)\right)|p_{\lambda,h}(0)|$$

$$\leq \lambda(nh)^{-1}|p_h(n)|+2(nh)^{-1}\sum_{k=1}^{n}h|p_h(k)|+\lambda(nh)^{-1}\sum_{k=1}^{n}h^{-1}(e^{\omega h}-1)|p_h(k-1)|h+\lambda(e^{\omega^+ h}M+|z_{\lambda,h}|)$$

ここで $h\downarrow 0$, $nh\uparrow t$ とすれば、

$$(1-\lambda\omega)\limsup_{h\downarrow 0}|x_{\lambda,h}-x|$$

$$\leq \lambda t^{-1}|U(t+s,s)x-x|+2t^{-1}\int_0^t|U(\xi+s,s)x-x|\,d\xi+\lambda\omega t^{-1}\int_0^t|U(\xi+s,s)x-x|\,d\xi+\lambda(M+|z_\lambda|)$$

さらに $\lambda\downarrow 0$ として、

$$\limsup_{\lambda\downarrow 0}\left(\limsup_{h\downarrow 0}|x_{\lambda,h}-x|\right)\leq 2t^{-1}\int_0^t|U(\xi+s,s)x-x|\,d\xi$$

$t\downarrow 0$ とすれば求める結論を得る。　　　　証明終

補題4.6. の証明

$(0,h(\lambda)]$ において 0 に収束する列 $\{h(n)\}_{n=1}^{\infty}$ を任意にとり固定する。補題4.5. により、$\{x_{\lambda,h(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $D(S+\lambda)$ における有界列になっている。次に $\mathbb{N}$ 上の超フィルター π を1つとり固定する。$x\in X$ に対して、

$$\Phi(x)=\lim_{n\,\pi}|x_{\lambda,h(n)}-x|^2\ ,\quad \Psi(x)=\lim_{n\,\pi}|x_{\lambda,h(n)}-x|$$

とおくと Φ, Ψ は X 上で凸で連続な汎関数であり、X が一様に Gâteaux 微分可能なノルムをもつことから Φ は X 上 Gâteaux 微分可能となる。定理4.3. の場合は X が性質(*)をもつ回帰的な Banach 空間、$D(S+\lambda)$ が閉凸、および Φ が coercive 条件を満たすことから $\Phi(z_\lambda)=\inf_{x\in X}\Phi(x)$ をみたす $z_\lambda\in D(S+\lambda)$ が存在する。定理4.4. の場合も同様に $\Phi(z_\lambda)=\inf_{x\in D(S+\lambda)}\Phi(x)$ をみたす $z_\lambda\in D(S+\lambda)$ が存在する。

先ず $\Phi(z_\lambda)=0$ を示す。これが示されれば、フィルター極限の

性質(4.2)から $\liminf_{n\to\infty} |x_{\lambda,h(n)}-x|^2=0$ となり、部分列をとればx_λに収束することが分かる。そこでx_λが$\{h(n)\}_{n=1}^{\infty}$のとり方によらないことが示されれば、補題4.6.が証明される。

$t\in[0,T)$, $h\in(0,h(\lambda)]$ を $t+h+s+\lambda\in[0,T]$ をみたすものとし、$\hat{x}\in D(s+\lambda)$とする。

(5.6) $\quad P_h(t)=x_{\lambda,h}-U(t+s+\lambda,s+\lambda)\hat{x}$.

(5.7) $\quad Q_h(t)=y_{\lambda,h}-U(t+s+\lambda,s+\lambda)\hat{x}$.

(5.8) $\quad R_h(t)=h^{-1}\int_0^h e^{\omega(h-\xi)}f(\xi+s+\lambda,\xi+t+s+\lambda)\,d\xi$.

とおく。関係式 $x_{\lambda,h}=(\lambda+h)^{-1}[hy_{\lambda,h}+\lambda U(h+s+\lambda,s+\lambda)x_{\lambda,h}]$ に注意すると次の(5.9)と(5.10)が成り立つことが分かる。

$$
\begin{aligned}
&|x_{\lambda,h}-(\lambda+h)^{-1}[hy_{\lambda,h}+\lambda U(t+h+s+\lambda,s+\lambda)\hat{x}]| \\
(5.9)\quad &\leq \lambda(\lambda+h)^{-1}(e^{\omega h}-1)|P_h(t)|+(1-h(\lambda+h)^{-1})|P_h(t)|+\lambda h(\lambda+h)^{-1}R_h(t)
\end{aligned}
$$

$$
(5.10)\quad |x_{\lambda,h}-(\lambda+h)^{-1}[hy_{\lambda,h}+\lambda U(t+h+s+\lambda,s+\lambda)\hat{x}]|=|P_h(t+h)-h(\lambda+h)^{-1}Q_h(t+h)|
$$

(5.9)と(5.10)より次の不等式が得られる。

$$
\begin{aligned}
&(1-\lambda h^{-1}(e^{\omega h}-1))|P_h(t)| \\
&\leq h^{-1}(\lambda+h)[|P_h(t)|-|P_h(t+h)-h(\lambda+h)^{-1}Q_h(t+h)|]+\lambda R_h(t) .
\end{aligned}
$$

この式の両辺に $|P_h(t)|+\lambda h(\lambda+h)^{-1}R_h(t)$ をかけて関係式

$$
|P_h(t+h)-\lambda(\lambda+h)^{-1}Q_h(t+h)|\leq|P_h(t)|+\lambda h(\lambda+h)^{-1}R_h(t)
$$

を用いて整理すると、

$$
\begin{aligned}
&a(h)|P_h(t)|^2 \\
&\leq h^{-1}(\lambda+h)(|P_h(t+h)|^2-|P_h(t+h)-h(\lambda+h)^{-1}Q_h(t+h)|^2)+h^{-1}(\lambda+h)(|P_h(t)|^2-|P_h(t+h)|^2) \\
&\quad +b(h)|P_h(t)|\cdot R_h(t)+c(h)\cdot R_h^2(t) .
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ここで、

$$a(h) = 1 - \lambda h^{-1}(e^{\omega h} - 1)$$
$$b(h) = \lambda(\lambda + h + \lambda e^{\omega h})(\lambda + h)^{-1}$$
$$c(h) = \lambda^2 h(\lambda + h)^{-1}$$

とおいた。これより任意の $\theta > 0$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & a(h)\,|P_h(t)|^2 \\ & \leq \theta^{-1}\left(|P_h(t+h) + \theta Q_h(t+h)|^2 - |P_h(t+h)|^2\right) + h^{-1}(\lambda + h)\left(|P_h(t)|^2 - |P_h(t+h)|^2\right) \\ & \quad + b(h)\,|P_h(t)| \cdot R_h(t) + c(h) \cdot R^2{}_h(t) \end{aligned}$$

両辺を $[0, \alpha]$ 上で t で積分して α で割ると、

$$\begin{aligned} & a(h)\,\alpha^{-1}\int_0^\alpha |P_h(t)|^2\,dt \\ (5.11) \quad & \leq (\alpha\theta)^{-1}\int_\alpha^{\alpha+h}\left(|P_h(t) + \theta Q_h(t)|^2 - |P_h(t)|^2\right)dt \\ & \quad + (\lambda + h)(\alpha h)^{-1}\left(\int_0^h |P_h(t)|^2\,dt - \int_\alpha^{\alpha+h}|P_h(t)|^2\,dt\right) \\ & \quad + b(h)\,\alpha^{-1}\int_0^\alpha |P_h(t)| \cdot R_h(t)\,dt + c(h)\,\alpha^{-1}\int_0^\alpha R_h^2(t)\,dt \end{aligned}$$

(5.6)、(5.7)、(5.8) より $P_h(t)$, $Q_h(t)$、$R_h(t)$ は t の連続関数だから.

$\eta(t) = U(t+s+\lambda, s+\lambda)\hat{x}$ とおけば次が成り立つ:

$$\lim_{n\to\infty} |P_{h(n)}(t)|^2 = \Phi(\eta(t))$$
$$\lim_{n\to\infty} |P_{h(n)}(t) + \theta Q_{h(n)}(t)|^2 = \Phi(\eta(t) - \theta(y_\lambda - \eta(t)))$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(h(n)^{-1}\int_0^{h(n)} |P_{h(n)}(t)|^2\,dt\right) = \Phi(\hat{x})$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(h(n)^{-1}\int_\alpha^{\alpha+h(n)} |P_{h(n)}(t)|^2\,dt\right) = \Phi(\eta(\alpha))$$
$$\lim_{n\to\infty} R_h(t) = f(s+\lambda, t+s+\lambda)$$

また、$\lim_{h\downarrow 0} a(h) = 1 - \lambda\omega$、$\lim_{h\downarrow 0} b(h) = 2\lambda$、$\lim_{h\downarrow 0} c(h) = 0$

以上のことから (5.11) で $h=h(\alpha)$ とおいてフィルター極限をとると、

$$(1-\lambda\omega)\alpha^{-1}\int_0^{\alpha}\Phi(\eta(t))\,dt$$

$$(5.12)\quad \leq (\alpha\theta)^{-1}\int_0^{\alpha}\Big(\Phi(\eta(t)-\theta(y_\lambda-\eta(t)))-\Phi(\eta(t))\Big)\,dt$$

$$+\lambda\alpha^{-1}\Big(\Phi(\hat{x})-\Phi(\eta(\alpha))\Big)+2\lambda\alpha^{-1}\int_0^{\alpha}\Psi(\eta(t))f(s+\lambda,\,t+s+\lambda)\,dt$$

ここで $\hat{x}=x_\lambda$ とすると定理4.3. の場合は、x_λ は $\Phi(x)$ を X 上で最小にする点だから (5.12) の右辺オ2項 ≤ 0 。従って、

$$(1-\lambda\omega)\alpha^{-1}\int_0^{\alpha}\Phi(\eta(t))\,dt$$

$$(5.13)\quad \leq (\alpha\theta)^{-1}\int_0^{\alpha}\Big(\Phi(\eta(t)-\theta(y_\lambda-\eta(t)))-\Phi(\eta(t))\Big)\,dt$$

$$+\,2\lambda\alpha^{-1}\int_0^{\alpha}\Psi(\eta(t))f(s+\lambda,\,t+s+\lambda)\,dt$$

が成り立つ。定理4.4. の場合には、(4.7) より 0 に収束する正数列 $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$ と $x_{\alpha_m}\in D(s+\lambda)$ が存在して、

$$\eta(\alpha_m)=U(\alpha_m+s+\lambda,\,s+\lambda)x_\lambda = x_{\alpha_m}+\alpha_m\cdot o(1)$$

とかける。 $|x_{\lambda h}-x_{\alpha_m}|\leq|x_{\lambda h}-\eta(\alpha_m)|+|\eta(\alpha_m)-x_{\alpha_m}|$ より、

$\Psi(x_{\alpha_m})\leq\Psi(\eta(\alpha_m))+\alpha_m\cdot o(1)$ となること、及び x_λ は $D(s+\lambda)$ 上で $\Phi(x)$ を最小にする点であることに注意すると、

$$\text{(5.12) の右辺オ2項}\leq\lambda\big(\Psi(x_\lambda)+\Psi(\eta(\alpha_m))\big)\cdot\alpha_m^{-1}\big(\Psi(x_\lambda)-\Psi(\eta(\alpha_m))\big)$$

$$\leq\lambda\big(\Psi(x_\lambda)+\Psi(\eta(\alpha_m))\big)\cdot\big(\alpha_m^{-1}[\Psi(x_\lambda)-\Psi(x_{\alpha_m})]+o(1)\big)$$

$$\leq\lambda\big(\Psi(x_\lambda)+\Psi(\eta(\alpha_m))\big)\cdot o(1)$$

が得られる。従って (5.12) で $\alpha=\alpha_m$ として次の (5.14) が成り立つ。

$$(1-\lambda\omega)\alpha_m^{-1}\int_0^{\alpha_m}\Phi(\eta(t))\,dt$$

$$(5.14)\quad \leq(\alpha_m\theta)^{-1}\int_0^{\alpha_m}\Big(\Phi(\eta(t)-\theta(y_\lambda-\eta(t)))-\Phi(\eta(t))\Big)\,dt$$

$$+\lambda\cdot o(1)\left(\Phi(x_\lambda)+\Phi(\eta(\alpha_m))\right)+2\lambda\alpha_m^{-1}\int_0^{\alpha_m}\Phi(\eta(t))f(s+\lambda,t+s+\lambda)\,dt$$

(5.13) で $\alpha\downarrow 0$ 、(5.14) で $m\to\infty$ とすれば、

$$(1-\lambda\omega)\Phi(x_\lambda)\leqq\theta^{-1}\left(\Phi(x_\lambda+\theta(x_\lambda-y_\lambda))-\Phi(x_\lambda)\right)$$

さらに $\theta\downarrow 0$ として、

$$(1-\lambda\omega)\Phi(x_\lambda)\leqq\Phi'(x_\lambda,x_\lambda-y_\lambda)$$

が成り立つ。仮定より Φ は Gâteaux 微分可能であるから

$$\Phi'(x_\lambda,x_\lambda-y_\lambda)=\lim_{\theta\downarrow 0}\theta^{-1}\left(\Phi(x_\lambda+\theta(x_\lambda-y_\lambda))-\Phi(x_\lambda)\right)$$
$$=\lim_{\theta\downarrow 0}\theta^{-1}\left(\Phi(x_\lambda)-\Phi(x_\lambda+\theta(y_\lambda-x_\lambda))\right)\leqq 0$$

が成り立つ。よって $\Phi(x_\lambda)=0$ が示された。

最後に x_λ が 0 に収束する数列 $\{h(n)\}_{n=1}^\infty$ のとり方によらないことを示す。

$\{h(n)\}_{n=1}^\infty$ $\{h'(n)\}_{n=1}^\infty$ を 0 に収束する2つの数列とし、$\lim_{n\to\infty}x_{\lambda,h(n)}=x_\lambda$, $\lim_{n\to\infty}x_{\lambda,h'(n)}=\hat{x}_\lambda$ と仮定する。(5.11) で $h=h(n)$ とおいて $n\to\infty$ とすると

$$(1-\lambda\omega)\alpha^{-1}\int_0^\alpha|P_0(t)|^2dt$$

(5.15) $$\leqq(\alpha\theta)^{-1}\int_0^\alpha\left(|P_0(t)+\theta Q_0(t)|^2-|P_0(t)|^2\right)dt+\lambda\alpha^{-1}\left(|x_\lambda-\hat{x}|^2-|P_0(\alpha)|^2\right)$$
$$+2\lambda\alpha^{-1}\int_0^\alpha|P_0(t)|\,f(s+\lambda,t+s+\lambda)\,dt$$

ここで、

$$P_0(t)=x_\lambda-U(t+s+\lambda,s+\lambda)\hat{x}$$
$$Q_0(t)=y_\lambda-U(t+s+\lambda,s+\lambda)\hat{x}$$

とおいた。また、関係式

$$|x_\lambda-\hat{x}|^2-|P_0(\alpha)|^2=|x_\lambda-\hat{x}|^2-|x_\lambda-U(\alpha+s+\lambda,s+\lambda)\hat{x}|^2$$
$$=|x_\lambda-\hat{x}|^2-|x_\lambda-\hat{x}-\alpha A_\alpha(s+\lambda)\hat{x}|^2$$

を(5.15)に適用すると次が成り立つ.

$$(1-\lambda\omega)\,\alpha^{-1}\int_0^{\alpha}|P_0(t)|^2\,dt$$
$$\leq (\alpha\theta)^{-1}\int_0^{\alpha}\left(|P_0(t)+\theta Q_0(t)|^2-|P_0(t)|^2\right)dt$$
$$+\ \theta^{-1}\left(|x_\lambda-\hat{x}+\theta\lambda A_\alpha(s+\lambda)\hat{x}|^2-|x_\lambda-y_\lambda|^2\right)+2\lambda\alpha^{-1}\int_0^{\alpha}|P_0(t)|\,f(s+\lambda,\,t+s+\lambda)\,dt$$

ここで $\alpha=h'(n)$, $\hat{x}=x_{\lambda,h'(n)}$ とおいて $\lambda A_{h'(n)}(s+\lambda)x_{\lambda,h'(n)}=x_{\lambda,h'(n)}-y_{\lambda,h'(n)}$ に注意すると、

$$(1-\lambda\omega)\,(h'(n))^{-1}\int_0^{h'(n)}|P_0(t)|^2\,dt$$
$$\leq (\theta h'(n))^{-1}\int_0^{h'(n)}\left(|P_0(t)+\theta Q_0(t)|^2-|P_0(t)|^2\right)dt$$
$$+\theta^{-1}\left(|x_\lambda-x_{\lambda,h'(n)}+\theta\,(x_{\lambda,h'(n)}-y_{\lambda,h'(n)})|^2-|x_\lambda-x_{\lambda,h'(n)}|^2\right)$$
$$+\ 2\lambda\,(h'(n))^{-1}\int_0^{h'(n)}|P_0(t)|\,f(s+\lambda,\,t+s+\lambda)\,dt$$

$n\to\infty$ とすれば、

$$(1-\lambda\omega)\,|x_\lambda-\hat{x}_\lambda|^2$$
$$\leq\theta^{-1}\left(|x_\lambda-\hat{x}_\lambda+\theta(y_\lambda-\hat{x}_\lambda)|^2-|x_\lambda-\hat{x}_\lambda|^2\right)$$
$$+\ \theta^{-1}\left(|x_\lambda-\hat{x}_\lambda+\theta(\hat{x}_\lambda-y_\lambda)|^2-|x_\lambda-\hat{x}_\lambda|^2\right)$$

が得られる。ノルムが Gâteaux 微分可能であるからさらに、$\theta\downarrow 0$ として、

$$(1-\lambda\omega)\,|x_\lambda-\hat{x}_\lambda|^2\leq(x_\lambda-\hat{x}_\lambda\,,\,y_\lambda-\hat{x}_\lambda)_+-(x_\lambda-\hat{x}_\lambda\,,\,y_\lambda-\hat{x}_\lambda)_-\ =0$$

ただし、$(x,y)_\pm=|x|\,[x,y]_\pm$.

従って $x_\lambda=\hat{x}_\lambda$ となり、補題4.6.は証明された。

証明終.

6. 注意

(1) 3節で導入した g.i.g. $A^+(s)$ は右微分係数を拡張したものであったが、左微分係数の拡張 $A^-(s)$ も定義出来て、$A^+(s)$ と類似の結果が成り立つ。

(2) この研究報告を書いている際中に、定理4.4 においては、条件(4.3) は別の方法を用いれば取り除けることが分かった。

文献

[1] J.B. Baillon, *Générateurs et semi-groups dan les de Banach uniformément lissés*, J. Funct. Anal., 29 (1978), 199-213.

[2] H. Brézis and F.E. Browder, *A general principle on ordered set in nonlinear functional analysis*, Advances in Math., 21 (1976), 355-364.

[3] M.G. Crandall and A. Pazy, *Nonlinear evolution equations in Banach spaces*, Israel J. Math., 11 (1972), 57-94.

[4] L.C. Evans, *Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space*, Israel J. Math., 26 (1977), 1-42.

[5] I. Hada, K. Hashimoto and S. Oharu, *On the duality mapping of l^∞*, Tokyo J. Math., 2 (1979), 71-97.

[6] K. Hashimoto, *Asymptotic means of bounded sequences in Banach spaces*, in preparation.

[7] T. Iwamiya, S. Oharu and T. Takahashi, On the class of nonlinear evolution operators in Banach space, Nonlinear Analysis, T. M. A., 10 (1986), 315–337.

[8] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 508–520

[9] Y. Kobayashi, Product formula for nonlinear contraction semigroups in Banach spaces, Hiroshima Math. J., 17 (1987), 129–140.

[10] Y. Kobayashi and S. Oharu, Semigroups of locally Lipschitzian operators in Banach spaces, in preparation

[11] K. Kobayasi, Y. Kobayashi and S. Oharu, Nonlinear evolution operators in Banach spaces, Osaka J. Math., 21 (1984), 281–310.

[12] Y. Kōmura, Differentiability of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Japan, 21 (1969), 375–402.

[13] N. H. Pavel, Nonlinear evolution equations governed by f-quasi-dissipative operators, Nonlinear Analysis, T. M. A., 5 (1981), 449–468.

[14] S. Reich, Nonlinear semigroups, holomorphic mappings and integral equations, Proc. Symp. in Pure Math., 43, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1986.

[15] K. Yosida and E. Hewitt, Finitely additive measures, Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952), 46–66.